

1. Számítsuk ki az alábbi vektorok megadott normáit!

1. $\mathbf{x} = (\sqrt{3} - i, 6i, 3)$, $\mathbf{y} = (0.1, -0.2, -0.2)$, $p = 1, 2, \infty$;
2. $(1, 2, 2)$, $(2, 3, 6)$, $(1, 4, 8)$, $(4, 4, 7)$, $p = 2$;
3. $(i, 2, \sqrt{2} - \sqrt{2}i, -4i)$, $p = 1, 2, \infty$;
4. $(3, 4, 5)$, $(11, 12, 13, 14)$, $p = 3$;

2. Számítsuk ki az alábbi mátrixok Frobenius-, 1-, 2- és ∞ -normáját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Számítsuk ki az alábbi mátrixok Frobenius-, 1-, 2- és ∞ -normáját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Igazoljuk, hogy tetszőleges mátrixnormára $\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|$, ahol $\rho(\mathbf{A})$ az \mathbf{A} spektrálsugara.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha \mathbf{A} normális ($\mathbf{A}^* \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^*$), akkor $\|\mathbf{A}\|_2 = \rho(\mathbf{A})$.

6. Hozzuk ortogonális hasonlósági transzformációval felső háromszög alakra az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & -3 \\ 3 & 17 & -6 \\ -12 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixot!

7. Írjuk fel az \mathbf{A} mátrixot $\mathbf{Q} \mathbf{U} \mathbf{Q}^T$ alakba, ahol \mathbf{Q} ortogonális, \mathbf{U} felső háromszögmátrix.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 14 & -9 \\ 0 & 16 & -10 \end{bmatrix}$$

8. Legyen d_i az $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^i$ nullterének dimenziója, $i = 1, 2, \dots, s$, ahol s a maximális kitevő. Képezzük a $d'_i = d_i - d_{i-1}$ és abból a $d''_i = d'_i - d'_{i+1}$ (legyen $d_0 = d'_{s+1} = 0$). Mi a d' és a d'' sorozat elemeinek jelentése?

9. Bizonyítsuk be, hogy minden mátrix hasonló a transzponáltjához.

10. Határozzuk meg az \mathbf{A} mátrix Jordan-féle normálalakját, \mathbf{J} -t, és az \mathbf{A}^{100} , $e^{\mathbf{J}}$, $e^{3\mathbf{A}}$ mátrixokat.

$$a) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$c) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad d) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

11. Ellenőrizzük Perron tételét az alábbi mátrixra:

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

12. Mutassuk meg, hogy ha az $\mathbf{A} > \mathbf{O}$ mátrix minden oszlopában c az elemek összege, akkor c a spektrálsugár.

13. Határozzuk meg, hogy az alábbi mátrixok irreducibilisek vagy reducibilisek! A reducibilisekhez határozzuk meg a permutációs mátrixot is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

HF. Melyik mátrix primitív az alábbiak közül?

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 25 \\ 31 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 43 & 0 & 0 \\ 0 & 52 & 0 & 54 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 34 & 35 \\ 41 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 53 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

HF. Egy 10×10 -es \mathbf{A} mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Az $\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 8, 6, 5, 4, 4. Az $\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 7, 6, 6. Írjuk fel \mathbf{A} Jordan-alakját!