Felsőbb Matematika (2011-12 ősz) 7. gyakorlat

1. Legyen d_i az $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^i$ nullterének dimenziója, $i=1,2,\ldots,s$, ahol s a maximális kitevő. Képezzük a $d'_i=d_i-d_{i-1}$ és abból a $d''_i=d'_i-d'_{i+1}$ (legyen $d_0=d'_{s+1}=0$). Mi a d' és a d'' sorozat elemeinek jelentése?

Megoldás. $d'_i=d_i-d_{i-1}$ a legalább i-hosszú Jordan-láncok száma, $d''_i=d'_i-d'_{i+1}$ a pontosan i-hosszú Jordan-láncok száma.

2. Bizonyítsuk be, hogy minden mátrix hasonló a transzponáltjához.

Megoldás. *1. bizonyítás:* Mivel az $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^i$ és az $(\mathbf{A}'-\lambda\mathbf{I})^i=((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^i)'$ mátrixok nullterének dimenziói megegyeznek, ezért $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}'$ Jordan-normálalakjai megegyeznek, tehát a mátrixok hasonlóak.

2. bizonyítás: Egy Jordan-blokk transzponáltját kapjuk, ha balról és jobbról is szorozzuk azzal az S mátrixszal, melynek mellékátlójában egyesek, egyebütt nullák vannak. Mivel $S^{-1}=S$, ezért minden Jordan-blokk hasonló a transzponáltjához. Ebből következik, hogy minden Jordan-féle normálalakú mátrix hasonló a transzponáltjához, amiből következik az állítás.

3. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-féle normálalakját, $\mathbf{J}$-t, és az $\mathbf{A}^{100}$, $e^{\mathbf{J}}$, $e^{3\mathbf{A}}$ mátixokat.

$$\textit{a)}\ \begin{bmatrix}2&1&1\\-1&0&-1\\-1&-1&0\end{bmatrix}\ \textit{b)}\ \begin{bmatrix}1&1&\ldots&1\\1&1&\ldots&1\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\ldots&1\end{bmatrix}\ \textit{c)}\ \begin{bmatrix}2&3&9\\0&2&0\\0&0&-5\end{bmatrix}\ \textit{d)}\ \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

Megoldás. *a)* A mátrix sajátértékeit és sajátvektorai: az 1 sajátértékhez tartozik a $(-1,1,0)$ és a $(-1,0,1)$, míg a 0 sajátértékhez a $(-1,1,1)$ sajátvektor. E vektorok lineárisan függetlenek, a belőlük alkotott bázisban a mátrix diagonális alakot ölt, melynek főátlójában a sajátértékek vannak. Az eredeti és a diagonális mátrix hasonló, a hasonlóság $\mathbf{C}$ mátrixa a sajátvektorokból áll. Ez és ennek inverze:

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{C}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&0&-1\\-1&-1&0\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

Így tehát

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\-1&0&-1\\-1&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&-1\\-1&-1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

Tudjuk, hogy ha az f hatványsor konvergenciatartományának belsejében tartalmazza az $\mathbf{A}$ mátrix spektrumát, és $\mathbf{A}=\mathbf{CJC}^{-1}$, ahol $\mathbf{J}$ az $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakja, akkor $f(\mathbf{A})=\mathbf{C}f(\mathbf{J})\mathbf{C}^{-1}$. Itt $f(\mathbf{J})$ úgy kapható meg, hogy $\mathbf{J}$ minden Jordan-blokkjára alkalmazzuk az f függvényt. Mivel e feladatban minden Jordan-blokk 1×1-es, hisz a normálalak diagonális, ezért csak a főátló elemeire kell alkalmazni f-et. Eszerint

$$\begin{bmatrix}2&1&1\\-1&0&-1\\-1&-1&0\end{bmatrix}^{100}=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1^{100}&0&0\\0&1^{100}&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&-1\\-1&-1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&1\\-1&0&-1\\-1&-1&0\end{bmatrix}.$$

