

1. Ábrázoljuk az  $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 20y + 5 = 0$  egyenletű másodrendű görbét! Határozzuk meg centrumát, és tengelyeinek egyenletét!

2. Melyek normálisak és melyek pozitív definiték az alábbi mátrixok közül?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Mutassuk meg, hogy ha  $\mathbf{A}$  szimmetrikus, akkor az alábbi állítások ekvivalensek:

1.  $\mathbf{A}$  pozitív definit;
2. van olyan szimmetrikus, pozitív definit  $\mathbf{X}$  mátrix, hogy  $\mathbf{A} = \mathbf{X}^2$ ;
3. van olyan invertálható  $\mathbf{Y}$  mátrix, hogy  $\mathbf{A} = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y}$ .

4. Az  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  vektor korrigált szórásnégyzetén az  $s^*$  számot értjük, ahol

$$s^* = \frac{1}{n-1} ((x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2), \text{ és } \bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n).$$

Írjuk fel e kvadratikus alak mátrixát, és döntsük el, hogy pozitív definit-e.

5. Mutassuk meg a karakterisztikus egyenlet felírása nélkül, hogy az alábbi mátrixnak van legalább két valós sajátértéke:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

6. Mutassuk meg, hogy  $r$ -reguláris gráf  $\mathbf{A}$  adjacenciamátrixának  $r$  egy sajátértéke, és minden más  $\lambda$  sajátértékre  $|\lambda| \leq r$ .

7. Mutassuk meg, hogy ha egy páros gráf adjacenciamátrixának  $\lambda$  sajátértéke, akkor  $-\lambda$  is.

8. Fisher (statisztikus, populációgenetikus) növényeket vizsgált különböző körülmények között:  $v$ -féle növényt  $b$  tulajdonságra (a továbbiakban blokkoknak nevezzük). Nincs mód arra, hogy minden növénykombinációt kipróbáljunk, ezért a következő feltételeket tesszük.

1. minden blokkban  $k$  különböző növény van ( $k < v$ );
2. minden növény pontosan  $r$  blokkban szerepel;
3. bármely két különböző növény azonos  $\lambda$  számú blokkban szerepel együtt;

Igazoljuk a Fisher-egyenlőtlenséget:  $v \leq b$ .

**HF.** Legyen  $n > 1$  és legyen az  $n \times n$ -es  $\mathbf{A}$  mátrix főátlójában minden elem  $a$ , a többi elem  $b \neq 0$ . Mutassuk meg, hogy az  $a - b$  sajátérték  $(n - 1)$ -szeres, az  $a + (n - 1)b$  pedig 1-szeres geometriai multiplicitású. Diagonalizáljuk  $\mathbf{A}$ -t!

**HF.** Diagonalizáljuk ortonormált bázisban az alábbi szimmetrikus mátrixokat, majd ez alapján írjuk föl spektrálfelbontásukat és redukált szinguláris érték szerinti felbontásukat!

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$