Felsőbb Matematika (2010-11 ősz) — 7. gyakorlat

1. Mutassuk meg, hogy r-reguláris gráf $\mathbf{A}$ adjacenciamátrixának r egy sajátértéke, és ha valamilyen s-re $\mathbf{A}^s > \mathbf{O}$, akkor minden más sajátérték ennél kisebb abszolút értékű.

Megoldás. Az $\mathbf{1}$ nyilván sajátvektor. Legyen λ sajátérték, $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, és legyen $|x_k| = m$ a max abszolút értékű koordináta. A k-adik koordinátákat figyelve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}|\lambda|m &= |\lambda x_k| = |a_{1k}x_1 + \cdots + a_{nk}x_n| \\ &\le |a_{1k}x_1| + \cdots + |a_{nk}x_n| \\ &\le m(a_{1k} + \cdots + a_{nk}) \\ &= rm\end{aligned}$$

Ebből $|\lambda| \le r$. A fenti egyenlőtlenségeket megismételve $\mathbf{A}^s$-re, ahol már minden mátrixelem pozitív, azt kapjuk, hogy $|\lambda^s| = k^s$ esetén $\mathbf{x} = m\mathbf{1}$, amiből $\mathbf{A1} = r\mathbf{1}$ miatt $\lambda = r$. (A tétel a Frobenius-Perron-tétellel is bizonyítható.)

2. Mutassuk meg, hogy ha egy páros gráf adjacenciamátrixának λ sajátértéke, akkor $-\lambda$ is.

Megoldás. Az adjacenciamátrix alakja $\left[\begin{smallmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^T & \mathbf{O}\end{smallmatrix}\right]$, így ha $[\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2]$ a λ-hoz tartozik, akkor $[-\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2]$ a $-\lambda$-hoz.

3. Mutassuk meg a karakterisztikus egyenlet felírása nélkül, hogy az alábbi mátrixnak van legalább két valós sajátértéke:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A 9-közepű 1-sugarú Gerschgorin-körben csak 1 gyök lehet, így az valós, és mivel 4 gyök van, a komplexek párosan fordulnak elő, ezért kell még valós gyöknek lennie.

4. Ellenőrizzük Perron tételét az alábbi mátrixra:

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Sajátértékek: 10, 3, 3, jobb Perron-vektor: $(5/25, 9/25, 11/25)$, bal Perron-vektor: $(4/7, 2/7, 1/7)$.

5. Mutassuk meg, hogy ha az $\mathbf{A} > \mathbf{O}$ mátrix minden oszlopában c az elemek összege, akkor c a spektrálsugár.

Megoldás. Az $\mathbf{A}^T$-nak az $\mathbf{1}$ vektor sajátvektora, c sajátértékkel. Mivel $\mathbf{1} > \mathbf{0}$, ezért ez csak a bal Perron-vektor n-szerese lehet, és akkor c a hozzá tartozó sajátérték, így c a spektrálsugár.

6. Határozzuk meg, hogy az alábbi mátrixok irreducibilisek vagy reducibilisek! A reducibilisekhez határozzuk meg a permutációs mátrixot is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0&1 \\ 0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Az $\mathbf{A}$ reducibilis, a $\mathbf{B}$ irreducibilis, a permutációs mátrix és a szimmetrikusan permutált $\mathbf{A}$ mátrix:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^T\mathbf{AP} = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 0&0&1&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0 \\ \hline 0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0 \end{array}\right]$$

7. Fisher (statisztikus, populációgenetikus) növényeket vizsgált különböző körülmények között: v-féle növényt b tulajdonságra (a továbbiakban blokkoknak nevezzük). Nincs mód arra, hogy minden növénykombinációt kipróbáljunk, ezért a következő feltételeket tesszük.

1. minden blokkban k különböző növény van ($k < v$);
2. minden növény pontosan r blokkban szerepel;
3. bármely két különböző növény azonos λ számú blokkban szerepel együtt;

Igazoljuk a Fisher-egyenlőtlenséget: $v \leq b$.

Megoldás. Az incidenciamátrix legyen $\mathbf{A}_{v\times b}$, ahol $a_{ij} = 1$, ha az i-edik növény a j-edik blokkban van, egyébként $a_{ij} = 0$. A $v \times v$-es $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$ mátrix főátlójában r, egyebütt λ áll. Mivel $r \neq \lambda$, így $\det(\mathbf{B}) \neq 0$, ezért $\mathrm{r}(\mathbf{B}) = v$, és $\mathrm{r}(\mathbf{B}) \leq \mathrm{r}(\mathbf{A}) \leq b$, tehát $v \leq b$.

8. Mutassuk meg, hogy az n-lakosú Páratlanvárosban, ahol minden klub páratlan létszámú, de bármely két klubnak páros sok a közös tagja, legföljebb n klub van.

Megoldás. $\mathbb{F}_2$ fölött a klubok karakterisztikus 0-1-vektorai lineárisan függetlenek, ugyanis páronként merőlegesek egymásra és egységvektorok, így bármely

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_m\mathbf{x}_m = \mathbf{0}$$

lineáris kombinációjuk $\mathbf{x}_j$-vel beszorozva azt kapjuk, hogy $c_j\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_j = 0$, amiből $\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_j = 1$ miatt következik, hogy $c_j = 0$. Független vektorból viszont legföljebb n választható, így a klubok száma legföljebb n.