Az eredmény meglepő, de ha csak $\mathbf{A}^2$-et kiszámoltuk volna, láthattuk volna, hogy $\mathbf{A}^n=\mathbf{A}$ minden pozitív egész n-re. Bár ezt az eredményt az $e^{3\mathbf{A}}$ kiszámításánál is fölhasználhatnánk, kövessük a fent vázolt utat:

$$e^{\mathbf{J}}=\begin{bmatrix}e^1&0&0\\0&e^1&0\\0&0&e^0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e&0&0\\0&e&0\\0&0&1\end{bmatrix},\qquad e^{3\mathbf{J}}=\begin{bmatrix}e^3&0&0\\0&e^3&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

és az utóbbi mátrixot felhasználva

$$e^{3\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}e^{3\mathbf{J}}\begin{bmatrix}-1&0&-1\\-1&-1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^3-1&e^3-1&e^3-1\\1-e^3&1&1-e^3\\1-e^3&1-e^3&1\end{bmatrix}.$$

b) Először meghatározzuk a sajátértékeket a hagyományos módon, azaz a karakterisztikus polinommal (az első sort levonjuk a többi sorból, majd az összes oszlopot hozzáadjuk az első oszlophoz):

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&1&\ldots&1\\1&1-\lambda&\ldots&1\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\ldots&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1&\ldots&1\\ \lambda&-\lambda&0&\ldots&0\\ \lambda&0&-\lambda&\ldots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \lambda&0&0&\ldots&-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}n-\lambda&1&1&\ldots&1\\0&-\lambda&0&\ldots&0\\0&0&-\lambda&\ldots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\ldots&-\lambda\end{vmatrix}$$

A karakterisztikus polinom 1 főegyütthatóval felírva: $(n-\lambda)\lambda^{n-1}$, tehát az n egyszeres, a 0 $(n-1)$-szeres sajátérték.

A csupa 1-esből álló $n \times n$-es $\mathbf{U}$ mátrix egyik sajátvektora a csupa 1-esből álló vektor, hisz $\mathbf{U} \cdot (1,1,\dots,1) = (n,n,\dots,n)$, és a hozzá tartozó sajátérték n. Másrészt $\mathbf{J}$ minden vektort $(k,k,\dots,k)$ alakú vektorba visz, azaz a képtér 1-dimenziós, így a magtér $(n-1)$-dimenziós. Eszerint a 0 sajátértékhez tartozó sajátaltér $(n-1)$-dimenziós, így kiválasztható a sajátvektorok közül egy ortonormált rendszer. A sajátvektorokból, mint oszlopokból képzett mátrix legyen $\mathbf{C}$, ennek első oszlopa legyen az egységnyi $(\frac{1}{\sqrt{n}},\dots,\frac{1}{\sqrt{n}})$. Mivel $\mathbf{C}$ ortogonális, ezért inverze $\mathbf{C}^T$. A normálalak egyet kivéve minden eleme 0, ezért a $\mathbf{C}$ mátrixnak csak egyetlen sora befolyásolja az eredményt. Tehát

$$\mathbf{U}^{100} = \mathbf{C}\mathbf{J}^{100}\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & ? & \dots ? \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & ? & \dots ? \\ \vdots \frac{1}{\sqrt{n}} & ? & \dots ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n^{100} & 0 & \dots 0 \\ 0 & 0 & \dots 0 \\ \vdots 0 & 0 & \dots 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \dots \frac{1}{\sqrt{n}} \\ ? & ? & \dots ? \\ \vdots ? & ? & \dots ? \end{bmatrix} = n^{99}\mathbf{U}$$

Hasonlóképp általában $\mathbf{U}^m = n^{m-1}\mathbf{U}$. Az $e^{\mathbf{J}}$ bal felső sarkában e^n áll, főátlójában 1-esek, egyebütt 0. Az $e^{3\mathbf{J}}$ hasonló, csak ott a sarokban e^{3n} áll. Ebből az $e^{3\mathbf{A}}$ már az előzőkhöz hasonlóan kapható meg, ha $e^{3\mathbf{J}}$-t felbontjuk egy $K+I$ összegre.

c) E mátrix háromszög alakú, így főátlójából leolvasható a karakterisztikus polinom: $(\lambda-2)^2(\lambda+5)$. A 2-höz tartozó sajátvektor $(1,0,0)$, a -5-höz tartozó $(-9/7,0,1)$, ezért a Jordan-mátrix alakja $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

