Felsőbb Matematika (2013-14 ősz) 4. gyakorlat

1. Igazoljuk a pszeudoinverzre vonatkozó alábbi összefüggéseket!

1. $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$,
2. $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$,
3. $(\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^+$,
4. $(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$.

2 (1-rangú mátrixok pszeudoinverze)**.** Mutassuk meg, hogy ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 1$, akkor

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{\mathrm{trace}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}\mathbf{A}^T,$$

ahol $\mathrm{trace}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ elemeinek négyzetösszege. Eszerint ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, akkor

$$\mathbf{a}^+ = \frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}^T = \frac{1}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}^T.$$

3. Határozzuk meg a következő mátrixok általánosított (pszeudo)inverzét:

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (b)\ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(c)\ \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (d)\ \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Hogyan illesztenénk mért (t_i, y_i) adatpárokra egy $y = Ae^{\alpha t} + B\cos\beta t + C\sin\beta t$ alakú görbét, ha α és β ismert paraméterek, és A, B és C értékére kell optimális (legkisebb négyzetek elvének megfelelő) becslést adni. Írjuk fel az egyenletrendszert és a hozzá tartozó normálegyenletet-rendszert.

5. Bizonyítsuk be, hogy egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor ortogonális (vagyis $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$), ha $\mathbf{A}$ oszlopai (és sorai) ortonormált rendszert alkotnak.

6. Bizonyítsuk be, hogy ($n \times n$-es) ortogonális mátrixok szorzata és inverze is ortogonális.

7. Adjunk meg ortonormált bázist az $\mathbf{a}_1 = (1, 2, -1, 0), \mathbf{a}_2 = (2, 1, 0, 1), \mathbf{a}_3 = (1, -1, 1, -1) \in \mathbb{R}^4$ vektorok által generált altérben.

8 (QR-felbontás Givens-forgatásokkal)**.** Számítsuk ki az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 3 & 10 & 6 \\ 0 & 12 & 13 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását Givens-forgatások segítségével!

9 (QR-felbontás Householder-tükrözéssel)**.** Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását Householder-módszerrel!

10. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ oszlopai lineárisan függetlenek, és $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ a QR-felbontás, akkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszerhez tartozó normálegyenlet-rendszer $\mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^T\mathbf{b}$, aminek $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{b}$ az optimális megoldása.

11. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. $\mathbf{A}$ pszeudoinverzének segítségével (melyet egy korábbi feladatban már meghatároztunk) határozzuk meg az $\mathbf{Ax} = (10, 2, 6)$ egyenletrendszer legkisebb abszolút értékű optimális megoldását! Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix QR-felbontását, és ennek felhasználásával is keressük meg az előző egyenletrendszer legkisebb abszolút értékű optimális megoldását!

HF. Igazoljuk, hogy blokkdiagonális mátrix esetén

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{A}_k \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^+ & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2^+ & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{A}_k^+ \end{bmatrix},$$

és ez alapján határozzuk meg a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix pszeudoinverzét.