

2011 Felsőbb matematika, vizsgatematika

► jelentése: bizonyítás is.

VI.1

Vektorok: vektorok lineáris kombinációja, lineáris függetlensége, vektorműveletek, távolság, szög, Pithagorász-tétel, Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenség, háromszögegyenlőtlenség, vektor vetítése egy másik egyenesére. Koordinátázás, számtestből képzett rendezett n -esek tere, skaláris szorzás nemstandard bázisban. Gauss-Jordan-kiküszöbölés, elemi sorműveletek hatása a sor- és oszloptérre, altér dimenziója, vektorrendszer/mátrix rangja, egyenletrendszer megoldhatóságának mátrixrangos feltétele, a homogén és inhomogén egyenletrendszerek megoldásai, és azok terei. Nulltér, ► a nulltér altér; bázistétel. Mátrixműveletek, blokkmátrixok, báziscsere, az áttérés mátrixa, LU-felbontás, egyenletrendszer megoldása LU-felbontással. Lineáris leképezések, ► minden (végesdimenziós terek közti) lineáris leképezéshez létezik mátrix, mely azt a leképezést generálja; Forgatás mátrixa. Altérre való merőleges vetítés mátrixa, ► ortogonális vektorok függetlensége; ► Gram-Schmidt ortogonalizáció; QR-felbontás, ► a QR-felbontás létezése; \mathbf{R} kiszámítása \mathbf{Q} és \mathbf{A} ismeretében. Tükrözés mátrixa. QR-felbontás tükrözéssel és forgatással (Householder-tükrözés, Givens-forgatás). \mathbf{A} és $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ nulltere megegyezik. Vektor egyértelmű előállíthatósága egy \mathcal{A} - és egy \mathcal{A}^\perp -beli vektor összegeként, ► $\text{rang}(\mathbf{A}) + \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = n$, ► $\mathcal{S}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$. ► megoldható egyenletrendszer egyértelmű megoldása a sortérben és e megoldás abszolút értékének minimalitása; ellentmondásos egyenletrendszer optimális megoldása a normálegyenletből. Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér, sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása, ► különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineáris függetlensége, mátrixok hasonlósága, ► hasonló mátrixok karakterisztikus polinomjai megegyeznek; megegyezik spektrumuk, rangjuk, nyomuk, determinánsuk, nullitásuk. Az algebrai és geometriai multiplicitás viszonya, ► a diagonalizálhatósággal ekvivalens állítások. Komplex mátrixok, adjungált, skaláris szorzás komplex vektortérben, önadjungált, unitér, ferdén önadjungált, normális mátrixok, önadjungált és unitér mátrix determinánsa; mátrix unitér/ortogonális diagonalizálhatósága, Schur-felbontás, ► \mathbf{A} pontosan akkor diagonalizálható unitéren, ha normális; pontosan akkor diagonalizálható ortogonálisan, ha szimmetrikus; spektrálfelbontás, Jordan-normálalak, általánosított sajátvektor, Jordan-lánc, Jordan-bázis konstrukciója. Kvadratikus alak, főtengetlytétel, definit és indefinit mátrixok, definitég megállapítása a sajátértékekből és a főminorokból. Szinguláris értékek, szinguláris értékek szerinti felbontás (SVD) és annak redukált alakja, ► SVD létezése; SVD és a négy altér kapcsolata, polárfelbontás, általánosított inverz, ellentmondásos egyenletrendszer megoldása általánosított inverzzel, Gerschgorin-körök, ► Gerschgorin-tétele, Perron-tétel pozitív mátrixokra, Collatz–Wielandt-formula, irreducibilis és primitív mátrixok, Perron–Frobenius-tétel. Test, vektortér, euklideszi tér, norma (p -norma), normák ekvivalenciája, mátrixnormák (Frobenius, indukált, 1-norma, ∞ -norma). Duplán sztochasztikus mátrixok, Frobenius-Kőnig-tétel, Birkhoff-tétel.