Felsőbb Matematika (2011-12 ősz) 4. gyakorlat

1. Határozzuk meg a következő mátrixok általánosított (pszeudo)inverzét:

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (b)\ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (c)\ \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (d)\ \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Igazoljuk a pszeudoinverzre vonatkozó alábbi összefüggéseket!
1. $\mathbf{AA}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$,
2. $\mathbf{A}^+\mathbf{AA}^+ = \mathbf{A}^+$,
3. $(\mathbf{AA}^+)^T = \mathbf{AA}^+$,
4. $(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$.

3 (1-rangú mátrixok pszeudoinverze)**.** Mutassuk meg, hogy ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 1$, akkor

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{\mathrm{trace}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}\mathbf{A}^T,$$

ahol $\mathrm{trace}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ elemeinek négyzetösszege. Eszerint ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, akkor

$$\mathbf{a}^+ = \frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}^T = \frac{1}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}^T.$$

4 (Blokkdiagonális mátrix pszeudoinverze)**.** Igazoljuk, hogy blokkdiagonális mátrix esetén

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{A}_k \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^+ & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2^+ & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{A}_k^+ \end{bmatrix}.$$

5. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ oszlopai lineárisan függetlenek, és $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ a QR-felbontás, akkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszerhez tartozó normálegyenlet-rendszer $\mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^T\mathbf{b}$, aminek $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{b}$ az optimális megoldása.

6. Hogyan illesztenénk mért (t_i, y_i) adatpárokra egy $y = Ae^{\alpha t} + B\cos\beta t + C\sin\beta t$ alakú görbét, ha α és β ismert paraméterek, és A, B és C értékére kell optimális (legkisebb négyzetek elvének megfelelő) becslést adni. Írjuk fel az egyenletrendszert és a hozzá tartozó normálegyenletet-rendszert.

7 (QR-felbontás Givens-forgatásokkal)**.** Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 3 & 10 & 6 \\ 0 & 12 & 13 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását Givens-forgatások segítségével!

8. Legyen $\mathbf{A}$ az 1 feladat (b) pontja alatti mátrix. $\mathbf{A}$ pszeudoinverzének segítségével határozzuk meg az $\mathbf{Ax} = (10, 2, 6)$ egyenletrendszer legkisebb abszolút értékű optimális megoldását! Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix QR-felbontását, és ennek felhasználásával is keressük meg az előző egyenletrendszer legkisebb abszolút értékű optimális megoldását!

9. Ha $\mathbb{R}^n = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, azaz $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ kiegészítő alterek, akkor a tér bármely $\mathbf{u}$ vektora egyértelműen előáll $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ alakban, ahol $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$. Az $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{v}$ leképezést vetítésnek vagy projekciónak nevezzük ($\mathbf{v}$ a $\mathcal{V}$-re $\mathcal{W}$ mentén való vetület). Határozzuk meg e transzformáció mátrixát!

HF. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ egységvektor, akkor $\mathbf{I} - 2\mathbf{ee}^T$ – azaz a tükrözés mátrixa – szimmetrikus és ortogonális!

HF. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer optimális megoldását QR-felbontással!

$$\begin{aligned} x + y + 4z &= 6 \\ x \qquad + \ \ z &= 2 \\ x \qquad + 3z &= 8 \\ x + y + 2z &= 4 \end{aligned}$$