Felsőbb Matematika (2011-12 ősz) 6. gyakorlat

1. Ábrázoljuk az $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 20y + 5 = 0$ egyenletű másodrendű görbét! Határozzuk meg centrumát, és tengelyeinek egyenletét!

Megoldás. Az $\mathbf{A}$ sajátfelbontásából $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x} + C = \mathbf{x}_1^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{x}_1 + C$, ahol $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{B} = [-10 \ \ -20], \quad C = 5,$$

azaz $10x_1^2 + 5y_1^2 - 10\sqrt{5}y_1 + 5 = 0$, amiből $10x_1^2 + 5(y_1^2 - 2\sqrt{5}y_1 + 5) = 20$, azaz $(x_2, y_2) = (x_1, y_1 - \sqrt{5})$ jelöléssel: $2x_2^2 + y_2^2 = 4$. A középpont $(x_1, y_1) = (0, \sqrt{5})$, azaz $(x, y) = \mathbf{Q}(0, \sqrt{5}) = (1, 2)$, a rajta átmenő tengelyek iránytangense 2 és $-1/2$.

2. Melyek normálisak és melyek pozitív definitek az alábbi mátrixok közül?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. Mindegyik mátrix szimmetrikus vagy ferdén szimmetrikus, így normális. $\mathbf{B}$ nem szimmetrikus, így nem lehet definit. Az $\mathbf{A}$ főátlójában van 0, így nem lehet pozitív definit, például mert $[\,1\ 0\,]\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] = 0$. $\det \mathbf{C} = 0$, így $\mathbf{C}$ nem lehet pozitív definit. $\mathbf{E}$ főátlójában van negatív elem, így nem lehet pozitív definit. $\mathbf{D}$-nek két pozitív sajátértéke van, ezért pozitív definit.

3. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, akkor az alábbi állítások ekvivalensek:
1. $\mathbf{A}$ pozitív definit;
2. van olyan szimmetrikus, pozitív definit $\mathbf{X}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{X}^2$;
3. van olyan invertálható $\mathbf{Y}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{Y}^T\mathbf{Y}$.

Megoldás. 1. $\Rightarrow$ 2.: $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^T = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{D}\mathbf{C}^T = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}^T = \mathbf{X}^2$
2. $\Rightarrow$ 3.: $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$ megfelel.
3. $\Rightarrow$ 1.: $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{Y}^T\mathbf{Y}\mathbf{x} = |\mathbf{Y}\mathbf{x}|^2 \geq 0$ és az invertálhatóság miatt $\neq 0$, ha $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

4. Az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektor korrigált szórásnégyzetén az s^* számot értjük, ahol

$$s^* = \frac{1}{n-1}\left((x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2\right), \text{ és } \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n).$$

Írjuk fel e kvadratikus alak mátrixát, és döntsük el, hogy pozitív definit-e.

Megoldás. A főátlóban $\frac{1}{n}$, egyebütt $-\frac{1}{n(n-1)}$.

1. megoldás: A kvadratikus alak nyilván pozitív szemidefinit, hisz értéke minden $\mathbf{x}$ vektorra nemnegatív, mivel négyzetösszeg, és 0 csak akkor lehet, ha minden $x_i = \bar{x}$, azaz ha az $\mathbf{x}$ minden koordinátája azonos – ez nem csak a 0-vektorra igaz!

2. megoldás: A mátrix sajátértékei egy korábbi feladat szerint $\frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} > 0$ és $\frac{1}{n} - (n-1)\frac{1}{n(n-1)} = 0$.

5. Mutassuk meg a karakterisztikus egyenlet felírása nélkül, hogy az alábbi mátrixnak van legalább két valós sajátértéke:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A 9-közepű 1-sugarú Gerschgorin-körben csak 1 gyök lehet, így az valós, és mivel 4 gyök van, a komplexek párosan fordulnak elő, ezért kell még valós gyöknek lennie.

