Felsőbb Matematika (2011-12 ősz) 4. gyakorlat

1. Határozzuk meg a következő mátrixok általánosított (pszeudo)inverzét:

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\quad (b)\ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\quad (c)\ \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},\quad (d)\ \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás. (a) $r(\mathbf{A}) = 1$, a bázisfelbontás: $\mathbf{B} = (1, -1)^T$, $\mathbf{R} - (1, -1)$, ahonnan $\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{R}^T = 4$. Mivel $\mathbf{R}^T\mathbf{B}^T = \mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, ezért $\mathbf{A}^+ = {}^1\!/_4\mathbf{A}$.

(b) Mivel $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú,

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}^{-1}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \frac{5}{36} & \frac{2}{36} \\ \frac{2}{36} & \frac{8}{36} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{18} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}.$$

(c) Az előző pontbeli mátrix transzponáltja.

(d) Eredmény:

$$\begin{bmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{18} & \frac{7}{9} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

2. Igazoljuk a pszeudoinverzre vonatkozó alábbi összefüggéseket!

1. $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$,
2. $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$,
3. $(\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^+$,
4. $(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$.

Megoldás. ld. jegyzet.

3 (1-rangú mátrixok pszeudoinverze). Mutassuk meg, hogy ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 1$, akkor

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{\mathrm{trace}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}\mathbf{A}^T,$$

ahol $\mathrm{trace}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ elemeinek négyzetösszege. Eszerint ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, akkor

$$\mathbf{a}^+ = \frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}^T = \frac{1}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\mathbf{a}^T.$$

Megoldás. Vegyük észre, hogy $\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{R}^T = (\mathbf{B}^T\mathbf{B})(\mathbf{R}\mathbf{R}^T)$ éppen A elemeinek négyzetösszege, $\mathbf{R}^T\mathbf{B}^T$ pedig megegyezik $\mathbf{A}^T$-tal.

4 (Blokkdiagonális mátrix pszeudoinverze). Igazoljuk, hogy blokkdiagonális mátrix esetén

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{A}_k \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^+ & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2^+ & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{A}_k^+ \end{bmatrix}.$$

Megoldás. Az állítás igazolásához elég csak a Penrose-tétel négy feltételét ellenőrizni.

5. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ oszlopai lineárisan függetlenek, és $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$ a QR-felbontás, akkor az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszerhez tartozó normálegyenlet-rendszer $\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{Q}^T\mathbf{b}$, aminek $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{b}$ az optimális megoldása.

Megoldás. behelyettesítés, trivi

6. Hogyan illesztenénk mért (t_i, y_i) adatpárokra egy $y = Ae^{\alpha t} + B\cos\beta t + C\sin\beta t$ alakú görbét, ha α és β ismert paraméterek, és A, B és C értékére kell optimális (legkisebb négyzetek elvének megfelelő) becslést adni. Írjuk fel az egyenletrendszert és a hozzá tartozó normálegyenletet-rendszert.

Megoldás. $\mathbf{M}$ i-edik sora $(e^{\alpha t_i}, \cos\beta t_i, \sin\beta t_i)$, az egyenletrendszer $\mathbf{M}\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \mathbf{Y}$. Beszorozni $\mathbf{M}^T$-vel.

7 (QR-felbontás Givens-forgatásokkal)**.** Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 3 & 10 & 6 \\ 0 & 12 & 13 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását Givens-forgatások segítségével!

Megoldás. Először az első és második sorokat és oszlopokat figyelve elimináljuk a második sor első elemét. Itt $a = 4$, $b = 3$, tehát $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$. Így első lépésben a következő mátrixszorzással eliminálhatunk:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 12 & 13 \end{bmatrix}.$$

Következő lépésben a $\mathbf{Q}_1\mathbf{A}$ mátrix harmadik sorának második elemét elimináljuk:

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ 0 & -\frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix}. \qquad \mathbf{R} = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 0 & 13 & 12 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

és innen

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1)^{-1} = \mathbf{Q}_1^T\mathbf{Q}_2^T = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{13} & \frac{36}{65} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{13} & -\frac{48}{65} \\ 0 & \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix},$$

amely mátrixokkal $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ valóban fennáll.

8. Legyen $\mathbf{A}$ az 1 feladat (b) pontja alatti mátrix. $\mathbf{A}$ pszeudoinverzének segítségével határozzuk meg az $\mathbf{Ax} = (10, 2, 6)$ egyenletrendszer legkisebb abszolút értékű optimális megoldását! Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix QR-felbontását, és ennek felhasználásával is keressük meg az előző egyenletrendszer legkisebb abszolút értékű optimális megoldását!

Megoldás. $\mathbf{A}^+ \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. A QR-felbontáshoz először a Gram–Schmidt-eljárással $\mathbf{A}$ első oszlopára merőleges vektort keresünk:

$$\mathbf{v}_1 = (2, -2, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (0, 1, 2) - \frac{(0, 1, 2) \cdot (2, -2, 0)}{|(2, -2, 0)|^2}(2, -2, 0) = (0, 1, 2) - \frac{-2}{8}(2, -2, 0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$$

A $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ vektorok normáltjai lesznek $\mathbf{Q}$ oszlopai:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ -1 & 1/3 \\ 0 & 4/3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{R} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/6 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1/4 & 1/12 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1/4 & 1/12 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/18 & -2/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 4/9 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

9. Ha $\mathbb{R}^n = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, azaz $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ kiegészítő alterek, akkor a tér bármely $\mathbf{u}$ vektora egyértelműen előáll $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ alakban, ahol $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$. Az $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{v}$ leképezést vetítésnek vagy projekciónak nevezzük ($\mathbf{v}$ a $\mathcal{V}$-re $\mathcal{W}$ mentén való vetület). Határozzuk meg e transzformáció mátrixát!

Megoldás. A $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ dimenzióinak összege n, és ha $\mathcal{V}$ egy bázisa $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$, $\mathcal{W}$ egy bázisa $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{n-r}\}$, akkor a két bázis diszjunkt (metszetük üres) és egyesítésük az egész tér egy bázisa. E vektorokból képezzük az alábbi mátrixot:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \dots\ \mathbf{v}_r | \mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2\ \dots\ \mathbf{w}_{n-r}] = [\mathbf{V}|\mathbf{W}].$$

Mivel $P\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ és $P\mathbf{w}_j = \mathbf{0}$ $(j = 1, 2, \dots, n - r)$, ezért a P leképezés $\mathbf{P}$ mátrixára

$$\mathbf{PU} = \mathbf{P}[\mathbf{V}|\mathbf{W}] = [\mathbf{PV}|\mathbf{PW}] = [\mathbf{V}|\mathbf{O}].$$

Mivel pedig $\mathbf{U}$ invertálható, ezért a projekció mátrixa

$$\mathbf{P} = [\mathbf{V}|\mathbf{O}]\mathbf{U}^{-1} = [\mathbf{V}|\mathbf{O}][\mathbf{V}|\mathbf{W}]^{-1}.$$

HF. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ egységvektor, akkor $\mathbf{I} - 2\mathbf{e}\mathbf{e}^T$ – azaz a tükrözés mátrixa – szimmetrikus és ortogonális!

HF. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer optimális megoldását QR-felbontással!

$$\begin{aligned} x + y + 4z &= 6 \\ x \quad\;\; + \;\; z &= 2 \\ x \quad\;\; + 3z &= 8 \\ x + y + 2z &= 4 \end{aligned}$$