Felsőbb Matematika (2011-12 ősz) 1. gyakorlat

1. Igazoljuk, hogy a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ vektorrendszerre az alábbi két állítás ekvivalens:
a) ha $\sum_{k=1}^n c_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, akkor $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$,
b) ha $n > 1$, akkor egyik vektor sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként, ha $n = 1$, akkor $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$.

2. Legyen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq c \leq 1$. Írjuk fel az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ helyvektorok végpontjait összekötő szakaszt $c : (1-c)$ arányban osztó pontba mutató vektort $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ lineáris kombinációjaként!

3 (Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz)**.** Igazoljuk, hogy tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}) \quad (\text{vagy } |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|),$$

és mutassuk meg, hogy egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ párhuzamosak.

4 (Pithagorász)**.** Mutassuk meg, hogy $|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2$ pontosan akkor igaz, ha $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

5. Definiáljuk $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ vektorok skaláris szorzatát az $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^n \bar{x}_k y_k$ képlettel. Mutassuk meg, hogy
a) $\mathbf{x} \cdot (\lambda \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$, $(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \bar{\lambda}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$ és $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \overline{\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}}$,
b) (CBS) $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$

6. *a)* Számítsuk ki a komplex N-edik egységgyökök összegét.
b) Számítsuk ki a komplex N-edik egységgyökök n-edik hatványainak összegét.

7. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{C}$ egy primitív N-edik egységgyök. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{x}_k = (1, \varepsilon^k, \varepsilon^{2k}, \ldots, \varepsilon^{(N-1)k})$ $(0 \leq k < N)$, akkor

$$\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{x}_j = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq j, \\ N, & \text{ha } k = j. \end{cases}$$

8. Tegyük fel, hogy a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^k$ vektorok lineárisan függetlenek. Függetlenek-e a kövekező vektorrendszerek?
a) $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\ldots$, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n$,
b) $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$, $\ldots$, $\mathbf{v}_{n-1} - \mathbf{v}_n$, $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_1$,
c) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, $\ldots$, $\mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{v}_n$, $\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_1$.

9. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^k$ vektorok közül csak $\mathbf{v}_1$ áll elő a többi lineáris kombinációjaként, akkor $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$.

10. Az a és b értékektől függően hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek? Adjuk meg a megoldásokat paraméteres alakban!

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 4 \\ x + 2y - z &= -1 \\ x - y + 2z &= a \\ x + by + z &= 3 \end{aligned}$$

11. Van-e olyan lineáris egyenletrendszer, aminek
a) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;
b) 6 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;
c) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van, és nincs megoldása;
d) 5 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és pontosan 5 megoldása van?

12. Hat világítani képes nyomógomb van egy sorban. Ha egy gombot megnyomunk, az megváltoztatja az ő és szomszédja(i) állapotát (ha világított kialszik, ha nem égett, fölgyullad). A lámpák közül néhány világít. Ki tudjuk e őket kapcsolni megfelelő gombok megnyomásával úgy, hogy végül egy gomb se világítson?

13. Mutassuk meg, hogy megváltozik a helyzet, ha a gombok egy kör mentén vannak elhelyezve. Jellemezzük azokat a mintákat, amelyek eloltható, és azokat, amelyek nem!

HF. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2\right)$.