Felsőbb Matematika (2011-12 ősz) — 3. gyakorlat

1. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ és $\det \mathbf{A} = 3$. Határozzuk meg a $2\mathbf{A}^{-1}$, $(2\mathbf{A})^{-1}$ és $\mathbf{A}^2\mathbf{A}^T\mathbf{A}^{-1}$ mátrixok determinánsát!

Megoldás. $|2\mathbf{A}^{-1}| = 2^5|\mathbf{A}^{-1}| = 2^5\frac{1}{|\mathbf{A}|} = \frac{2^5}{3}$
$|(2\mathbf{A})^{-1}| = \frac{1}{|2\mathbf{A}|} = \frac{1}{2^5|\mathbf{A}|} = \frac{1}{2^5 3}$
$|\mathbf{A}^2\mathbf{A}^T\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}^2||\mathbf{A}^T||\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^2|\mathbf{A}||\mathbf{A}|^{-1} = |\mathbf{A}|^2 = 9$

2. Melyek igazak az alábbi állítások közül, ha $\mathbf{A}$ egy $n\times n$-es mátrixot, $\mathbf{b}$ egy n-dimenziós vektort jelöl?
(a) Ha egy determináns értéke 0, akkor van két azonos sora.
(b) Ha egy determináns értéke nem 0, akkor oszlopvektoriai lineárisan függetlenek.
(c) Ha az $\mathbf{Ax} = 0$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása, akkor $|\mathbf{A}| \neq 0$.
(d) $|\mathbf{A}| \neq 0$ pontosan akkor igaz, ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer nem oldható meg.
(e) $|\mathbf{A}| = 0$ pontosan akkor igaz, ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

3. Legyen x, y és z három különböző, a, b és c három tetszőleges valós szám. Mutassuk meg, hogy egyetlen olyan legfeljebb másodfokú f polinom létezik, melyre $f(x) = a$, $f(y) = b$ és $f(z) = c$.

4. Legyenek $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ alterek. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$\dim\langle V \cup W\rangle = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W).$$

Megoldás. Legyen $\mathcal{B}$ bázis $V\cap W$-ben. Egészítsük ezt ki V és W egy-egy bázisává: $\mathcal{B}\cup\mathcal{C}$ és $\mathcal{B}\cup\mathcal{D}$. Belátjuk, hogy $\mathcal{A} = \mathcal{B}\cup\mathcal{C}\cup\mathcal{D}$ bázis $\langle V\cup W\rangle$-ben, ebből az állítás már azonnal adódik. $\mathcal{A}$ nyilván generálja $\langle V\cup W\rangle$-t. Indirekt tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$ nem független rendszer. Ekkor elemeinek egy $\mathbf{0}$-t adó lineáris kombinációja $\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d} = \mathbf{0}$ alakba vonható össze, ahol $\mathbf{b}\in\mathcal{B}$, $\mathbf{c}\in\mathcal{C}$ és $\mathbf{d}\in\mathcal{D}$, továbbá legalább egy vektor nem $\mathbf{0}$. Ha $\mathbf{c}\neq\mathbf{0}$, akkor $\mathbf{c} = -\mathbf{b}-\mathbf{d}\in W$, így $\mathbf{c}\in V\cap W$, de a konstrukció szerint $\mathbf{c}$ független $V\cap W$-től, így $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, ellentmondás. Hasonlóan, $\mathbf{d}\neq\mathbf{0}$ is ellentmondásra vezet. Ha $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$, akkor vagy $\mathbf{c}\neq\mathbf{0}$ vagy $\mathbf{d}\neq\mathbf{0}$.

5. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{b}$ merőleges az oszloptérre, és $\mathbf{A}$ oszlopvektorai lineárisan függetlenek, akkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ optimális megoldása $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Megoldás. $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b} = \mathbf{0} \to \mathbf{x}$ a homogén egy megoldása, de mivel $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ invertálható, ez az egyetlen megoldás.

6. Legyen $\mathbf{a} = (-1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (-1, -2, -3)$. Határozzuk meg az $\mathbf{x}\mapsto\mathbf{ab}^T\mathbf{x}$ leképezés kép- és magterét!