Keresünk egy harmadik bázisvektort, jelölje (x,y,z). Ekkor a $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & x & -9/7 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & z & 1 \end{bmatrix}$ mátrixra igaz, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{J}\mathbf{B}^{-1}$, azaz $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{J}$. Ebből a $\mathbf{B}$-ben lévő ismeretlenekre megoldható egyenletrendszert kapunk, egy megoldás: $x = z = 0$, $y = 1/3$, ennek inverze $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9/7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Mivel $(x^{100})' = 100x^{99}$, $(e^x)' = e^x$, $(e^{3x})' = 3e^{3x}$, ezért

$$\mathbf{J}^{100} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 100 \cdot 2^{99} & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{bmatrix}, \quad e^{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-5} \end{bmatrix}, \quad e^{3\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} e^6 & 3e^6 & 0 \\ 0 & e^6 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-15} \end{bmatrix}.$$

Innen az $\mathbf{A}^{100} = \mathbf{B}\mathbf{J}^{100}\mathbf{B}^{-1}$ és $e^{3\mathbf{A}} = \mathbf{B}e^{3\mathbf{J}}\mathbf{B}^{-1}$ felhasználásával

$$\mathbf{A}^{100} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 100 \cdot 3 \cdot 2^{99} & \frac{9}{7}(2^{100} - 5^{100}) \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{bmatrix}, \quad e^{3\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^6 & 9e^6 & \frac{9}{7}(e^6 - e^{-15}) \\ 0 & e^6 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-15} \end{bmatrix}.$$

d) Először is $\mathbf{A}^{100}$ könnyen számolható, hisz néhány hatványozás után látszik, hogy $\mathbf{A}^3 = I$, így $\mathbf{A}^{99} = I$, tehát $\mathbf{A}^{100} = \mathbf{A}$. De a további kérdésekhez nem kerülhetjük el a karakterisztikus egyenlet meghatározását, ami $-\lambda^3 + 1 = 0$, azaz $\lambda^3 = 1$, aminek a harmadik egységgyökök a megoldásai, azaz az $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ jelöléssel a három sajátérték: $\varepsilon^0 = 1$, ε és $\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. A sajátértékekhez tartozó sajátvektorok, az áttérés $\mathbf{C}$ mátrixa és a $\mathbf{C}^{-1}$ mátrix:

$$1: \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon: \begin{bmatrix} \varepsilon^2 \\ \varepsilon \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon^2: \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon^2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{így } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ és } \mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{bmatrix}.$$

Itt a számolásokban kihasználhatjuk, hogy $\varepsilon^3 = 1$ és $\varepsilon^2 = -\varepsilon - 1$. Mivel $\mathbf{J}$ diagonális mátrix, konkrétan $\mathbf{J} = \operatorname{diag}(1,\varepsilon,\varepsilon^2)$, így azonnal adódik, hogy $\mathbf{J}^{100} = \operatorname{diag}(1,\varepsilon,\varepsilon^2)$, hisz $\varepsilon^{100} = \varepsilon$. Innen is kijön, csak bonyolultan, hogy $\mathbf{A}^{100} = \mathbf{C}\mathbf{J}^{100}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{A}$. Hasonlóképp $e^{\mathbf{J}} = \operatorname{diag}(e, e^{\varepsilon}, e^{\varepsilon^2})$ és $e^{3\mathbf{J}} = \operatorname{diag}(e^3, e^{3\varepsilon}, e^{3\varepsilon^2}) = \operatorname{diag}(e^3, e^{-3/2}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2} + ie^{-3/2}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}, e^{-3/2}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2} - ie^{-3/2}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2})$. Innen $e^{3\mathbf{A}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$, ahol $a = e^3 + 2e^{-3/2}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $b = e^3 - e^{-3/2}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}e^{-3/2}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $c = e^3 - e^{-3/2}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}e^{-3/2}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

4. Mutassuk meg, hogy r-reguláris gráf $\mathbf{A}$ adjacenciamátrixának r egy sajátértéke, és minden más λ sajátértékre $|\lambda| \le r$, ha pedig valamilyen s-re $\mathbf{A}^s > \mathbf{O}$, akkor $|\lambda| < r$.

