Felsőbb Matematika (2011-12 ősz) 6. gyakorlat

1. Ábrázoljuk az $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 20y + 5 = 0$ egyenletű másodrendű görbét! Határozzuk meg centrumát, és tengelyeinek egyenletét!

2. Melyek normálisak és melyek pozitív definitek az alábbi mátrixok közül?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, akkor az alábbi állítások ekvivalensek:

1. $\mathbf{A}$ pozitív definit;
2. van olyan szimmetrikus, pozitív definit $\mathbf{X}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{X}^2$;
3. van olyan invertálható $\mathbf{Y}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{Y}^T\mathbf{Y}$.

4. Az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektor korrigált szórásnégyzetén az s^* számot értjük, ahol

$$s^* = \frac{1}{n-1}\left((x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2\right), \text{ és } \bar{x} = \frac{1}{n}\left(x_1 + \cdots + x_n\right).$$

Írjuk fel e kvadratikus alak mátrixát, és döntsük el, hogy pozitív definit-e.

5. Mutassuk meg a karakterisztikus egyenlet felírása nélkül, hogy az alábbi mátrixnak van legalább két valós sajátértéke:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

6. Számítsuk ki az alábbi vektorok megadott normáit!

1. $\mathbf{x} = (\sqrt{3} - \mathrm{i}, 6\mathrm{i}, 3)$, $\mathbf{y} = (0.1, -0.2, -0.2)$, $p = 1, 2, \infty$;
2. $(1, 2, 2)$, $(2, 3, 6)$, $(1, 4, 8)$, $(4, 4, 7)$, $p = 2$;
3. $(\mathrm{i}, 2, \sqrt{2} - \sqrt{2}\mathrm{i}, -4i)$, $p = 1, 2, \infty$;
4. $(3, 4, 5)$, $(11, 12, 13, 14)$, $p = 3$;

7. Számítsuk ki az alábbi mátrixok Frobenius-, 1-, 2- és ∞-normáját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

8. Számítsuk ki az alábbi mátrixok Frobenius-, 1-, 2- és ∞-normáját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

9. Igazoljuk, hogy tetszőleges mátrixnormára $\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|$,ahol $\rho(\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ spektrálsugara.

10. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{A}$ normális ($\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^*$), akkor $\|\mathbf{A}\|_2 = \rho(\mathbf{A})$.

11. Hozzuk ortogonális hasonlósági transzformációval felső háromszögalakra az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & -3 \\ 3 & 17 & -6 \\ -12 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixot!

12. A Schur-féle háromszögalakra hozási tétellel bizonyítsuk Cayley-Hamilton tételét, mely szerint ha $p(x)$ az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja, akkor $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

HF. Legyen $n > 1$ és legyen az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix főátlójában minden elem a, a többi elem $b \neq 0$. Mutassuk meg, hogy az $a - b$ sajátérték $(n-1)$-szeres, az $a + (n-1)b$ pedig 1-szeres geometriai multiplicitású. Diagonalizáljuk $\mathbf{A}$-t!

HF. Írjuk fel az $\mathbf{A}$ mátrixot $\mathbf{QUQ}^T$ alakba, ahol $\mathbf{Q}$ ortogonális, $\mathbf{U}$ felső háromszögmátrix. (Schur-felbontás, ld. a 11. feladatot)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 14 & -9 \\ 0 & 16 & -10 \end{bmatrix}$$