6. Számítsuk ki az alábbi vektorok megadott normáit!
1. $\mathbf{x} = (\sqrt{3} - \mathrm{i}, 6\mathrm{i}, 3)$, $\mathbf{y} = (0.1, -0.2, -0.2)$, $p = 1, 2, \infty$;
2. $(1, 2, 2)$, $(2, 3, 6)$, $(1, 4, 8)$, $(4, 4, 7)$, $p = 2$;
3. $(\mathrm{i}, 2, \sqrt{2} - \sqrt{2}\mathrm{i}, -4i)$, $p = 1, 2, \infty$;
4. $(3, 4, 5)$, $(11, 12, 13, 14)$, $p = 3$;

Megoldás. 1. $\|\mathbf{x}\|_1 = 11$, $\|\mathbf{x}\|_2 = 7$, $\|\mathbf{x}\|_\infty = 6$, $\|\mathbf{y}\|_1 = 0.5$, $\|\mathbf{y}\|_2 = 0.3$, $\|\mathbf{x}\|_\infty = 0.2$.

2. Ezek az úgynevezett Pitagorászi számnégyesekből képzett vektorok, amelyekben a koordináták négyzetösszege négyzetszám, így a 2-normájuk egész. A normák 3, 7, 9, 9.
3. 9, 5, 4;
4. 6, 20;

7. Számítsuk ki az alábbi mátrixok Frobenius-, 1-, 2- és ∞-normáját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. $\|\mathbf{A}\|_F = 5$, $\|\mathbf{A}\|_1 = 6$, $\|\mathbf{A}\|_2 = 5$, $\|\mathbf{A}\|_\infty = 6$.
$\|\mathbf{B}\|_F = 5$, $\|\mathbf{B}\|_1 = 7$, $\|\mathbf{B}\|_2 = 5$, $\|\mathbf{B}\|_\infty = 4$.
$\|\mathbf{C}\|_F = \sqrt{13}$, $\|\mathbf{C}\|_1 = 4$, $\|\mathbf{C}\|_2 = 3$, $\|\mathbf{C}\|_\infty = 4$.

8. Számítsuk ki az alábbi mátrixok Frobenius-, 1-, 2- és ∞-normáját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. $\|\mathbf{A}\|_F = 9$, $\|\mathbf{A}\|_1 = 8$, $\|\mathbf{A}\|_2 = 8$, $\|\mathbf{A}\|_\infty = 8$.
$\|\mathbf{B}\|_F = 3\sqrt{3}$, $\|\mathbf{B}\|_1 = 5$, $\|\mathbf{B}\|_2 = 3$, $\|\mathbf{B}\|_\infty = 5$.
$\|\mathbf{C}\|_F = 3\sqrt{3}$, $\|\mathbf{C}\|_1 = 5$, $\|\mathbf{C}\|_2 = 5$, $\|\mathbf{C}\|_\infty = 5$.

9. Igazoljuk, hogy tetszőleges mátrixnormára $\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|$,ahol $\rho(\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ spektrálsugara.

Megoldás. Ha λ egy tetszőleges sajátértéke $\mathbf{A}$-nak, és $\mathbf{x}$ a hozzá tartozó egyik sajátvektor, azaz $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, akkor

$$\mathbf{Axx}^* = \lambda\mathbf{xx}^* \rightsquigarrow \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{xx}^*\| \geq \|\mathbf{Axx}^*\| = |\lambda| \, \|\mathbf{xx}^*\| \,,$$

és mivel $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, így $\mathbf{xx}^* \neq \mathbf{O}$, azaz $\|\mathbf{xx}^*\| \neq 0$, vagyis leosztva vele $|\lambda| \leq \|\mathbf{A}\|$ adódik. Ez minden sajátértékre, így a spektrálsugárra is igaz.

10. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{A}$ normális ($\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{AA}^*$), akkor $\|\mathbf{A}\|_2 = \rho(\mathbf{A})$.

Megoldás. Ha $\mathbf{A}$ normális, akkor unitéren hasonló egy diagonális $\mathbf{D}$ mátrixhoz, azaz $\mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^*$ valamely unitér $\mathbf{Q}$ mátrixszal. Ekkor $\mathbf{A}^*\mathbf{A} \sim \mathbf{D}^*\mathbf{D}$ is fönnáll, ugyanis $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = (\mathbf{QDQ}^*)^*(\mathbf{QDQ}^*) = \mathbf{QD}^*\mathbf{DQ}^*$, tehát $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}^*\mathbf{D}$ sajátértékei megegyeznek. Másrészt $\mathbf{D}^*\mathbf{D}$ minden sajátértéke $|\lambda|^2$ alakú, ahol λ az $\mathbf{A}$ valamely sajátértéke. Összegezve: mivel $\|\mathbf{A}\|_2 = \sigma_1$, azaz az $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ legnagyobb sajátértékének gyöke, ami viszont megegyezik $\mathbf{A}$ legnagyobb sajátértékével, azaz a $\rho(\mathbf{A})$ spektrálsugárral.

