Felsőbb Matematika 1. ZH 2011-10-24

1. Írjuk fel az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

mátrix
(a) redukált szinguláris felbontását és
(b) QR-felbontását, valamint az
(c) oszlopterére való merőleges vetítés mátrixát! *(4 pont)*

Megoldás. Mivel $\mathbf{A}$ szemiortogonális, ezért $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_2$, tehát $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{I}_2$ és a szinguláris felbontás $\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I}_2\mathbf{I}_2$. Hasonló okból a QR-felbontás $\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I}$. Az $\mathbf{A}$ oszlopterére való merőleges vetítés mátrixa

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 5/9 & 4/9 & -2/9 \\ 4/9 & 5/9 & 2/9 \\ -2/9 & 2/9 & 8/9 \end{bmatrix}$$

2. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} x \quad &= 2 \\ y &= 3 \\ x+y &= 8 \end{aligned}$$

egyenletrendszer legkisebb normájú optimális megoldását három különböző módszerrel:
(a) az együtthatómátrix pszeudoinverzével számolva,
(b) az együtthatómátrix QR-felbontásával számolva,
(c) egy megfelelő, egyértelműen megoldható egyenletrendszer felírásával! *(2+4+2 pont)*

Megoldás. *(a)* Az együtthatómátrix pszeudoinverze:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^+ &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Így $\mathbf{A}^+(2,3,8) = (3,4)$.
(b) A QR-felbontás:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) \\ \mathbf{u}_2 &= (0,1,1) - \frac{(0,1,1)(1,0,1)}{(1,0,1)(1,0,1)}(1,0,1) \\ &= (0,1,1) - (\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}) \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1) \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{6}/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{6}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\sqrt{2} \\ 2\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

amiből $(x,y) = (3,4)$.
(c) Az $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$ normálegyenlet

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix}$$

3. Egy $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja $(\lambda+1)^6(\lambda-1)^5$, az $\mathbf{A}+\mathbf{I}$ hatványainak rangja 9, 7, 6, 5, az $\mathbf{A}-\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 9, 7, 6. Írjuk fel a Jordan-féle normálalakját! *(4 pont)*

Megoldás. A -1-hez tartozó leghosszabb lánc hossza 4, az 1-hez tartozóé 3. Az egyenletrendszerek:

$$\lambda = -1: \quad \begin{aligned} n_4 &= 1 \\ n_3 + 2n_4 &= 2 \\ n_2 + 2n_3 + 3n_4 &= 4 \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 &= 6 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} n_4 &= 1 \\ n_3 &= 0 \\ n_2 &= 1 \\ n_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda = 1: \quad \begin{aligned} n_3 &= 1 \\ n_2 + 2n_3 &= 3 \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 &= 5 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} n_3 &= 1 \\ n_2 &= 1 \\ n_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{J} = \left[\begin{array}{cccc|cc|ccc} -1 & 1 & & & & & & & \\ & -1 & 1 & & & & & & \\ & & -1 & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ \hline & & & & -1 & 1 & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ \hline & & & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & & & 1 \\ \hline & & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & & & 1 \end{array}\right]$$

4. Adva van az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 2\mathrm{i} & 2\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & \mathrm{i} & -2\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

mátrix. Pozitív definit-e az $\mathbf{A}$ mátrix, normális-e a $\mathbf{B}$ mátrix, és mennyi a 2-normája? *(4 pont)*

Megoldás. Az $\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus, így minden sajátértéke valós, a Gerschgorin körök 5-közepű, 4-sugarú körök, tehát minden sajátérték pozitív. (Persze tudhatjuk is a sajátértékeket, a csupa-1-vektor tartozik a 9 sajátértékhez, és az $\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{i+1}$ vektorok a 4 sajátértékhez.)

A $\mathbf{B}$ mátrixra $\mathbf{B}^*\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{B}^* = 9\mathbf{I}$, tehát normális. Normája $||\mathbf{B}||_2 = \sigma_1 = 3$.

5. Legyen $\mathbf{A}$ nemnegatív, szimmetrikus mátrix. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{A}$ pontosan akkor primitív, ha $\mathbf{A}^2$ irreducibilis! *(5* pont)*

Megoldás. Ha $\mathbf{A}$ primitív, akkor egyik hatványa sem lehet reducibilis, tehát $\mathbf{A}^2$ irreducibilis. Fordítva, ha $\mathbf{A}^2$ irreducibilis, akkor $\mathbf{A}$ is az. Másrészt $\mathbf{A}$ szimmetriája miatt $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$, azaz $\mathbf{A}^2$ főátlójában van pozitív elem, hisz $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$. Így $\mathbf{A}^2$ primitív, azaz valamely hatványa pozitív, de az $\mathbf{A}$-nak is hatványa, tehát $\mathbf{A}$ is primitív.