Felsőbb matematika vizsga – 2013-01-08

Név ______________________________ **Neptun** __________

Minden feladat 1 pontot ér, kivéve ha meg van adva a pontszám. Az összesen szerezhető 25 pontból legalább 10 pontot el kell érni. A bekeretezett részbe kell a választ beírni. Csak annyit írjunk be, amennyit a feladat kér! Részletszámításokat sehol nem kérünk. A vizsgán semmilyen segédeszköz nem használható.

1. Mit értünk egy valós és mit egy komplex négyzetes mátrix Schur-felbontásán és mikor létezik? *(2 pont)*

$\mathbf{A} = \mathbf{QTQ}^T$, valós $\mathbf{A}$ esetén $\mathbf{Q}$ ortogonális, $\mathbf{T}$ valós felső háromszög, komplex $\mathbf{A}$ esetén $\mathbf{Q}$ unitér, $\mathbf{T}$ komplex felső háromszög. Minden négyzetes komplex mátrixnak létezik Schur-felbontása, és pontosan azoknak a valós mátrixoknak létezik, melyeknek minden sajátértéke valós.

2. Írjuk fel az $e^{\mathbf{J}}$ mátrixot, ha

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$e^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Egy 10×10-es $\mathbf{A}$ mátrixnak λ 10-szeres algebrai multiplicitású sajátértéke. $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 5, 2, 1, 0. Mennyi a Jordan-láncok száma? Milyen hosszú a leghosszabb lánc? Rajzoljuk le a Jordan-láncokat! *(2 pont)*

A Jordan-láncok száma $n - \mathrm{r}(\mathbf{A}) = 10 - 5 = 5$. A leghosszabb lánc hossza 4 ($\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ legkisebb $\mathbf{O}$-t adó hatványa).

$$\begin{array}{l} \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet \\ \bullet \longleftarrow \bullet \\ \bullet \longleftarrow \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$$

4. Írjuk fel annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, amely az xy-síkot $\pi/3$ szöggel elforgatja és az $(1, 1, 1)$ vektort pedig helyben hagyja. *(2 pont)*

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Határozzuk meg Householder-tükrözésekkel az alábbi mátrix QR felbontását: *(2 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Írjuk föl az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix szinguláris érték szerinti fölbontását!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \right)^T$$

7. Irreducibilis vagy reducibilis az alábbi mátrix?

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ (Rajzzal igazolható!)

reducibilis, a $\{3, 5\}$ halmazból nem indul él.

8. Melyik pozitív szemidefinit, negatív szemidefinit és melyik indefinit az alábbi mátrixok közül?

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}. \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2^0 & 2^1 \\ 2^2 & 2^3 \end{bmatrix},$

$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ indefinit, $\mathbf{C}$ pozitív szemidefinit.

9. Ismerjük a szimmetrikus **A** mátrix sajátértékeit (4, −2, −2, 0), és a hozzájuk tartozó páronként ortogonális sajátvektorokból alkotott **Q** mátrixot. Ezek felhasználásával írjuk föl **A** szinguláris fölbontását! *(2 pont)*

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

pl. $\mathbf{Q}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}\mathbf{Q}$

10. Milyen tételt tudunk hasonló mátrixok karakterisztikus polinomjáról? Bizonyítsuk is be! *(3 pont)*

Hasonló mátrixok karakterisztikus polinomja megegyezik.
ld. jegyzet

11. Igazoljuk, hogy ha **A** unitéren diagonalizálható, akkor normális. *(3 pont)*

ld. jegyzet

12. Igazoljuk Gerschgorin tételét, azaz hogy minden sajátérték benne van a mátrix valamelyik sorához tartozó Gerschgorin-körben! *(4 pont)*

ld. jegyzet