Felsőbb Matematika (2011-12 ősz) — 2. gyakorlat

1. Legyenek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Végezd el a következő műveleteket, ha ez lehetséges: $\mathbf{A}+\mathbf{A}$, $3\mathbf{A}^T-\mathbf{A}$, $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{AC}+2\mathbf{C}$, $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}$, $\mathbf{D}^2$, $\mathbf{BC}$, $\mathbf{CB}$.

Megoldás. $A+B$, AB, D^2 nincs értelmezve. A többi mátrixművelet eredménye:

$$A+A=2A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 12 \end{bmatrix}, \qquad AC+2C=\begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ 19 \end{bmatrix},$$

$$A^{-1}D=\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 0 & 17 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}, \qquad CB=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix},$$

$$AC=\begin{bmatrix} -6 & -8 & -13 \end{bmatrix}^T, \ BC=\begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix}.$$

2. Legyenek $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times k}$ és $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Mutassuk meg, hogy ha az $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ együtthatómátrixú lineáris egyenleterendszer megoldható és $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^k$ egy megoldása, akkor ugyanennek az egyenletnek az összes megoldását $\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_0$ alakban kapjuk, ahol $\mathbf{x}_0$ az $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ ($\in \mathbb{R}^n$) homogén lineáris egyenletrendszer egy megoldása.

Megoldás. Meg kell mutatnunk, hogy tetszőleges $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, mely megoldása az egyenletrendszernek ($\mathbf{Ay}=\mathbf{b}$) előáll $\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_0$ alakban. Tehát elég megmutatni, hogy $\mathbf{y}-\mathbf{x}_1$ megoldása a homogén egyenletrendszernek.

$$\mathbf{A}(\mathbf{y}-\mathbf{x}_1)=\mathbf{Ay}-\mathbf{Ax}_1=\mathbf{b}-\mathbf{b}=0$$

Így láttuk, hogy tetszőleges $\mathbf{y}$ megoldás előáll a rögzített $\mathbf{x}_1$ és a lineáris homogén egyenletrendszer egyik megoldásának összegeként.

3. Mennyi a $(2,3,0,-1)$, $(1,2,-1,0)$, $(2,4,-2,0)$, $(1,0,3,-2)$ vektorrendszer rangja? Adjunk meg maximális méretű lineárisan független részrendszert, és állítsuk elő a többit ezek lineáris kombinációjaként. Másként fogalmazva: válasszunk bázist e négy vektor által kifeszített altérben e vektorok közül, és írjuk fel a többi vektor e bázisra vonatkozó koordinátás alakját.

Megoldás. A négy vektor mátrixán végezzünk elemi sorműveleteket:

$$[\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3|\mathbf{v}_4] \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehát a $(2,3,0,-1)$ és $(1,2,-1,0)$ bázist alkotnak, és a $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_4 = 2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2$, a koordinátás alakok: $(0,2)$, $(2,-3)$.

4. *Egyenletrendszer megoldásának felírása blokkmátrixokkal* Tegyük fel, hogy az r rangú $\mathbf{A}$ mátrix első r oszlopa lineárisan független – ez oszlopcserékkel mindig elérhető. Jelölje $\mathbf{B}_r$ az $\mathbf{A}$ első r oszlopából álló mátrixot, és legyen az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ bővített mátrix redukált lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{S} & \mathbf{d}_r \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

ahol $\mathbf{d}_r$ egy r-dimenziós vektor. Ekkor az $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldható, és megoldása

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_r \\ \mathbf{0}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{S} \\ \mathbf{I}_s \end{bmatrix} \mathbf{t}_s$$

ahol s a szabad változók száma, azaz $s=n-r$, és $\mathbf{t}_s$ a szabad paraméterek vektora, ráadásul $\mathbf{A}=\mathbf{B}_r[\mathbf{I}_r|\mathbf{S}]$ és $\mathbf{b}=\mathbf{B}_r\mathbf{d}_r$.

