Felsőbb Matematika (2011-12 ősz) — 5. gyakorlat

1. Önadjungáltak-e, unitérek-e a következő komplex mátrixok:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. (a) nem önadjungált, mert tisztán valós elemekből áll, de nem szimmetrikus. Nem is unitér, mert adjungáltjával (most traszponáltjaval) összeszorozva $2\mathbf{I}$-t kapunk. (b) nyilván önadjungált, de nem unitér. (c) nem önadjungált és nem is unitér.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ önadjungált és $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitér mátrixok, akkor $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$ önadjungált.

Megoldás. $(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M})^H = \mathbf{M}^H\mathbf{A}^H(\mathbf{M}^{-1})^H = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{M}^H)^H = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$.

3. Melyek igazak az $\mathbb{R}^n$ vektortér minden f lineáris transzformációjára?

1. $\mathbf{v}$ sajátvektora f-nek $\implies$ $\mathbf{v}$ sajátvektora f^2-nek;
2. $\mathbf{v}$ sajátvektora f^2-nek $\implies$ $\mathbf{v}$ sajátvektora f-nek;
3. 0 sajátértéke f^2-nek $\implies$ 0 sajátértéke f-nek.

Megoldás.
1. $\mathbf{v}$ sajátvektora f-nek, azaz $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v} \implies f^2(\mathbf{v}) = f(\lambda\mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v}) = \lambda^2\mathbf{v}$, azaz $\mathbf{v}$ sajátvektora f^2-nek, az állítás igaz.
2. Hamis, például ha f a sík $90°$-os elforgatása, akkor f^2 a $180°$-os elforgatás, aminek a sík minden vektora sajátvektora, f-nek viszont nincs.
3. Igaz, hisz ha f-nek a 0 nem sajátértéke, azaz f egyik vektort sem viszi a nullvektorba, akkor f^2 sem.

4. Mutassuk meg, hogy minden normális felső háromszögmátrix diagonális.

Megoldás. az első sor egyenlő hosszú az első oszloppal, ebből adódik, hogy az első sorban a főátlón kívül csak 0-k vannak, stb.

5. Diagonalizáljuk ortogonálisan az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixot és írjuk fel a spektrálfelbontását, azaz állítsuk elő $\mathbf{A} = \sum_\lambda \lambda\mathbf{P}_\lambda$ alakban, ahol $\mathbf{P}_\lambda$ a λ sajátértékhez tartozó sajátaltérre való merőleges vetítés mátrixa.

Megoldás. Karakterisztikus polinom: $-x^3+6x^2-9x$, innen $\lambda_{1,2} = 3$, $\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$, a $(0,1,-1)$ sajátvektor ortogonalizálása után $\mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)$, $\lambda_3 = 0$, $\mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Ortogonálisan diagonalizáló mátrix:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

ahonnan $\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \operatorname{diag}(3,3,0)$.

A spektrálfelbontás ortonormált vektorokkal, ahonnan az alterekre vetítő változat is megkapható:

$$3\mathbf{x}_1\mathbf{x}_1^T + 3\mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^T + 0\mathbf{x}_3\mathbf{x}_3^T = 3\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 3\cdot\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} + 0\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 3\cdot\begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} +$$

6. Mondjunk egy lineáris leképezést, melynek sajátértékei (a) 1, 1, 1; (b) 1, 1, -1; (c) 1, -1, -1; (d)-1, -1, -1 (e) 1; (f) -1?

Megoldás. *(a)* identikus *(b)* síkra tükrözés *(c)* egyenesre tükrözés *(d)* origóra tükrözés *(e)* pl. az egyenes körüli forgatás *(f)* pl. a forgatva tükrözés

7. Számítsuk ki a k-adik Fibonacci-számot ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$)!

Megoldás. Mátrixegyenletbe írva:

$$\begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{bmatrix}$$

$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 - \lambda - 1$, $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, a sajátvektorok $\mathbf{x}_i = (\lambda_i, 1)$ $(i = 1, 2)$. $\begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n = \mathbf{C}\Lambda^n\mathbf{C}^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

amiből $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$.

