Felsőbb Matematika (2011-12 ősz) 1. gyakorlat

1. Igazoljuk, hogy a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ vektorrendszerre az alábbi két állítás ekvivalens:
a) ha $\sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, akkor $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$,
b) ha $n > 1$, akkor egyik vektor sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként, ha $n = 1$, akkor $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$.

Megoldás. ld. könyv 1.46. tétel.

2. Legyen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $0 \le c \le 1$. Írjuk fel az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ helyvektorok végpontjait összekötő szakaszt $c : (1-c)$ arányban osztó pontba mutató vektort $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ lineáris kombinációjaként!

Megoldás. Válasz: $(1-c)\mathbf{x}+c\mathbf{y}$. Az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ helyvektorok végpontjain átmenő egyenes ponthalmaza az $\mathbf{x} + c(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ előállításból $\{\, (1-c)\mathbf{x} + c\mathbf{y} : c \in \mathbb{R}\,\}$, a szakasz ponthalmaza $\{\, (1-c)\mathbf{x} + c\mathbf{y} : 0 \le c \le 1\,\}$.

3 (Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz)**.** Igazoljuk, hogy tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra

$$(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2 \le (\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})(\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}) \quad (\text{vagy } |\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \le |\mathbf{x}||\mathbf{y}|)\,,$$

és mutassuk meg, hogy egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ párhuzamosak.

Megoldás. Ha $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, akkor az állítás igaz, tegyük fel tehát, hogy $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Legyen $\mathbf{e} = \mathbf{y}/|\mathbf{y}|$ az $\mathbf{y}$ irányú egységvektor. Az $\mathbf{x}$ vektor $\mathbf{e}$ egyenesére merőleges összetevőjének hossza, illetve annak négyzete nyilván nem negatív:

$$\begin{aligned}
0 &\le |\mathbf{x} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e}|^2 \\
&= |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}|^2 - 2\,|\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}|^2 \\
&= |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}|^2 \\
&= |\mathbf{x}|^2 - \frac{|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|^2}{|\mathbf{y}|^2},
\end{aligned}$$

4 (Pithagorász)**.** Mutassuk meg, hogy $|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2$ pontosan akkor igaz, ha $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

Megoldás. ld. könyv 1.19. tétel.

5. Definiáljuk $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ vektorok skaláris szorzatát az $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k y_k$ képlettel. Mutassuk meg, hogy
a) $\mathbf{x}\cdot(\lambda\mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})$, $(\lambda\mathbf{x})\cdot\mathbf{y} = \bar{\lambda}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})$ és $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \overline{\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}}$,
b) (CBS) $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \le |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$

6. *a)* Számítsuk ki a komplex N-edik egységgyökök összegét.
b) Számítsuk ki a komplex N-edik egységgyökök n-edik hatványainak összegét.

Megoldás. *a)* 0, ugyanis $(1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{N-1})(1-\varepsilon) = 1 - \varepsilon^N = 1 - 1 = 0$. *b)* N, ha n osztható N-nel, egyébként 0.

7. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{C}$ egy primitív N-edik egységgyök. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{x}_k = (1, \varepsilon^k, \varepsilon^{2k}, \dots, \varepsilon^{(N-1)k})$ $(0 \le k < N)$, akkor

$$\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{x}_j = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq j, \\ N, & \text{ha } k = j. \end{cases}$$

8. Tegyük fel, hogy a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^k$ vektorok lineárisan függetlenek. Függetlenek-e a kövekező vektorrendszerek?
a) $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n$,
b) $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$, …, $\mathbf{v}_{n-1} - \mathbf{v}_n$, $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_1$,
c) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, …, $\mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{v}_n$, $\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_1$.

Megoldás. *a)* Vizsgáljuk meg a lineáris függetlenséget: $x_1(\mathbf{v}_1) + x_2(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \cdots + x_n(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\mathbf{v}_1 + \cdots + (x_{n-1} + x_n)\mathbf{v}_{n-1} + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{v}_i$ vektorok függetlensége miatt: $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \cdots = x_{n-1} + x_n = x_n = 0$, emiatt $x_n = x_{n-1} = \cdots = x_1 = 0$. Emiatt a megadott vektorrendszer is lineárisan független lesz.
b) Nem lesz lineárisan független, hiszen $\sum_{i=1}^{n-1}(\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i) + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_1) = \mathbf{0}$.
c) Vizsgáljuk meg a lineáris függetlenséget: $x_1(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + x_2(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + \cdots + x_n(\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_1) = (x_1 + x_n)\mathbf{v}_1 + \cdots + (x_{n-2} + x_{n-1})\mathbf{v}_{n-1} + (x_{n-1} + x_n)\mathbf{v}_n = 0$, akkor $\mathbf{v}_i$ vektorok függetlensége miatt: $x_1 + x_n = \cdots = x_{n-2} + x_{n-1} = x_{n-1} + x_n = 0$. Ha n páros, akkor $x_1 = x_3 = \cdots = x_{n-1} = -x_2 = -x_4 = \cdots = -x_n$ nem triviális megoldása az előző homogén egyenletrendszernek, ezért a megadott vektorrendszer összefüggő lesz. Egyébként pedig nem, mert az egyenletekből azt kapjuk, hogy $x_1 = x_3 = x_5 = \cdots = x_n = x_2 = \cdots = x_{2n-1} = 0$.

9. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^k$ vektorok közül csak $\mathbf{v}_1$ áll elő a többi lineáris kombinációjaként, akkor $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$.

Megoldás. $v_1 = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i$ vektort kifejezhetjük a többi vektor lineáris kombinációjaként, ekkor: $\alpha_j v_j = (1 - \alpha_1)v_1 - \sum_{i=1,\ i\neq j}^{n} \alpha_i v_i$, ekkor ha $\alpha_j \neq 0$, akkor v_j-t is kifejezhetnénk. Ezért $\alpha_j = 0$ bármely j-re. Viszont tudjuk, hogy $\mathbf{v}_1 = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=2}^{n} 0 v_i = 0$.