Megoldás. A magtér az $(\mathbf{ab}^T)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldástere:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0\\ -2 & -4 & -6 & 0\\ -3 & -6 & -9 & 0\end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

és ebből a megoldás $\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y-3z\\ y\\ z\end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} -2\\ 1\\ 0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} -3\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$, a $\begin{bmatrix} -2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} -3\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ vektorok által kifeszített altér. Képterét a mátrix oszlopai generálják, s mivel mindegyik az $\begin{bmatrix} 1\\ -2\\ -3\end{bmatrix}$ skalárszorosa, a képtér az ezen vektor által kifeszített egydimenziós altér (általában: a lépcsős alak vezéregyeseket tartalmazó oszlopainak megfelelő oszlopok az eredeti mátrixban bázisát adják a képtérnek).

7. Adjunk meg olyan lineáris transzformációt $\mathbb{R}^3$-ben (ha létezik), amely a $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ vektorokat a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ vektorokba viszi, ahol $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, -1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (2, -1, 3)$, és
(i) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (1, 1, 2)$;
(ii) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (3, 1, 5)$;
(iii) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (2, 1, 3)$;
Írjuk fel e leképezés mátrixát!

Megoldás. Mindhárom kérdés megválaszolható úgy, hogy megoldjuk az $\mathbf{Aw}_i = \mathbf{v}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ egyenletekből álló 9-ismeretlenes egyenletrendszert, ahol az ismeretlenek az $\mathbf{A}$ mátrix elemei. Egyetlen mátrixszorzatba tömörítve a fenti egyenleteket, megoldandó az $\mathbf{AW} = \mathbf{V}$ mátrixegyenlet, ahol $\mathbf{A}$ az ismeretlen, és $\mathbf{W}$ illetve $\mathbf{V}$ a $\mathbf{w}_i$, illetve $\mathbf{v}_i$ vektorokból álló mátrix. Az *(i)* kérdésben W invertálható, ezért a megoldás az $A = VW^{-1}$ kiszámolásával is megoldható, de mindhárom esetben használható az elemi sorműveletekkel való megoldás. Ha mindkét oldal transzponáltját vesszük, az ismeretlenek a hagyományos helyen jelennek meg, így a $W^TA^T = V^T$ egyenletben az A^T oszlopvektoraiban három háromismeretlenes egyenletrendszert, vagyis egy szimultán egyenletrendszert kapunk. Ezek megoldása:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 2 & -1 & 3\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2\end{array}\right] \Rightarrow$$
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2\end{array}\right]$$

Tehát az *(i)* megoldása

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ -3 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

A *(ii)* esetén végtelen sok megoldást kapunk:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1\\ 3 & 1 & 5 & 2 & -1 & 3\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0\end{array}\right] \Rightarrow$$
$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right].$$

A jobb oldali rész első oszlopát véve egy egyenletrendszer jobb oldalának, az $x + 2z = 1$, $y - z = -1$ egyenletrendszert kapjuk, melynek megoldása $z = r$, $y = -1 + r$, $x = 1 - 2r$, ahol r szabad paraméter. Hasonlóan megoldva a másik két egyenletrendszert is, majd a belőlük képzett mátrixot transzponálva kapjuk *(ii)* megoldását:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1-2r & -1+r & r\\ -2s & -1+s & s\\ 1-2t & t & t\end{bmatrix}.$$

Azért kaptunk végtelen sok megoldást, mert a $\mathbf{w}_i$ vektorok összefüggőek, egy síkot feszítenek ki, és a köztük lévő összefüggések megegyeznek a $\mathbf{v}_i$ vektorok közti összefüggésekkel. Ez a síkon kívüli vektorok leképzésére még végtelen sok lehetőséget hagy. A *(iii)* esetén nincs megoldás, mert bár a $\mathbf{w}_i$ vektorok itt is összefüggőek, de köztük más összefüggés van, mint a $\mathbf{v}_i$ vektorok közt:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

8. Adjuk meg az alábbi lineáris transzformációk mátrixát a megadott bázisokban:

(a) az $x - 2y + z = 0$ síkra való merőleges vetítés a standard bázisban;

(b) $f : (x, y, z) \mapsto (2x - y + z, x + z, y - 3z)$ a standard, illetve az $\{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (2, 1, 1)\}$ bázisban;

(c) a sík tükrözése az $y = 2x$ egyenesre a standard, illetve az $\{(1, 2), (-2, 1)\}$ bázisban;

(d) $\mathbb{R}^n$ vetítése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektor által kifeszített altérre a standard bázisban;

(e) $\mathbb{R}^n$ vetítése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektorra merőleges hipersíkra a standard bázisban;

(f) $\mathbb{R}^n$ tükrözése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektorra merőleges hipersíkra a standard bázisban.