Megoldás. Mivel $[\mathbf{I}_r|\mathbf{S}]$ az $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja, ezért ennek bármely oszlopa az $\mathbf{A}$ mátrix azonos sorszámú oszlopának koordinátás alakja az $\mathbf{B}_r$ oszlopvektoraiban, mint bázisban felírva. Ez épp azt jelenti, hogy $\mathbf{A}=\mathbf{B}_r[\mathbf{I}_r|\mathbf{S}]$. Ez az oszloptér bármely oszlopára, így $\mathbf{b}$-re is igaz, hisz $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ redukált lépcsős alakja szerint az egyenletrendszer megoldható, így $\mathbf{b}$ eleme az oszloptérnek. Eszerint tehát $\mathbf{b}=\mathbf{B}_r\mathbf{d}_r$.

Az, hogy minden megoldás fölírható ilyen alakba, a Gauss–Jordan-módszerből következik. Meg kell még mutatni, hogy a tételben felírt $\mathbf{x}$ vektor valóban megoldás.

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{B}_r\,[\mathbf{I}_r\ \mathbf{S}] \left(\begin{bmatrix} \mathbf{d}_r \\ \mathbf{0}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{S} \\ \mathbf{I}_s \end{bmatrix} \mathbf{t}_s \right) \\ &= \mathbf{B}_r\,(\mathbf{d}_r - \mathbf{St}_s + \mathbf{St}_s) = \mathbf{B}_r\mathbf{d}_r \\ &= \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Ez bizonyítja az állítást.

5. *Sherman–Morrison-formula* Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix invertálható, és $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ két olyan vektor, hogy $1+\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} \neq 0$. Ekkor $\mathbf{A}+\mathbf{uv}^T$ invertálható, és

$$\left(\mathbf{A}+\mathbf{uv}^T\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{uv}^T\mathbf{A}^{-1}}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}.$$

Megoldás. Jegyzet 5.41. tétel.

6. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ invertálható mátrixok, akkor a következő ún. blokkdiagonális mátrixok invertálhatók, és

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix},$$

illetve

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BD}^{-1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}.$$

ahol $\mathbf{B}$ tetszőleges, de megfelelő típusú mátrix. Hasonlóan, ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ négyzetes mátrixok, akkor

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & -\mathbf{XBD}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{CX} & \mathbf{D}^{-1}+\mathbf{D}^{-1}\mathbf{CXBD}^{-1} \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{X}=(\mathbf{A}-\mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C})^{-1}$, és feltételezzük, hogy minden felírt mátrixinverz létezik. Ezt felhasználva számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{bmatrix}2&3&1&1&1\\1&2&1&1&1\\1&1&1&0&0\\1&1&0&1&0\\1&1&0&0&1\end{bmatrix}$$

Megoldás. A képletek egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhetők. Az inverz:

$$\begin{bmatrix}-1&0&1&1&1\\2&-1&-1&-1&-1\\-1&1&1&0&0\\-1&1&0&1&0\\-1&1&0&0&1\end{bmatrix}$$

7. Írjuk fel a $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,2,3),(1,1,2)\}$ bázisról a $\mathcal{C} = \{(7,3,3),(8,1,2),(4,4,3)\}$ bázisra való áttérés mátrixát, és határozzuk meg a $(\mathbf{v})_{\mathcal{B}} = (3,2,1)$ vektor $\mathcal{C}$ bázisbeli alakját!

Megoldás. *1. megoldás:* A megadott vektorokból fölírhatók a két bázisból a standard bázisba való áttérés mátrixai:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&3&2\end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}7&8&4\\3&1&4\\3&2&3\end{bmatrix}$$

amiből $\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}}\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{A}^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$, amiből egy invertálás és egy mátrixszorzás után megkapható az áttérés mátrixa:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}7&47&35\\-4&-27&-20\\-4&-28&-21\end{bmatrix}$$

2. megoldás: Az áttérés mátrixának oszlopai a $\mathcal{B}$ bázis vektorainak $\mathcal{C}$ bázisban kifejezett alakjai. Ez egy szimultán egyenletrendszerből kapható meg:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}7&8&4&1&1&1\\3&1&4&1&2&1\\3&2&3&1&3&2\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&7&47&35\\0&1&0&-4&-27&-20\\0&0&1&-4&-28&-21\end{array}\right]$$

Innen $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ elvégzésével kapjuk, hogy $(\mathbf{v})_{\mathcal{C}} = (150,-86,-89)$.