10. Az a és b értékektől függően hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek? Adjuk meg a megoldásokat paraméteres alakban!

$$\begin{aligned}
2x + y + z &= 4 \\
x + 2y - z &= -1 \\
x - y + 2z &= a \\
x + by + z &= 3
\end{aligned}$$

Megoldás. Az egyenletrendszer kibővített mártixát kell Gauss-eliminálnunk:

$$\begin{bmatrix}2&1&1&4\\1&2&-1&-1\\1&-1&2&a\\1&b&1&3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&2&-1&-1\\2&1&1&4\\1&-1&2&a\\1&b&1&3\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1&2&-1&-1\\0&-3&3&6\\0&-3&3&a+1\\0&b-2&2&4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&2&-1&-1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&a-5\\0&b-2&2&4\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1&2&-1&-1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&a-5\\0&b&0&0\end{bmatrix}\overset{\text{ha } b\neq 0}{\Rightarrow}\begin{bmatrix}1&2&-1&-1\\0&1&0&0\\0&0&-1&-2\\0&0&0&a-5\end{bmatrix}$$

Tehát, ha $a \neq 5$, akkor nincs megoldás, ha $a = 5$ és $b = 0$, akkor ∞ sok megoldás van ($(x, y, z) = (3 - t, -2 + t, t)$), egyébként, azaz ha $a = 5$ és $b \neq 0$, akkor egyetlen ($(x, y, z) = (1, 0, 2)$).

11. Van-e olyan lineáris egyenletrendszer, aminek

a) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;
b) 6 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;
c) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van, és nincs megoldása;
d) 5 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és pontosan 5 megoldása van?

Megoldás. a) Nem lehetséges hiszen a változók száma (6) nagyobb, mint az együttható mátrix vagy a kibővített mátrix rangja (ami legfeljebb 5 lehet, a sorok száma).
b) Ez lehetséges, például $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$ és $x_4 + x_5 = 9$.
c) Ez lehetséges, például $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$ és $x_1 = 9$.
d) Egy egyenletrendszernek általában ($\mathbb{R}$ felett) vagy nincs, vagy pontosan egy vagy végtelen sok megoldása van. De a $\mathbb{Z}_5$ test felett van ilyen például: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_1 + x_2 = 3$.

12. Hat világítani képes nyomógomb van egy sorban. Ha egy gombot megnyomunk, az megváltoztatja az ő és szomszédja(i) állapotát (ha világított kialszik, ha nem égett, fölgyullad). A lámpák közül néhány világít. Ki tudjuk e őket kapcsolni megfelelő gombok megnyomásával úgy, hogy végül egy gomb se világítson?

Megoldás. Igen. Világos, hogy ha a kapcsolgatás során egy gombot és szomszédait páros sokszor nyomjuk meg, állapota nem változik, ha pedig páratlan sokszor, akkor megváltozik. Az is világos, hogy egy gombot sem érdemes egynél többször megnyomni, mert a páros sokszori nyomás olyan, mintha egyszer sem nyomtuk volna meg, a páratlan olyan, mintha egyszer. Ez pontosan azt jelenti, hogy a nyomások számát és a lámpák állapotát is $\mathbb{F}_2$ elemeivel érdemes „számolni”. Legyen $\mathbf{b} = (a, b, c, d, e, f)$ a lámpák állapota. Amely kapcsolók ezt létrehozzák, ugyanazok ki is kapcsolják. Meg kell tehát oldanunk a

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}1&1&0&0&0&0&a\\1&1&1&0&0&0&b\\0&1&1&1&0&0&c\\0&0&1&1&1&0&d\\0&0&0&1&1&1&e\\0&0&0&0&1&1&f\end{array}\right]$$

egyenletrendszert $\mathbb{F}_2$ fölött. A megoldás épp azt adja meg, hogy mely kapcsolókat kell megnyomni. Az együtthatómátrix elemi sorműveletekkel az egységmátrixba transzformálható, tehát minden egyenletrendszer egyértelműen megoldható. A megoldás általánosan:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}1&0&0&0&0&0&b+c+e+f\\0&1&0&0&0&0&a+b+c+e+f\\0&0&1&0&0&0&a+b\\0&0&0&1&0&0&e+f\\0&0&0&0&1&0&a+b+d+e+f\\0&0&0&0&0&1&a+b+d+e\end{array}\right]$$

Például ha csak az ötödik lámpa ég, azaz $e = 1$, $a = b = c = d = f = 0$, akkor a kikapcsolásához a harmadik gomb kivételével mindegyiket meg kell nyomni.

13. Mutassuk meg, hogy megváltozik a helyzet, ha a gombok egy kör mentén vannak elhelyezve. Jellemezzük azokat a mintákat, amelyek eloltathatók, és azokat, amelyek nem!

Megoldás. *1. megoldás* Ezesetben a bővített mátrix, és annak redukált lépcsős alakja:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}1&1&0&0&0&1&a\\1&1&1&0&0&0&b\\0&1&1&1&0&0&c\\0&0&1&1&1&0&d\\0&0&0&1&1&1&e\\1&0&0&0&1&1&f\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}1&0&0&0&1&1&f\\0&1&0&0&1&0&a+f\\0&0&1&0&0&1&a+b\\0&0&0&1&1&1&a+b+d\\0&0&0&0&0&0&a+b+d+e\\0&0&0&0&0&0&a+c+d+f\end{array}\right]$$

Tehát az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $a + b + d + e = 0$ és $a + c + d + f = 0$.

HF. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2\right)$.