Felsőbb Matematika (2013-14 ősz) 5. gyakorlat

1. Írjuk fel az alábbi mátrixok sajátfelbontását, annak diadikus alakját, illetve a spektrálfelbontásukat!

$$\text{(a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{(b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{(c) } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Számítsuk ki a k-adik Fibonacci-számot ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$)!

3. Mutassuk meg, hogy az alábbi (valós) mátrixok mind hasonlók:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix}$, ahol a, b, c és d tetszőleges nem 0 értékek;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{bmatrix}$, ahol a, b, c és d tetszőleges nem 0 értékek;

(c) $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$, ahol $a \neq c$ tetszőleges, egymástól különböző értékek;

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Ábrázoljuk az $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 20y + 5 = 0$ egyenletű másodrendű görbét! Határozzuk meg centrumát, és tengelyeinek egyenletét!

5. Számítsuk ki az alábbi mátrixok szinguláris érték szerinti felbontásának teljes és redukált alakját, és írjuk fel a hozzá tartozó diadikus felbontást!

$$(a) \begin{bmatrix} -\frac{4}{13} & 6 \\ \frac{111}{13} & -4 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(d) \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Határozzuk meg a fenti mátrixok pszeudoinverzét!

7. Határozzuk meg az (d)-beli mátrix polárfelbontását is!

8. Tudjuk, hogy az $\mathbf{A} = \mathbf{U}\,\mathrm{diag}(4, -2, -2, 0)\mathbf{U}^T$ az $\mathbf{A}$ mátrix sajátfelbontása, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel $\mathbf{A}$ szinguláris felbontását!

HF. Írjuk fel az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátfelbontását, annak diadikus alakját, illetve a spektrálfelbontását. Hogyan bonthatunk fel egy tetszőleges $\mathbb{R}^3$-beli vektort e mátrix sajátaltereibe eső vektorok összegére? Bontsuk fel így az $(1, 2, 3)$ vektort!