8. Mutassuk meg, hogy az alábbi (valós) mátrixok mind hasonlók:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix}$, ahol a, b, c és d tetszőleges nem 0 értékek;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{bmatrix}$, ahol a, b, c és d tetszőleges nem 0 értékek;

(c) $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$, ahol $a \neq c$ tetszőleges, egymástól különböző értékek;

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Megoldás. (a) Új bázist adunk meg, amelyben az első leképezés mátrixa a második mátrix lesz. Az új bázist $\mathbf{e}_1$, $\alpha\mathbf{e}_2$ alakban keressük. Látható, hogy $\alpha = b/a$ megfelelő. A 3-4. mátrixhoz elég az elsőt transzponálni. Erre a mellékátlóban-csupa-1 mátrix jó.

(b) Az előző feladatbeli mátrixok realizálják a hasonlóságot itt is.

(c) Mindkét mátrixnak két sajátértéke van, az a és a c, így a hozzájuk tartozó sajátvektorokból álló bázisban az első mátrix diagonális lesz.

(d) Az $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ vektorok bázist alkotnak, melyeket az első mátrix a második szerint képez le.

9. Számítsuk ki az alábbi mátrixok szinguláris érték szerinti felbontásának teljes és redukált alakját, és írjuk fel a hozzá tartozó diadikus felbontást!

$$\textit{(a)} \begin{bmatrix} -\frac{4}{13} & 6 \\ \frac{111}{13} & -4 \end{bmatrix}, \quad \textit{(b)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \textit{(c)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \textit{(d)} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás. *(a)* a teljes és a redukált alakok megegyeznek,

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 73 & -36 \\ -36 & 52 \end{bmatrix}, \ x^2 - 125x + 2500, \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 100,\ \lambda_2 = 25, \\ \sigma_1 = 10,\ \sigma_2 = 5 \end{matrix} \quad \mathbf{U} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -5 & 12 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{V} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

(b) $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$-ból indulva $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$, a sajátvektorok $\lambda = 3$: $(1, 2, 1)$, $\lambda = 1$: $(1, 0, -1)$, $\lambda = 0$: $(1, -1, 1)$. Innen a felbontás:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

A redukált felbontás

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

(c) Hasonlóan az előzőhöz:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(d) A teljes felbontás mátrixai:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

a redukált felbontás:

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

10. Határozzuk meg a fenti mátrixok általánosított (pszeudo)inverzét!

Megoldás. *(a)* $\begin{bmatrix} 2/25 & 3/25 \\ 111/650 & 2/325 \end{bmatrix}$, *(b)* $\begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$, *(d)* $\begin{bmatrix} -1/9 & 0 & 2/9 \\ -1/9 & 1/9 & 0 \\ 1/6 & -1/9 & -1/9 \end{bmatrix}$

11. Határozzuk meg az *(d)*-beli mátrix polárfelbontását is!

Megoldás. $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

12. Tudjuk, hogy az $\mathbf{A} = \mathbf{U}\,\mathrm{diag}(4, -2, -2, 0)\mathbf{U}^T$ az $\mathbf{A}$ mátrix sajátfelbontása, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel $\mathbf{A}$ szinguláris felbontását!

Megoldás. Az $\mathbf{A} = \mathbf{U}\,\mathrm{diag}(4, 2, 2, 0)\left(\mathrm{diag}(1, -1, -1, 1)\mathbf{U}^T\right)$ az $\mathbf{A}$ szinguláris felbontása, azaz $\mathbf{V}^T$ úgy kapható meg $\mathbf{U}^T$-ból, ha második és harmadik sorát -1-gyel szorozzuk. A módszer tetszőleges sajátfelbontás esetén működik.

HF. Diagonalizáljuk ortonormált bázisban az alábbi szimmetrikus mátrixokat, majd írjuk föl spektrálfelbontásukat és redukált szinguláris érték szerinti felbontásukat!

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

HF. Írjuk fel az $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix szinguláris és redukált szinguláris felbontását!