8. Legyen $\mathbf{A}$ egy 10×10-es valós mátrix. Jelölje r_i az $\mathbf{A}^i$ rangját. Lehet-e az $(r_1, r_2, \ldots)$ sorozat egyenlő az alábbiakkal? *(a)* $(5,6,\ldots)$, *(b)* $(9,8,7,\ldots,4,4\ldots)$, *(c)* $(10,9,8,\ldots)$, *(d)* $(8,5,\ldots)$.

Megoldás. Az $\mathbf{A}$ rangja megegyezik az $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ leképezés képterének dimenziójával, az $\mathbf{A}^i$ rangja az A^{i-1} képtere A általi képének dimenziójával.

(a) Az A leképezés az $\mathbb{R}^{10}$ teret egy 5-dimenziós részébe képzi, így ez az altér saját magába képződik, tehát nem lehet 5-nél több dimenziós: ez a sorozat nem lehetséges.

(b) Ha A a tér bázisán az alábbi módon hat, a rangok a megkívánt sorozatot adják: $\mathbf{e}_6 \mapsto \mathbf{e}_5 \mapsto \mathbf{e}_4 \mapsto \mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{0}$, és $\mathbf{e}_7$, $\mathbf{e}_8$, $\mathbf{e}_9$, $\mathbf{e}_{10}$ helyben maradnak. E leképezés mátrixa és annak hatványai is könnyen felírhatók.

(c) Ha $\mathbf{A}$ rangja 10, akkor determinánsa nem 0, így hatványaié sem, vagyis 10-zel csak a $10, 10, \ldots$ sorozat kezdődik.

(d) Ha $\mathbf{A}$ rangja 8, akkor magterének dimenziója 2, így egy 8-dimenziós tér képe legalább 6. E sorozat nem lehetséges.

9. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszerek sortérbe eső egyetlen megoldását, és ezt felhasználva összes megoldását!

a)
$$\begin{aligned}x + y + z &= 3\\ 2x + y - z &= 2\\ 3x + 2y &= 5\end{aligned}$$

b) $x + 4y + 8z + 12w = 15$

c)
$$\begin{aligned}x + y + z + w &= 3\\ x + y - z - w &= 1\end{aligned}$$

10. Határozzuk meg a $\mathbf{P}$ és $\mathbf{R}$ mátrixok LU-felbontását, majd ezt fölhasználva

1. oldjuk meg a $\mathbf{P}\mathbf{x} = (0,2,4,6)$ egyenletrendszert,
2. invertáljuk az $\mathbf{R}$ mátrixot, ahol

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\1&4&10&20\end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}$$

Megoldás. A Pascal-háromszög LU-felbontása két Pascal-háromszöget ad:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\1&4&10&20\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&2&1&0\\1&3&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

A másik felbontás is hasonlóan varázslatos:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

1. Az egyenletrendszer megoldása $(-2,2,0,0)$.
2. Az inverz:

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix}4&-3&2&-1\\-3&3&-2&1\\2&-2&2&-1\\-1&1&-1&1\end{bmatrix}$$

11. Igazoljuk, hogy minden r-rangú mátrix előáll r darab 1-rangú összegeként.

Megoldás. Útmutatás: mutassuk meg, hogy minden 1-rangú mátrix előáll diadikus szorzatként, majd pl. használjuk a bázisfelbontást.

12. Tegyük fel, hogy az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$. Mutassuk meg, hogy rangja legföljebb $n/2$.

Megoldás. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{N}(\mathbf{A})$ (az oszloptér része a nulltérnek), és használjuk a dimenziótételt.

13. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ $m \times n$-es, akkor $\mathrm{r}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A})$.

Megoldás. Elég megmutatni, hogy $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}$ nulltere megegyezik:

$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{0} = \mathbf{0}$

$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \rightsquigarrow (\mathbf{A}\mathbf{x})\cdot(\mathbf{A}\mathbf{x}) = 0 \rightsquigarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$