Felsőbb matematika vizsga – 2010-12-20

Név ______________________________ **Neptun** __________

Minden feladat 1 pontot ér, kivéve ha meg van adva a pontszám. Az összesen szerezhető 25 pontból legalább 10 pontot el kell érni. A bekeretezett részbe kell a választ beírni. Csak annyit írjunk be, amennyit a feladat kér! Részletszámításokat sehol nem kérünk. A vizsgán segédeszköz nem használható.

1. Egy tétel szerint elemi sorműveletek közben *nem* változik a sorvektorok… és *nem* változik az oszlopvektorok…! Mi *nem* változik a sorvektorokkal, és mi az oszlopvektorokkal kapcsolatban?

Nem változik a sortér (a sorvektorok által generált altér) és nem változnak az oszlopvektorok közti lineáris kapcsolatok.

2. Adjuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ mátrix LU-felbontását!

$\mathbf{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$

3. Mit értünk egy komplex négyzetes mátrix Schur-felbontásán?

Egy $\mathbf{A} = \mathbf{QUQ}^H$ alakú felbontást, ahol $\mathbf{Q}$ unitér, $\mathbf{U}$ felső háromszög.

4. A valós $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix szinguláris érték szerinti $\mathbf{U\Sigma V}^T$ felbontásának ismeretében írjuk föl az $\mathbb{R}^n$ és az $\mathbb{R}^m$ egy bázisát és e bázis elemei közt az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezés hatását!

Az $\mathbf{U}$ oszlopvektoraiból álló $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^m$ az $\mathbb{R}^m$, a $\mathbf{V}$ oszlopaiból álló $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$ az $\mathbb{R}^n$ bázisa, $\mathbf{Av}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$.

5. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy mátrix *(a)* unitéren, *(b)* ortogonálisan diagonalizálható legyen?

Hogy a mátrix *(a)* normális, *(b)* szimmetrikus legyen.

6. Mit tudunk egy *(a)* önadjungált és egy *(b)* unitér mátrix determinánsáról?

(a) valós, *(b)* 1.

7. Írjuk fel a $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix redukált szinguláris felbontását! *(2 pont)*

$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [\sqrt{10}] \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \quad 1]$

8. Írjuk fel a $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix pszeudoinverzét!

$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{10}} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} [2 \quad 1] = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$

9. Adjuk meg a $\left\{ \begin{array}{c} 2x + 2y = 5 \\ x + y = 0 \end{array} \right\}$ egyenletrendszer optimális, minimális abszolút értékű megoldását!

A megoldás $x = y = 1$. (Kereshetjük a normálegyenletből a sortérbe eső megoldást, vagy számolhatunk a pszeudoinverzzel.)

10. Legyen adva az unitér $\mathbf{U} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -2 & 3 & -6 \\ 3 & 6 & 2 \\ -6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix. Írjuk fel a második és harmadik oszlopvektora által kifeszített síkra való merőleges tükrözés mátrixát mátrixműveletekkel (kiszámolni nem kell)!

$\mathbf{U} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{U}^T$

11. Az $x^2 + 4xy + 3y^2 + 5x + 2y + 4 = 0$ egyenletű görbének parabola, hiperbola vagy ellipszis a képe, és miért?

Hiperbola, mert különböző előjelűek a sajátértékei.

12. Adjuk meg a $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix sajátalterének egy bázisát és egy Jordan-bázisát, azaz általánosított sajátvektorokból álló bázisát! *(2 pont)*

$(1, 0)$ az egydimenziós sajátaltér egy vektora, $(0, 1)$ egy általánosított sajátvektor.

13. Adjuk meg a $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix Jordan-féle normálalakját!

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

14. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ mátrix 1-normáját és Frobenius-normáját!

$\|\mathbf{A}\|_1 = 9$, $\|\mathbf{A}\|_F = 7$

15. Gerschgorin-körökkel mutassuk meg, hogy nincs komplex sajátértéke a $\begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrixnak. *(2 pont)*

Mivel a 9-középű 2-sugarú, 5- és 2-középű 1-sugarú körök diszjunktak, ezért mindegyikben csak egy sajátérték lehet, a komplexek viszont párosával fordulnának elő.

16. Röviden igazoljuk, hogy ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus és pozitív szemidefinit, akkor sajátértékei és szinguláris értékei megegyeznek. *(3 pont)*

Ha $\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit, akkor sajátértékei nemnegatívak, ha szimmetrikus, akkor $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{A}^2$, így $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ sajátértékei az $\mathbf{A}$ sajátértékeinek négyzetei, melyek gyökei – a szinguláris értékek – így megegyeznek a sajátértékekkel.

17. Mondjuk ki és bizonyítsuk Birkhoff tételét! *(4 pont)*

Minden duplán sztochasztikus mátrix előáll permutációmátrixok pozitív együtthatós lineáris kombinációjaként.