Felsőbb Matematika (2012-13 ősz) 2. gyakorlat

1. Határozzuk meg a $\mathbf{P}$ és $\mathbf{R}$ mátrixok LU-felbontását, majd ezt fölhasználva oldjuk meg a $\mathbf{Px} = (0, 2, 4, 6)$ egyenletrendszert, invertáljuk az $\mathbf{R}$ mátrixot, ahol

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Adjunk meg olyan lineáris transzformációt $\mathbb{R}^3$-ben (ha létezik), amely a $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ vektorokat a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ vektorokba viszi, ahol $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, -1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (2, -1, 3)$, és

(i) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (1, 1, 2)$;
(ii) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (3, 1, 5)$;
(iii) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (2, 1, 3)$;

Írjuk fel e leképezés mátrixát!

3. Adjuk meg az alábbi lineáris transzformációk mátrixát a megadott bázisokban:

(a) az $x - 2y + z = 0$ síkra való merőleges vetítés a standard bázisban;
(b) $f : (x, y, z) \mapsto (2x - y + z, x + z, y - 3z)$ a standard, illetve az $\{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (2, 1, 1)\}$ bázisban;
(c) a sík tükrözése az $y = 2x$ egyenesre a standard, illetve az $\{(1, 2), (-2, 1)\}$ bázisban;
(d) $\mathbb{R}^n$ vetítése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektor által kifeszített altérre a standard bázisban;
(e) $\mathbb{R}^n$ vetítése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektorra merőleges hipersíkra a standard bázisban;
(f) $\mathbb{R}^n$ tükrözése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektorra merőleges hipersíkra a standard bázisban.

4. Ha W az $\mathbb{R}^n$ egy altere, és az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorai a $\mathcal{W}$ egy bázisát alkotják (tehát $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú), akkor a $\mathcal{W}$ altérre való merőleges vetítés mátrixa

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T.$$

5. Határozzuk meg a $(-2, 1, 3)$ vektornak az $(1, 0, 1)$ és a $(-1, 2, 0)$ vektorok által kifeszített síkra eső merőleges vetületét!

6. Tekintsük az $\mathbb{R}^4$ tér $(1, -1, 1, 0)$ és $(0, 1, -1, 0)$ vektorai által kifeszített $\mathcal{W}$ alterét és legyen $x = (8, 4, 2, 1)$. Bontsuk fel az x vektort $\mathcal{W}$ -be eső és $\mathcal{W}$ -re merőleges vektorok összegére.

7. Melyek igazak az $\mathbb{R}^n$ vektortér minden f lineáris transzformációjára?

1. $\mathbf{v}$ sajátvektora f-nek $\implies$ $\mathbf{v}$ sajátvektora f^2-nek;
2. $\mathbf{v}$ sajátvektora f^2-nek $\implies$ $\mathbf{v}$ sajátvektora f-nek;
3. 0 sajátértéke f^2-nek $\implies$ 0 sajátértéke f-nek.

8. Mondjunk egy lineáris leképezést, melynek sajátértékei (a) 1, 1, 1; (b) 1, 1, -1; (c) 1, -1, -1; (d)-1, -1, -1 (e) 1; (f) -1?

9. Diagonalizáljuk ortogonálisan az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixot és írjuk fel a spektrálfelbontását, azaz állítsuk elő $\mathbf{A} = \sum_\lambda \lambda \mathbf{P}_\lambda$ alakban, ahol $\mathbf{P}_\lambda$ a λ sajátértékhez tartozó sajátaltérre való merőleges vetítés mátrixa.

HF. Határozzuk meg az

$$\begin{bmatrix} 3 & 10 & 10 \\ 2 & 4 & 11 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

mátrix LDU-felbontását, valamint a

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrix PLU-felbontását.