Megoldás. *(a)* Az (a, b, c) ponton átmenő, az $x-2y+z = 0$ síkra merőleges egyenes paraméteres vektoregyenlete: $(x, y, z) = (a, b, c) + t(1, -2, 1) = (a + t, b - 2t, c + t)$. Az egyenes metszéspontja a síkkal az $(a + t) - 2(b - 2t) + (c + t) = 0$ egyenletből kapható $t = -\frac{1}{6}a + \frac{2}{6}b - \frac{1}{6}c$ paraméterértékből $(\frac{5}{6}a + \frac{2}{6}b - \frac{1}{6}c, \frac{2}{6}a + \frac{2}{6}b + \frac{2}{6}c, -\frac{1}{6}a + \frac{2}{6}b + \frac{5}{6}c)$. Ebből leolvasható, hogy az

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6}a + \frac{2}{6}b - \frac{1}{6}c \\ \frac{2}{6}a + \frac{2}{6}b + \frac{2}{6}c \\ -\frac{1}{6}a + \frac{2}{6}b + \frac{5}{6}c \end{bmatrix}$$

leképezést megvalósító mátrix

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}.$$

(b) Az f transzformáció mátrixa a $\mathcal{E} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ standard bázisban $\mathbf{A}_\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

A $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (2, 1, 1)\}$ bázisban az

$$\begin{aligned} f(\mathbf{c}_1) &= (1, 1, 1) = -\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3 \\ f(\mathbf{c}_2) &= (-1, 0, 1) = -3\mathbf{c}_1 + 2\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3 \\ f(\mathbf{c}_3) &= (4, 3, -2) = 8\mathbf{c}_1 - 3\mathbf{c}_2 - 2\mathbf{c}_3 \end{aligned}$$

összefüggésből

$$\mathbf{A}_\mathcal{C} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 8 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(a mátrix oszlopai a báziselemek képének koordinátavektorai). Egy másik megoldási lehetőséghez jutunk, ha az áttérés mátrixával számolunk:

$$\mathbf{C}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}} = \mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Így $\mathbf{A}_\mathcal{C} = \mathbf{C}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}}\mathbf{A}_\mathcal{E}\mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}} = \mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}^{-1}\mathbf{A}_\mathcal{E}\mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}$ fölhasználásával

$$\mathbf{A}_\mathcal{C} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 8 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(c) Érdemes először a $\mathcal{C} = \{(1, 2), (-2, 1)\}$ bázisban fölírni a mátrixot, mert ennek elemei sajátvektorok, így a képüket meghatározni és koordinátázni is könnyű: $\mathbf{c}_1 = (1, 2)$ és $\mathbf{c}_2 = (-2, 1)$ jelöléssel

$$\begin{aligned} f(\mathbf{c}_1) &= \mathbf{c}_1 = 1 \cdot \mathbf{c}_1 + 0 \cdot \mathbf{c}_2 \\ f(\mathbf{c}_2) &= -\mathbf{c}_2 = 0 \cdot \mathbf{c}_1 + (-1) \cdot \mathbf{c}_2 \end{aligned}$$

tehát f mátrixa $\mathcal{C}$ szerint $\mathbf{A}_\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Az $\mathbf{A}_\mathcal{E}$ standard mátrixra $\mathbf{A}_\mathcal{E} = \mathbf{P}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}\mathbf{A}_\mathcal{C}\mathbf{P}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}^{-1}$, ahol $\mathbf{P}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, így azt kapjuk, hogy $\mathbf{A}_\mathcal{E} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$.