11. Hozzuk ortogonális hasonlósági transzformációval felső háromszögalakra az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & -3 \\ 3 & 17 & -6 \\ -12 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixot!

Megoldás. A karakterisztikus polinom $-x^3 + 28x^2 - 245x + 686 = (7-x)^2(14-x)$. A 7 kétszeres sajátérték, a sajátaltér 1-dimenziós, sajátvektor $\mathbf{x}_1 = (2,3,6)$, a 14-hez tartozó sajátvektor $\mathbf{x}_2 = (9,17,13)$, diagonalizálni nem lehet.

Az első sajátvektorhoz választunk egy ortonormált bázist, abból képezzük az $\mathbf{U}_1$ és az $\mathbf{U}_1^T\mathbf{AU}_1$ mátrixot:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{U}_1 = [\mathbf{x}_1|\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_3] = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 3 & -2 & -6 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}_1^T\mathbf{AU}_1 = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -21 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \ \ldots \ * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbf{A}_1 \\ 0 & \end{array}\right]$$

tehát

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$$

A 7 sajátértékhez tartozó sajátvektor $(0,1)$, rá merőleges a $(1,0)$. Így

$$\mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_2 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{U}_2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Innen

$$\mathbf{U} = \mathbf{V}_1\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 2/7 & 3/7 & -6/7 \\ 3/7 & -6/7 & -2/7 \\ 6/7 & 2/7 & 3/7 \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 7 & -21 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

12. A Schur-féle háromszögalakra hozási tétellel bizonyítsuk Cayley-Hamilton tételét, mely szerint ha $p(x)$ az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja, akkor $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

Megoldás. Az $\mathbf{U}^H\mathbf{A}\mathbf{U}$ felső háromszög alakú, melynek átlójában a sajátértékek vannak. Az algoritmusban a sajátértékek sorrendje tetszőleges, így elérhető, hogy az azonos sajátértékek egymás mellett szerepeljenek. Legyen λ_i multiplicitása m_i. A

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_i & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{bmatrix}_{m_i \times m_i}$$

háromszögmátrixra $(\mathbf{H}_i - \lambda_i\mathbf{I})^{m_i} = \mathbf{O}$. Ezt kihasználva a

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}^H\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & * & \dots & * \\ 0 & \mathbf{H}_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{H}_k \end{bmatrix}$$

jelöléssel kapjuk, hogy $(\mathbf{H} - \lambda_1\mathbf{I})^{m_1}(\mathbf{H} - \lambda_2\mathbf{I})^{m_2}\dots(\mathbf{H} - \lambda_k\mathbf{I})^{m_k} = \mathbf{O}$. Mivel a karakterisztikus polinom $p(x) = (x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_1)^{m_2}\dots(x - \lambda_k)^{m_k} = 0$, ezért $\mathbf{U}^H p(\mathbf{A})\mathbf{U} = \mathbf{U}^H(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})^{m_1}(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I})^{m_2}\dots(\mathbf{A} - \lambda_k\mathbf{I})^{m_k}\mathbf{U} = (\mathbf{H} - \lambda_1\mathbf{I})^{m_1}(\mathbf{H} - \lambda_2\mathbf{I})^{m_2}\dots(\mathbf{H} - \lambda_k\mathbf{I})^{m_k} = \mathbf{O}$.

HF. Legyen $n > 1$ és legyen az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix főátlójában minden elem a, a többi elem $b \neq 0$. Mutassuk meg, hogy az $a - b$ sajátérték $(n-1)$-szeres, az $a + (n-1)b$ pedig 1-szeres geometriai multiplicitású. Diagonalizáljuk $\mathbf{A}$-t!

HF. Írjuk fel az $\mathbf{A}$ mátrixot $\mathbf{QUQ}^T$ alakba, ahol $\mathbf{Q}$ ortogonális, $\mathbf{U}$ felső háromszögmátrix. (Schur-felbontás, ld. a 11. feladatot)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 14 & -9 \\ 0 & 16 & -10 \end{bmatrix}$$