Felsőbb Matematika (2013-14 ősz) — 1. gyakorlat

1. Igazoljuk, hogy a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ vektorrendszerre az alábbi két állítás ekvivalens:
a) ha $\sum_{k=1}^n c_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, akkor $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$,
b) ha $n > 1$, akkor egyik vektor sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként, ha $n = 1$, akkor $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$.

Megoldás. ld. könyv 1.48. tétel.

2. Igazoljuk, hogy tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \le (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}) \quad (\text{vagy } |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \le |\mathbf{x}||\mathbf{y}|)\,,$$

és mutassuk meg, hogy egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ párhuzamosak.

Megoldás. Ha $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, akkor az állítás igaz, tegyük fel tehát, hogy $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Legyen $\mathbf{e} = \mathbf{y}/|\mathbf{y}|$ az $\mathbf{y}$ irányú egységvektor. Az $\mathbf{x}$ vektor $\mathbf{e}$ egyenesére merőleges összetevőjének hossza, illetve annak négyzete nyilván nem negatív:

$$\begin{aligned} 0 &\le |\mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}|^2 \\ &= |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}|^2 - 2\,|\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}|^2 \\ &= |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}|^2 \\ &= |\mathbf{x}|^2 - \frac{|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}|^2}{|\mathbf{y}|^2}, \end{aligned}$$

(Útmutatás: igazoljuk és használjuk fel, hogy tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ számra $0 \le (\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}) \cdot (x - \lambda\mathbf{y}) = |\mathbf{x}|^2 - 2\lambda\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \lambda^2|\mathbf{y}|^2$.)

3. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2\right)$.

4. Definiáljuk $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ vektorok skaláris szorzatát az $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^n \bar{x}_k y_k$ képlettel. Mutassuk meg, hogy
a) $\mathbf{x} \cdot (\lambda\mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$, $(\lambda\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \bar{\lambda}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$ és $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \overline{\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}}$,
b) (CBS) $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \le |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$

5. *a)* Számítsuk ki a komplex N-edik egységgyökök összegét.
b) Számítsuk ki a komplex N-edik egységgyökök n-edik hatványainak összegét.

Megoldás. *a)* Legyen ε egy primitív N-edik egységgyök, ennek hatványai kiadják az összes N-edik egységgyököt. Ezek összege $N > 1$ esetén 0, ugyanis $(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\dots+\varepsilon^{N-1})(1-\varepsilon) = 1-\varepsilon^N = 1-1 = 0$. Ha $N > 1$, akkor $\varepsilon \neq 1$, így az első tényező 0. *b)* N, ha n osztható N-nel, egyébként 0.

6. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{C}$ egy primitív N-edik egységgyök. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{x}_k = (1, \varepsilon^k, \varepsilon^{2k}, \dots, \varepsilon^{(N-1)k})$ $(0 \le k < N)$, akkor

$$\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{x}_j = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq j, \\ N, & \text{ha } k = j. \end{cases}$$

Megoldás. Vegyük figyelembe, hogy $\bar{\varepsilon} = \varepsilon^{-1}$.

7. Bizonyítsuk be, hogy a következő struktúrák testet alkotnak:
a) a $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$ halmaz, ha a szorzást és az összeadást úgy definiáljuk, hogy az igazi szorzatnak illetve összegnek a p szerinti maradékát vesszük;
b) az $\{a + bi | a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{C}$ halmaz a komplex összeadásra és szorzásra nézve.