(d) Keressük $\mathbf{x} \mapsto \operatorname{proj}_\mathbf{a}(\mathbf{x})$ mátrixát. Ennek i-edik oszlopa

$$\operatorname{proj}_\mathbf{a}(\mathbf{e}_i) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\mathbf{a} = \frac{a_i}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a},$$

amiből a vetítés mátrixa

$$\mathbf{P} = \left[\frac{a_1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a} \;\middle|\; \frac{a_2}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a} \;\middle|\; \dots \;\middle|\; \frac{a_n}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\right] = \frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^T$$

(e) Keressük az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - \operatorname{proj}_\mathbf{a}(\mathbf{x})$ mátrixát:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^T$$

(f) Keressük az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - 2\operatorname{proj}_\mathbf{a}(\mathbf{x})$ mátrixát:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^T$$

9. Adjuk meg az $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ altérre való merőleges vetítés mátrixát. Írjuk fel az $(1, 2, 0)$ vektort egy S-beli és egy rá merőleges vektor összegeként.

Megoldás. 1. megoldás: Elemi térgometriával könnyen kiszámolható $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ és $(0, 0, 1)$ képei ennél a lineáris transzformációnál, a leképezés mátrixa ezen képvektorokból, mint oszlopokból álló mátrix.

2. megoldás: Könnyen meggoldolható, hogy $\{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$ bázisa S-nek. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Ekkor az ismert képlet alapjan az S-re való merőleges vetítés mátrixa

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3. megoldás: A 2. gyakorlat 8. feladatának felhasználásával tudjuk, hogy az $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ vektorra merőleges hipersíkra merőleges vetítés mátrixa

$$\mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Tetszőleges $\mathbf{v}$ vektor felbontását egy S-beli és egy S-re merőleges vektor összegére a $\mathbf{v} = \mathbf{Pv} + (\mathbf{v} - \mathbf{Pv})$ képlet adja, ebből $(1,2,0) = (0,1,-1) + (1,1,1)$.

10. A Gram–Schmidt-ortogonalizációval keressünk ortogonális és ortonormált bázist

(a) $\mathbb{R}^3$-ben a $\{(2,0,1),(1,1,1),(1,2,3)\}$ bázisból kiindulva,

(b) $\mathbb{R}^4$-nek a $(0,2,1,0)$, $(1,-1,0,0)$, $(1,1,1,0)$, $(1,2,0,-1)$ vektorok által kifeszített alterében.

(c) az $(1,2,-1,0)$, $(2,1,0,1)$, $(1,-1,1,-1) \in \mathbb{R}^4$ vektorok által generált altérben.

Megoldás. *(a)*

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= (2,0,1)\\
\mathbf{v}_2 &= (1,1,1) - \frac{(1,1,1)\cdot(2,0,1)}{|(2,0,1)|^2}(2,0,1) = \left(\frac{-1}{5}, 1, \frac{2}{5}\right)\\
\mathbf{v}_3 &= (1,2,3) - \frac{(1,2,3)\cdot(2,0,1)}{|(2,0,1)|^2}(2,0,1)\\
&\quad - \frac{(1,2,3)\cdot(\frac{-1}{5},1,\frac{2}{5})}{|(\frac{-1}{5},1,\frac{2}{5})|^2}\left(\frac{-1}{5}, 1, \frac{2}{5}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)
\end{aligned}$$

A normált vektorok: $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1)$, $\mathbf{u}_2 = \frac{5}{\sqrt{30}}(-1,5,2)$, $\mathbf{u}_3 = \frac{2}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)$.

(b) $\frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,1,0)$, $\frac{1}{\sqrt{30}}(5,-1,2,0)$, $(0,0,0,0)$, $\frac{1}{\sqrt{10}}(1,1,-2,-2)$.

(c) $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1,0)$, $\frac{1}{\sqrt{30}}(4,-1,2,3)$, $\frac{1}{\sqrt{70}}(4,-1,2,-7)$.

HF. Legyenek $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ alterek. Pontosan mikor altér $V \cup W$?

HF. *a)* Anélkül, hogy kiszámolnánk az alábbi lottótippekből álló determináns értékét, igazoljuk, hogy az nem 0 (vizsgáljuk meg a számok paritását).

$$\begin{vmatrix}
10 & 22 & 24 & 56 & 89\\
11 & 12 & 34 & 70 & 82\\
20 & 22 & 36 & 77 & 78\\
18 & 23 & 24 & 76 & 78\\
22 & 44 & 53 & 54 & 56
\end{vmatrix} \neq 0$$

b) Igazoljuk, hogy az $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ képletekkel definiált Fibonacci-sorozat n-edik eleme egyenlő az alábbi $n \times n$-es tridiagonális determinánssal:

$$a_n = \begin{vmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
1 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1
\end{vmatrix}$$