

Minden feladat 1 pontot ér, kivéve ha meg van adva a pontszám. Az összesen szerezhető 25 pontból legalább 10 pontot el kell érni. A bekeretezett részbe kell a választ beírni. Csak annyit írjunk be, amennyit a feladat kér! Részletszámításokat sehol nem kérünk. A vizsgán segédeszköz nem használható.

1. Írjuk fel a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenséget!

--

2. Mi az a tulajdonság, mely elemi sorműveletek közben – egy tanult tétel szerint – a sorvektorokkal kapcsolatban nem változik és mi az a másik, mely az oszlopvektorokkal kapcsolatban nem változik?

--

3. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy mátrix (a) diagonalizálható (b) unitéren diagonalizálható, (c) ortogonálisan diagonalizálható legyen? (1.5 pont)

--

4. A valós $m \times n$ -es \mathbf{A} mátrix szinguláris érték szerinti $\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ felbontásának ismeretében írjuk föl az \mathbb{R}^n és az \mathbb{R}^m egy bázisát és e bázis elemei közt az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ leképezés hatását!

--

5. \mathbb{R}^4 egy 2-dimenziós alterének bázisvektorai az $(1, -1, 1, -1)$ és a $(8, 6, 2, 0)$ vektorok. A Gram–Schmidt-eljárással adjuk meg az altér egy ortonormált bázisát.

--

6. Az előző feladat eredményét fölhasználva írjuk fel

az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -1 & 6 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix QR-felbontását!

--

7. Mit tudunk egy (a) önadjungált és egy (b) unitér mátrix determinánsáról?

--

8. Mit értünk egy vektortér dimenzióján?

--

9. Írjuk fel a $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ mátrix redukált szinguláris felbontását! (1.5 pont)

--

10. Írjuk fel a $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix pszeudoinverzét!

--

11. (a) Adjunk meg olyan egyenletet, mely az ellentmondásos $\begin{cases} 2x + 4y = 12 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ egyenletrendszerhez tartozó normálegyenletrendszerrel együtt egy egyértelműen megoldható egyenletrendszert ad, melynek az optimális megoldás a megoldása. (b) Mi az optimális megoldás? (2 pont)

12. Irreducibilis vagy reducibilis az alábbi mátrix?

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Rajzzal igazolható!})$$

13. Határozzuk meg a $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix 1-, 2-, ∞ - és Frobenius-normáját! (2 pont)

14. Mit nevezünk Perron-vektornak?

15. Milyen tételt tudunk hasonló mátrixok karakterisztikus polinomjáról? Bizonyítsuk is be! (3 pont)

16. Mutassuk meg, hogy unitér mátrixok szorzata unitér! (2 pont)

17. Röviden igazoljuk, hogy ha \mathbf{A} szimmetrikus és pozitív szemidefinit, akkor sajátértékei és szinguláris értékei megegyeznek. (3 pont)