Felsőbb matematika vizsga – 2011-01-10

Név ______________________________ **Neptun** __________

Minden feladat 1 pontot ér, kivéve ha meg van adva a pontszám. Az összesen szerezhető 25 pontból legalább 10 pontot el kell érni. A bekeretezett részbe kell a választ beírni. Csak annyit írjunk be, amennyit a feladat kér! Részletszámításokat sehol nem kérünk. A vizsgán segédeszköz nem használható.

1. Írjuk fel a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenséget!	$\lvert\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\rvert \le \lvert\mathbf{x}\rvert\lvert\mathbf{y}\rvert$
2. Írjuk fel a $\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ mátrix redukált szinguláris felbontását és pszeudoinverzét! *(2 pont)*	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\cdot[\sqrt{2}]\cdot[1\ \ 0\ \ 0]$ $\begin{bmatrix}1/2&1/2\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$.
3. $\mathbb{R}^4$ egy 2-dimenziós alterének bázisvektorai az $(1,1,-1,-1)$ és a $(9,3,-1,5)$ vektorok. A Gram–Schmidt-eljárással adjuk meg az altér egy ortonormált bázisát.	$\mathbf{v}_2 = (9,3,-1,5) - \frac{(9,3,-1,5)(1,1,-1,-1)}{\lvert(1,1,-1,-1)\rvert^2} = (7,1,1,7)$, így az ortonormált bázis vektorai: $\frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$, $\frac{1}{10}(7,1,1,7)$
4. Az előző feladat eredményét fölhasználva írjuk fel az $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&9\\1&3\\-1&-1\\-1&5\end{bmatrix}$ mátrix QR-felbontását!	Az ortonormált bázis vektoraiból álló mátrix a $\mathbf{Q}$, és $\mathbf{R}=\mathbf{Q}^T\mathbf{A}$, azaz a felbontás: $\mathbf{A}=\mathbf{QR}=\begin{bmatrix}1/2&7/10\\1/2&1/10\\-1/2&1/10\\-1/2&7/10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4\\0&10\end{bmatrix}$.
5. Irreducibilis vagy reducibilis az alábbi mátrix? $\begin{bmatrix}0&2&0&0&0\\0&0&0&6&0\\0&0&0&0&4\\1&0&8&0&8\\0&0&2&0&0\end{bmatrix}$ (Rajzzal igazolható!)	reducibilis, a $\{3,5\}$ halmazból nem indul él.
6. Egy pozitív elemű 4-edrendű mátrix három sajátértéke 1, $2i$, $-2i$. A 2, -3, 3, $4i$, 4 számok közül válasszuk ki mindegyik olyat, amelyik a negyedik sajátérték lehet!	3, 4.
7. Írjuk fel annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, mely az $\mathbb{R}^3$ teret α szöggel elforgatja az $(1,1,0)$ vektor egyenese körül. (A mátrixműveleteket nem kell elvégezni.) *(2 pont)*	$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}&0\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&-\sin\alpha\\0&\sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix}$, $\mathbf{UBU}^{-1}$.
8. Mit értünk egy komplex négyzetes mátrix Schur-felbontásán?	Egy $\mathbf{A}=\mathbf{QUQ}^H$ alakú felbontást, ahol $\mathbf{Q}$ unitér, $\mathbf{U}$ felső háromszög.
9. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy mátrix *(a)* unitéren, *(b)* ortogonálisan diagonalizálható legyen?	Hogy a mátrix *(a)* normális, *(b)* szimmetrikus legyen.

10. Határozzuk meg a $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix 1-, 2- és ∞-normáját! *(2 pont)*

$\|\mathbf{A}\|_1 = \|\mathbf{A}\|_\infty = 4$, $\|\mathbf{A}\|_2 = 3$

11. Egy 9×9-es $\mathbf{A}$ mátrixnak λ 9-szeres algebrai multiplicitású sajátértéke. $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 5, 3, 1, 0. Mennyi a Jordan-láncok száma? Milyen hosszú a leghosszabb lánc? Rajzoljuk le a Jordan-láncokat! *(2 pont)*

A Jordan-láncok száma $n - \mathrm{r}(\mathbf{A}) = 9 - 5 = 4$. A leghosszabb lánc hossza 4 ($\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ legkisebb $\mathbf{O}$-t adó hatványa).

$$\begin{array}{lllllll} \bullet & \longleftarrow & \bullet & \longleftarrow & \bullet & \longleftarrow & \bullet \\ \bullet & \longleftarrow & \bullet & \longleftarrow & \bullet & & \\ \bullet & & & & & & \\ \bullet & & & & & & \end{array}$$

12. Írjuk le a Frobenius–König-tételt! *(2 pont)*

...

13. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{b}$ merőleges az oszloptérre, és $\mathbf{A}$ oszlopvektorai lineárisan függetlenek, akkor az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ optimális megoldása $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. *(2 pont)*

$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b} = \mathbf{0}$, így $\mathbf{x}$ a homogén egy megoldása, de mivel $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ invertálható, ez az egyetlen megoldás.

14. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$ önadjungált és $\mathbf{U} \in \mathbf{C}^{n\times n}$ unitér mátrixok, akkor $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$ önadjungált. *(2 pont)*

$(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U})^H = \mathbf{U}^H\mathbf{A}^H(\mathbf{U}^{-1})^H = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{U}^H)^H = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$.

15. Igazoljuk, hogy egy megoldható lineáris egyenletrendszernek van a sortérbe eső megoldása, és az egyértelmű. *(4 pont)*

trivi