Felsőbb Matematika (2011-12 ősz) 2. gyakorlat

1. Legyenek

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&6\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1&-2&-3\end{bmatrix},$$
$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix},\ \mathbf{D}=\begin{bmatrix}-1&2\\2&3\\3&-4\end{bmatrix}.$$

Végezd el a következő műveleteket, ha ez lehetséges: $\mathbf{A}+\mathbf{A}$, $3\mathbf{A}^T-\mathbf{A}$, $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{AC}+2\mathbf{C}$, $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}$, $\mathbf{D}^2$, $\mathbf{BC}$, $\mathbf{CB}$.

2. Legyenek $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times k}$ és $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$. Mutassuk meg, hogy ha az $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ együtthatómátrixú lineáris egyenleterendszer megoldható és $\mathbf{x}_1\in\mathbb{R}^k$ egy megoldása, akkor ugyanennek az egyenletnek az összes megoldását $\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_0$ alakban kapjuk, ahol $\mathbf{x}_0$ az $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ $(\in\mathbb{R}^n)$ homogén lineáris egyenletrendszer egy megoldása.

3. Mennyi a $(2,3,0,-1)$, $(1,2,-1,0)$, $(2,4,-2,0)$, $(1,0,3,-2)$ vektorrendszer rangja? Adjunk meg maximális méretű lineárisan független részrendszert, és állítsuk elő a többit ezek lineáris kombinációjaként. Másként fogalmazva: válasszunk bázist e négy vektor által kifeszített altérben e vektorok közül, és írjuk fel a többi vektor e bázisra vonatkozó koordinátás alakját.

4. *Egyenletrendszer megoldásának felírása blokkmátrixokkal* Tegyük fel, hogy az r rangú $\mathbf{A}$ mátrix első r oszlopa lineárisan független – ez oszlopcserékkel mindig elérhető. Jelölje $\mathbf{B}_r$ az $\mathbf{A}$ első r oszlopából álló mátrixot, és legyen az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ bővített mátrix redukált lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix}\mathbf{I}_r&\mathbf{S}&\mathbf{d}_r\\\mathbf{O}&\mathbf{O}&\mathbf{0}\end{bmatrix}$$

ahol $\mathbf{d}_r$ egy r-dimenziós vektor. Ekkor az $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldható, és megoldása

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\mathbf{d}_r\\\mathbf{0}_s\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\mathbf{S}\\\mathbf{I}_s\end{bmatrix}\mathbf{t}_s$$

ahol s a szabad változók száma, azaz $s=n-r$, és $\mathbf{t}_s$ a szabad paraméterek vektora, ráadásul $\mathbf{A}=\mathbf{B}_r[\mathbf{I}_r|\mathbf{S}]$ és $\mathbf{b}=\mathbf{B}_r\mathbf{d}_r$.

5. *Sherman – Morrison-formula* Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix invertálható, és $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ két olyan vektor, hogy $1+\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\neq 0$. Ekkor $\mathbf{A}+\mathbf{uv}^T$ invertálható, és

$$\left(\mathbf{A}+\mathbf{uv}^T\right)^{-1}=\mathbf{A}^{-1}-\frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{uv}^T\mathbf{A}^{-1}}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}.$$

6. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ invertálható mátrixok, akkor a következő ún. blokkdiagonális mátrixok invertálhatók, és

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{D}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{-1}&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{D}^{-1}\end{bmatrix},$$

illetve

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{B}\\\mathbf{O}&\mathbf{D}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{-1}&-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BD}^{-1}\\\mathbf{O}&\mathbf{D}^{-1}\end{bmatrix}.$$

ahol $\mathbf{B}$ tetszőleges, de megfelelő típusú mátrix. Hasonlóan, ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ négyzetes mátrixok, akkor

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{B}\\\mathbf{C}&\mathbf{D}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}&-\mathbf{XBD}^{-1}\\-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{CX}&\mathbf{D}^{-1}+\mathbf{D}^{-1}\mathbf{CXBD}^{-1}\end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{X}=(\mathbf{A}-\mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C})^{-1}$, és feltételezzük, hogy minden felírt mátrixinverz létezik. Ezt felhasználva számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{bmatrix}2&3&1&1&1\\1&2&1&1&1\\1&1&1&0&0\\1&1&0&1&0\\1&1&0&0&1\end{bmatrix}$$

7. Írjuk fel a $\mathcal{B}=\{(1,1,1),(1,2,3),(1,1,2)\}$ bázisról a $\mathcal{C}=\{(7,3,3),(8,1,2),(4,4,3)\}$ bázisra való áttérés mátrixát, és határozzuk meg a $(\mathbf{v})_{\mathcal{B}}=(3,2,1)$ vektor $\mathcal{C}$ bázisbeli alakját!

8. Legyen $\mathbf{A}$ egy 10×10-es valós mátrix. Jelölje r_i az $\mathbf{A}^i$ rangját. Lehet-e az $(r_1,r_2,\dots)$ sorozat egyenlő az alábbiakkal? *(a)* $(5,6,\dots)$, *(b)* $(9,8,7,\dots,4,4\dots)$, *(c)* $(10,9,8,\dots)$, *(d)* $(8,5,\dots)$.

9. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszerek sortérbe eső egyetlen megoldását, és ezt felhasználva összes megoldását!

a)
$$\begin{aligned}x+\ y+z&=3\\2x+\ y-z&=2\\3x+2y\quad\ &=5\end{aligned}$$

b) $x+4y+8z+12w=15$

c)
$$\begin{aligned}x+y+z+w&=3\\x+y-z-w&=1\end{aligned}$$

10. Határozzuk meg a $\mathbf{P}$ és $\mathbf{R}$ mátrixok LU-felbontását, majd ezt fölhasználva

1. oldjuk meg a $\mathbf{Px}=(0,2,4,6)$ egyenletrendszert,
2. invertáljuk az $\mathbf{R}$ mátrixot, ahol

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\1&4&10&20\end{bmatrix}\quad\text{és}\quad\mathbf{R}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}$$

11. Igazoljuk, hogy minden r-rangú mátrix előáll r darab 1-rangú összegeként.

12. Tegyük fel, hogy az $n\times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra $\mathbf{A}^2=\mathbf{O}$. Mutassuk meg, hogy rangja legföljebb $n/2$.

13. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ $m\times n$-es, akkor $\mathrm{r}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})=\mathrm{r}(\mathbf{A})$.

HF. *a)* Határozzuk meg az

$$\begin{bmatrix}3&10&10\\2&4&11\\1&3&-4\end{bmatrix}$$

mátrix LDU-felbontását, valamint a

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&2&2\\2&4&5\end{bmatrix}$$

mátrix PLU-felbontását.

b) Kígyónak (vagy transzverzálisnak) nevezzük azt a mátrixot, melyet egy diagonális mátrix sorai permutációjával kapunk. Hogyan számíthatjuk ki egyszerűen az inverzét?