

1. Legyen  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$  és  $\mathcal{C} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$  két bázis  $\mathbb{R}^3$ -ben. Írjuk fel a  $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}$ , a  $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{C}$  és a  $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}$  áttérések mátrixát! Írjuk fel a  $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (1, 1, 1)$  vektor  $\mathcal{C}$  bázisbeli koordinátás alakját! (4 pont)

2. Ortogonálisan diagonalizáljuk az  $\mathbf{A}$  mátrixot, azaz határozzuk meg azt a  $\mathbf{Q}$  ortogonális mátrixot és  $\mathbf{\Lambda}$  diagonális mátrixot, melyekkel  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^T$ , és írjuk fel  $\mathbf{A}$  redukált szinguláris felbontását! (4 pont)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Írjuk fel annak a  $10 \times 10$ -es mátrixnak a Jordan-féle normálalakját, melynek egyetlen sajátértéke  $\lambda$ , és amelyre  $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k$  rangja  $k = 1, 2, 3, 4$  esetén rendre 5, 2, 1, 0. (3 pont)

4. Számítsuk ki az  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  mátrix pszeudoinverzét! (2 pont)

5. Melyek pozitív definiték az alábbi mátrixok közül? (2 pont)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix},$$

6. Melyek irreducibilisek és melyek primitívek az alábbi mátrixok közül? (3 pont)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. Oldjuk meg az  $\mathbf{A}\mathbf{x} = (1, 1, 0, 1)$  egyenletet  $\mathbb{F}_2$  fölött, ahol (3 pont)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Hány megoldása van az egyenletrendszernek? (b) Legyen  $A : \mathbf{F}_2^k \rightarrow \mathbf{F}_2^n; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ . Adjuk meg  $k$  és  $n$  értékét! (c) Mennyi  $\text{Ker } A$  és  $\text{Im } A$  dimenziója?

8. Mutassuk meg, hogy  $r$ -reguláris gráf  $\mathbf{A}$  adjacenciamátrixának az  $r$  szám egy sajátértéke, és minden más  $\lambda$  sajátértékre  $|\lambda| \leq r$ . (3 pont)