Felsőbb Matematika (2013-14 ősz) 1. gyakorlat

1. Igazoljuk, hogy a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ vektorrendszerre az alábbi két állítás ekvivalens:
a) ha $\sum_{k=1}^n c_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, akkor $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$,
b) ha $n > 1$, akkor egyik vektor sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként, ha $n = 1$, akkor $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$.

2. Igazoljuk, hogy tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}) \quad (\text{vagy } |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|)\,,$$

és mutassuk meg, hogy egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ párhuzamosak.

3. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2\right)$.

4. Definiáljuk $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ vektorok skaláris szorzatát az $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^n \bar{x}_k y_k$ képlettel. Mutassuk meg, hogy
a) $\mathbf{x} \cdot (\lambda \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$, $(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \bar{\lambda}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$ és $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \overline{\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}}$,
b) (CBS) $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$

5. *a)* Számítsuk ki a komplex N-edik egységgyökök összegét.
b) Számítsuk ki a komplex N-edik egységgyökök n-edik hatványainak összegét.

6. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{C}$ egy primitív N-edik egységgyök. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{x}_k = (1, \varepsilon^k, \varepsilon^{2k}, \ldots, \varepsilon^{(N-1)k})$ $(0 \leq k < N)$, akkor

$$\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{x}_j = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq j, \\ N, & \text{ha } k = j. \end{cases}$$

7. Bizonyítsuk be, hogy a következő struktúrák testet alkotnak:
a) a $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ halmaz, ha a szorzást és az összeadást úgy definiáljuk, hogy az igazi szorzatnak illetve összegnek a p szerinti maradékát vesszük;
b) az $\{a + bi | a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{C}$ halmaz a komplex összeadásra és szorzásra nézve.

8. Melyek alkotnak vektorteret $\mathbb{R}$ fölött az alábbiak közül? A köztük szereplő vektorterek hány dimenziósak?
a) 3×3-as valós felső háromszögmátrixok a szokásos műveletekkel;
b) a racionális számnégyesek a szokásos összeadásra és skalárral való szorzásra nézve;
c) a legföljebb 5-ödfokú valós polinomok;
d) a valós számpárok az $(a, b) \oplus (c, d) = (a + d, b + c)$ összeadásra és $\lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$ skalárral való szorzásra nézve;
e) $\mathbb{C}$ a komplex számok összeadására és valóssal való szorzására nézve;
f) A sík pozitív y-koordinátájú helyvektorai a szokásos vektorösszeadásra és skalárral való szorzásra nézve.

9. Tekintsük a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x - y + z - w &= 1 \\ x + y - z - w &= 0 \\ x - y - z + w &= 1 \\ y + z + w &= 1 \end{aligned}$$

Oldjuk meg mint

(a) valós-együtthatós,

(b) $\mathbb{F}_2$ fölötti,

(c) illetve $\mathbb{F}_3$ fölötti

egyenletrendszert!

10. Van-e olyan lineáris egyenletrendszer, aminek
a) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;
b) 6 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;
c) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van, és nincs megoldása;
d) 5 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és pontosan 5 megoldása van?

11. Határozzuk meg az alábbi két altér metszetének egy bázisát!

$$\mathcal{U} = \mathrm{span}((1,2,2,1,2),(1,2,1,2,2),(2,1,1,2,2))$$
$$\mathcal{V} = \mathrm{span}((1,2,2,1,1),(1,2,1,2,1),(2,1,2,1,2))$$

HF. Igazoljuk, hogy egy vektortér vektorainak egy véges $\mathcal{V}$ halmaza pontosan akkor lineárisan független, ha $\mathrm{span}(\mathcal{V})$ bármely vektora csak egyféleképp áll elő $\mathcal{V}$ vektorainak lineáris kombinációjaként.