Megoldás. Az $\mathbf{1}$ nyilván sajátvektor, és r a hozzá tartozó sajátérték, hisz $\mathbf{A}$ minden sorában r darab 1-es van. Mivel $\mathbf{A}$ főátlójában nullák szerepelnek, a Gerschgorin körök mindegyike 0-közepű r-sugarú, tehát $|\lambda| \le r$ minden λ sajátértékre. Innen $|\lambda|^s \le r^s$, de $\mathbf{A}^s$ pozitív, így r^s az egyetlen sajátérték a spektrálkörön, tehát ha $\lambda \ne r$, akkor $|\lambda| < r$.

5. Mutassuk meg, hogy ha egy páros gráf adjacenciamátrixának λ sajátértéke, akkor $-\lambda$ is.

Megoldás. Az adjacenciamátrix alakja $\left[\begin{smallmatrix}\mathbf{O} & \mathbf{X}\\ \mathbf{X}^T & \mathbf{O}\end{smallmatrix}\right]$, így ha $[\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2]$ a λ-hoz tartozik, akkor $[-\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2]$ a $-\lambda$-hoz.

6. Ellenőrizzük Perron tételét az alábbi mátrixra:

$$\begin{bmatrix}6 & 1 & 1\\ 5 & 6 & 1\\ 6 & 4 & 4\end{bmatrix}$$

Megoldás. Sajátértékek: 10, 3, 3, jobb Perron-vektor: $(5/25, 9/25, 11/25)$, bal Perron-vektor: $(4/7, 2/7, 1/7)$.

7. Mutassuk meg, hogy ha az $\mathbf{A} > \mathbf{O}$ mátrix minden oszlopában c az elemek összege, akkor c a spektrálsugár.

Megoldás. Az $\mathbf{A}^T$-nak az $\mathbf{1}$ vektor sajátvektora, c sajátértékkel. Mivel $\mathbf{1} > \mathbf{0}$, ezért ez csak a bal Perron-vektor n-szerese lehet, és akkor c a hozzá tartozó sajátérték, így c a spektrálsugár.

8. Határozzuk meg, hogy az alábbi mátrixok irreducibilisek vagy reducibilisek! A reducibilisekhez határozzuk meg a permutációs mátrixot is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

Megoldás. Az $\mathbf{A}$ reducibilis, a $\mathbf{B}$ irreducibilis, a permutációs mátrix és a szimmetrikusan permutált $\mathbf{A}$ mátrix:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \left[\begin{array}{ccc|cccc}0&0&1&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\end{array}\right]$$

9. Fisher (statisztikus, populációgenetikus) növényeket vizsgált különböző körülmények között: v-féle növényt b tulajdonságra (a továbbiakban blokkoknak nevezzük). Nincs mód arra, hogy minden növénykombinációt kipróbáljunk, ezért a következő feltételeket tesszük.

1. minden blokkban k különböző növény van ($k < v$);
2. minden növény pontosan r blokkban szerepel;
3. bármely két különböző növény azonos λ számú blokkban szerepel együtt;

Igazoljuk a Fisher-egyenlőtlenséget: $v \le b$.

Megoldás. Az incidenciamátrix legyen $\mathbf{A}_{v\times b}$, ahol $a_{ij} = 1$, ha az i-edik növény a j-edik blokkban van, egyébként $a_{ij} = 0$. A $v \times v$-es $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$ mátrix főátlójában r, egyebütt λ áll. Mivel $r \ne \lambda$, így $\det(\mathbf{B}) \ne 0$, ezért $\mathrm{r}(\mathbf{B}) = v$, és $\mathrm{r}(\mathbf{B}) \le \mathrm{r}(\mathbf{A}) \le b$, tehát $v \le b$.

10. Mutassuk meg, hogy az n-lakosú Páratlanvárosban, ahol minden klub páratlan létszámú, de bármely két klubnak páros sok a közös tagja, legföljebb n klub van.

Megoldás. $\mathbb{F}_2$ fölött a klubok karakterisztikus 0-1-vektorai lineárisan függetlenek, ugyanis páronként merőlegesek egymásra és egységvektorok, így bármely

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_m\mathbf{x}_m = \mathbf{0}$$

lineáris kombinációjuk $\mathbf{x}_j$-vel beszorozva azt kapjuk, hogy $c_j\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_j = 0$, amiből $\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_j = 1$ miatt következik, hogy $c_j = 0$. Független vektorból viszont legföljebb n választható, így a klubok száma legföljebb n.