Felsőbb Matematika (2011-12 ősz) — 5. gyakorlat

1. Önadjungáltak-e, unitérek-e a következő komplex mátrixok:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ önadjungált és $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitér mátrixok, akkor $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$ önadjungált.

3. Melyek igazak az $\mathbb{R}^n$ vektortér minden f lineáris transzformációjára?
1. $\mathbf{v}$ sajátvektora f-nek $\implies$ $\mathbf{v}$ sajátvektora f^2-nek;
2. $\mathbf{v}$ sajátvektora f^2-nek $\implies$ $\mathbf{v}$ sajátvektora f-nek;
3. 0 sajátértéke f^2-nek $\implies$ 0 sajátértéke f-nek.

4. Mutassuk meg, hogy minden normális felső háromszögmátrix diagonális.

5. Diagonalizáljuk ortogonálisan az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixot és írjuk fel a spektrálfelbontását, azaz állítsuk elő $\mathbf{A} = \sum_\lambda \lambda \mathbf{P}_\lambda$ alakban, ahol $\mathbf{P}_\lambda$ a λ sajátértékhez tartozó sajátaltérre való merőleges vetítés mátrixa.

6. Mondjunk egy lineáris leképezést, melynek sajátértékei (a) 1, 1, 1; (b) 1, 1, -1; (c) 1, -1, -1; (d)-1, -1, -1 (e) 1; (f) -1?

7. Számítsuk ki a k-adik Fibonacci-számot ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$)!

8. Mutassuk meg, hogy az alábbi (valós) mátrixok mind hasonlók:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix}$, ahol a, b, c és d tetszőleges nem 0 értékek;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{bmatrix}$, ahol a, b, c és d tetszőleges nem 0 értékek;

(c) $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$, ahol $a \neq c$ tetszőleges, egymástól különböző értékek;

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

9. Számítsuk ki az alábbi mátrixok szinguláris érték szerinti felbontásának teljes és redukált alakját, és írjuk fel a hozzá tartozó diadikus felbontást!

$$\textit{(a)} \begin{bmatrix} -\frac{4}{13} & 6 \\ \frac{111}{13} & -4 \end{bmatrix}, \quad \textit{(b)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \textit{(c)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \textit{(d)} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

10. Határozzuk meg a fenti mátrixok általánosított (pszeudo)inverzét!

11. Határozzuk meg az *(d)*-beli mátrix polárfelbontását is!

12. Tudjuk, hogy az $\mathbf{A} = \mathbf{U}\operatorname{diag}(4,-2,-2,0)\mathbf{U}^T$ az $\mathbf{A}$ mátrix sajátfelbontása, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel $\mathbf{A}$ szinguláris felbontását!

HF. Diagonalizáljuk ortonormált bázisban az alábbi szimmetrikus mátrixokat, majd írjuk föl spektrálfelbontásukat és redukált szinguláris érték szerinti felbontásukat!

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

HF. Írjuk fel az $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix szinguláris és redukált szinguláris felbontását!