Felsőbb Matematika (2011-12 ősz) 3. gyakorlat

1. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ és $\det \mathbf{A} = 3$. Határozzuk meg a $2\mathbf{A}^{-1}$, $(2\mathbf{A})^{-1}$ és $\mathbf{A}^2\mathbf{A}^T\mathbf{A}^{-1}$ mátrixok determinánsát!

2. Melyek igazak az alábbi állítások közül, ha $\mathbf{A}$ egy $n \times n$-es mátrixot, $\mathbf{b}$ egy n-dimenziós vektort jelöl?
(a) Ha egy determináns értéke 0, akkor van két azonos sora.
(b) Ha egy determináns értéke nem 0, akkor oszlopvektoriai lineárisan függetlenek.
(c) Ha az $\mathbf{Ax} = 0$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása, akkor $|\mathbf{A}| \neq 0$.
(d) $|\mathbf{A}| \neq 0$ pontosan akkor igaz, ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer nem oldható meg.
(e) $|\mathbf{A}| = 0$ pontosan akkor igaz, ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

3. Legyen x, y és z három különböző, a, b és c három tetszőleges valós szám. Mutassuk meg, hogy egyetlen olyan legfeljebb másodfokú f polinom létezik, melyre $f(x) = a$, $f(y) = b$ és $f(z) = c$.

4. Legyenek $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ alterek. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$\dim\langle V \cup W\rangle = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W).$$

5. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{b}$ merőleges az oszloptérre, és $\mathbf{A}$ oszlopvektorai lineárisan függetlenek, akkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ optimális megoldása $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

6. Legyen $\mathbf{a} = (-1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (-1, -2, -3)$. Határozzuk meg az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{ab}^T\mathbf{x}$ leképezés kép- és magterét!

7. Adjunk meg olyan lineáris transzformációt $\mathbb{R}^3$-ben (ha létezik), amely a $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ vektorokat a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ vektorokba viszi, ahol $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, -1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (2, -1, 3)$, és
(i) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (1, 1, 2)$;
(ii) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (3, 1, 5)$;
(iii) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (2, 1, 3)$;
Írjuk fel e leképezés mátrixát!

8. Adjuk meg az alábbi lineáris transzformációk mátrixát a megadott bázisokban:
(a) az $x - 2y + z = 0$ síkra való merőleges vetítés a standard bázisban;
(b) $f : (x, y, z) \mapsto (2x-y+z, x+z, y-3z)$ a standard, illetve az $\{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (2, 1, 1)\}$ bázisban;
(c) a sík tükrözése az $y = 2x$ egyenesre a standard, illetve az $\{(1, 2), (-2, 1)\}$ bázisban;
(d) $\mathbb{R}^n$ vetítése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektor által kifeszített altérre a standard bázisban;
(e) $\mathbb{R}^n$ vetítése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektorra merőleges hipersíkra a standard bázisban;
(f) $\mathbb{R}^n$ tükrözése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektorra merőleges hipersíkra a standard bázisban.

9. Adjuk meg az $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ altérre való merőleges vetítés mátrixát. Írjuk fel az $(1, 2, 0)$ vektort egy S-beli és egy rá merőleges vektor összegeként.

10. A Gram–Schmidt-ortogonalizációval keressünk ortogonális és ortonormált bázist
(a) $\mathbb{R}^3$-ben a $\{(2, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 2, 3)\}$ bázisból kiindulva,
(b) $\mathbb{R}^4$-nek a $(0, 2, 1, 0)$, $(1, -1, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 2, 0, -1)$ vektorok által kifeszített alterében.
(c) az $(1, 2, -1, 0)$, $(2, 1, 0, 1)$, $(1, -1, 1, -1) \in \mathbb{R}^4$ vektorok által generált altérben.

HF. Legyenek $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ alterek. Pontosan mikor altér $V \cup W$?

HF. *a)* Anélkül, hogy kiszámolnánk az alábbi lottótippekből álló determináns értékét, igazoljuk, hogy az nem 0 (vizsgáljuk meg a számok paritását).

$$\begin{vmatrix} 10 & 22 & 24 & 56 & 89 \\ 11 & 12 & 34 & 70 & 82 \\ 20 & 22 & 36 & 77 & 78 \\ 18 & 23 & 24 & 76 & 78 \\ 22 & 44 & 53 & 54 & 56 \end{vmatrix} \neq 0$$

b) Igazoljuk, hogy az $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ képletekkel definiált Fibonacci-sorozat n-edik eleme egyenlő az alábbi $n \times n$-es tridiagonális determinánssal:

$$a_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$