Felsőbb matematika vizsga – 2011-01-03

Név ______________________________ **Neptun** __________

Minden feladat 1 pontot ér, kivéve ha meg van adva a pontszám. Az összesen szerezhető 25 pontból legalább 10 pontot el kell érni. A bekeretezett részbe kell a választ beírni. Csak annyit írjunk be, amennyit a feladat kér! Részletszámításokat sehol nem kérünk. A vizsgán segédeszköz nem használható.

1. Írjuk fel a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenséget!

$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \le |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$

2. Mit értünk egy vektortér dimenzióján?

a belőle kiválasztható maximális lineárisan független vektorrendszer elemszámát.

3. Legyen egy vektortér két bázisa $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ és $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$. Egy tetszőleges $\mathbf{x}$ vektor $\mathcal{B}$-beli koordinátás alakját jelölje $[\mathbf{x}]_\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$-beli koordinátás alakját $[\mathbf{x}]_\mathcal{C}$. Írjuk fel az áttérés $\mathbf{M}$ mátrixát, melyre $[\mathbf{x}]_\mathcal{C} = \mathbf{M}[\mathbf{x}]_\mathcal{B}$.

$\mathbf{M} = \big[[\mathbf{b}_1]_\mathcal{C} \mid [\mathbf{b}_2]_\mathcal{C} \mid \dots \mid [\mathbf{b}_n]_\mathcal{C}\big]$

4. Adjuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix PLU-felbontását!

$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{L}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$

5. Mit értünk egy komplex négyzetes mátrix Schur-felbontásán?

Egy $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{U}\mathbf{Q}^H$ alakú felbontást, ahol $\mathbf{Q}$ unitér, $\mathbf{U}$ felső háromszög.

6. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy mátrix *(a)* ortogonálisan, *(b)* unitéren diagonalizálható legyen?

Hogy a mátrix *(a)* szimmetrikus, *(b)* normális legyen.

7. Írjuk fel a $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ mátrix redukált szinguláris felbontását! *(2 pont)*

$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot [2\sqrt{2}] \cdot [0 \;\; 1]$

8. Adjuk meg az $\left\{\begin{array}{c} x + y = -1 \\ 2x + 2y = 0 \\ 3x + 3y = -2 \end{array}\right\}$ egyenletrendszer optimális, minimális abszolút értékű megoldását!

A megoldás $x = y = -\frac{1}{4}$. (A normálegyenlet $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$, amiből $14x + 14y = -7$. A sorteret pedig az $(1, 1)$ vektor generálja. Egy másik megoldás pszeudoinverzzel: $\frac{1}{28}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 \\ -1/4 \end{bmatrix}$.)

9. Írjuk fel annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, amely $\mathbb{R}^4$ vektorait az $(1, 1, -1, -1)$ és az $(1, -1, 1, -1)$ vektorok által kifeszített térre merőlegesen vetíti!

$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ha $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, akkor a merőleges vetítés mátrixa $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$.

10. Egy 10×10-es $\mathbf{A}$ mátrixnak λ 10-szeres algebrai multiplicitású sajátértéke. $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 5, 2, 1, 0. Mennyi a Jordan-láncok száma? Milyen hosszú a leghosszabb lánc? Rajzoljuk le a Jordan-láncokat! *(2 pont)*

A Jordan-láncok száma $n - \mathrm{r}(\mathbf{A}) = 10 - 5 = 5$. A leghosszabb lánc hossza 4 ($\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ legkisebb $\mathbf{O}$-t adó hatványa).

$$\begin{array}{lllllll} \bullet & \longleftarrow & \bullet & \longleftarrow & \bullet & \longleftarrow & \bullet \\ \bullet & \longleftarrow & \bullet & & & & \\ \bullet & \longleftarrow & \bullet & & & & \\ \bullet & & & & & & \\ \bullet & & & & & & \end{array}$$

11. Írjuk fel az $e^{\mathbf{J}}$ mátrixot, ha

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$e^4 \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

12. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix indukált 1-, 2- és ∞-normáját! *(2 pont)*

$\|\mathbf{A}\|_1 = 7$, $\|\mathbf{A}\|_2 = \sigma_1 = 5$, $\|\mathbf{A}\|_\infty = 4$

13. Legyenek $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,…,$\mathbf{x}_n$ egymásra páronként merőleges nemzérus vektorok. Mutassuk meg, hogy függetlenek egymástól! *(2 pont)*

Legyen $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$. Szorozzuk meg $\mathbf{x}_1$-gyel mindkét oldalt: $c_1\mathbf{x}_1^2 = 0$, amiből $\mathbf{x}_1^2 \neq 0$ miatt $c_1 = 0$ adódik. Hasonlóképp a többi is, tehát $c_1 = c_2 = \cdots = 0$, azaz a vektorok függetlenek.

14. Mutassuk meg, hogy ortogonális mátrixok szorzata ortogonális! *(2 pont)*

Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ ortogonális, azaz $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ és $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^T$, akkor $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = (\mathbf{AB})^T$.

15. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ pozitív elemű és minden oszlopában μ az oszlopösszeg, akkor μ a spektrálsugár. *(3 pont)*

$\mathbf{A}^T$-nek sajátvektora $\mathbf{1}$, a hozzá tartozó sajátérték μ. Mivel $\mathbf{1} > \mathbf{0}$, ezért e sajátvektor Perron-tétele szerint csak a Perron-vektor skalárszorosa lehet μ-vel, mint sajátértékkel, és ekkor ez a spektrálsugár.

16. Milyen tételt tudunk hasonló mátrixok karakterisztikus polinomjáról? Bizonyítsuk is be! *(3 pont)*

Hasonló mátrixok karakterisztikus polinomja megegyezik.

trivi