Megoldás. a) Felhasználjuk, hogy ha a és a', illetve b és b' p-vel vett maradéka megegyezik, akkor $a + b$ és $a' + b'$, illetve ab és $a'b'$ is azonos maradékot adnak. Ebből következik, hogy tetszőleges $+$-gel és $\cdot$-tal alkotott kifejezés értékét úgy is megkaphatjuk $\mathbb{Z}_p$-ben, hogy először $\mathbb{Z}$-ben számoljuk ki, és csak a végén vesszük a maradékot. Ennek pedig egyenes következménye, hogy a műveleti azonosságok teljesülnek $\mathbb{Z}_p$-ben, mert $\mathbb{Z}$-ben is teljesülnek. A $+$-ra és $\cdot$-ra való zártság nyilvánvaló a definícióból. 0-elem és 1-elem a 0 és az 1, egy $a \neq 0$ elem negatívja pedig $p - a$ (a 0-é pedig 0). Azt kell még belátnunk, hogy minden $a \neq 0$ elemnek van reciproka. Tekintsük az $a, 2a, \dots, (p-1)a$ egész számok p-vel vett maradékait. Ezek mind különbözők, mert ha ia és ja azonos maradékot ad, akkor $ia - ja = (i - j)a$ osztható p-vel, és így $|i - j|$ is osztható, ami pedig 0 és $p - 2$ között van, tehát ilyenkor $i = j$. Másrészt a 0 nincs a maradékok között, tehát az összes többi maradékot megkapjuk, köztük az 1-et. Ha ia maradéka 1, akkor i az a reciproka a $\mathbb{Z}_p$-ben.
b) Legyen $K = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Q}\}$. Itt a műveleti azonosságokat nem kell külön belátnunk, mert azok a K halmazt tartalmazó $\mathbb{C}$ testben is teljesülnek. K zárt a műveletekre nézve: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \in K$ és $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \in K$, mert az együtthatók racionálisak, hiszen $\mathbb{Q}$ test. Van 0-elem: $0 + 0i$ és 1-elem: $1 + 0i$, továbbá additív inverz K-ban: $(-a) + (-b)i$. Végül multiplikatív inverz is létezik, ugyanis a $\mathbb{C}$-beli reciprok benne van a K-ban is: $1/(a + bi) = (a - bi)/(a^2 + b^2) = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i$ mindkét együtthatója racionális, ha a és b azok voltak.

8. Melyek alkotnak vektorteret $\mathbb{R}$ fölött az alábbiak közül? A köztük szereplő vektorterek hány dimenziósak?
a) 3×3-as valós felső háromszögmátrixok a szokásos műveletekkel;
b) a racionális számnégyesek a szokásos összeadásra és skalárral való szorzásra nézve;
c) a legföljebb 5-ödfokú valós polinomok;
d) a valós számpárok az $(a, b) \oplus (c, d) = (a + d, b + c)$ összeadásra és $\lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$ skalárral való szorzásra nézve;
e) $\mathbb{C}$ a komplex számok összeadására és valóssal való szorzására nézve;
f) A sík pozitív y-koordinátájú helyvektorai a szokásos vektorösszeadásra és skalárral való szorzásra nézve.

Megoldás. Az a), c) és e) részekben definiált struktúrák vektorterek, a b)-ben megadott nem, mert egy racionális szám valósszorosa nem feltétlenül racionális. A d)-ben megadott összeadás pedig nem kommutatív (mellesleg, nem is asszociatív): $(a, b) \oplus (c, d) = (a+d, b+c)$, és $(c, d) \oplus (a, b) = (c+b, a+d)$ különböznek. Tehát a d)-beli nem vektortér; az f)-beli halmaz nem tartalmaz nullelemet, és negatív számmal való szorzásra sem zárt. A dimenziókat egy-egy bázis megadásával határozhatjuk meg:
a) Bázisa az $\{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{22}, E_{23}, E_{33}\}$, ahol E_{ij} azt a mátrixot jelöli, amelynek egyetlen nem nulla eleme az ij helyen levő 1. A vektortér dimenziója 6.
c) Bázisa $\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$, dimenziója 6.
e) Bázisa $\{1, i\}$, dimenziója 2. Mindhárom esetben könnyű látni, hogy a vektortér elemei egyértelműen írhatók föl a

báziselemek lineáris kombinációjaként.

9. Tekintsük a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x - y + z - w &= 1 \\ x + y - z - w &= 0 \\ x - y - z + w &= 1 \\ y + z + w &= 1 \end{aligned}$$

Oldjuk meg mint

(a) valós-együtthatós,

(b) $\mathbb{F}_2$ fölötti,

(c) illetve $\mathbb{F}_3$ fölötti

egyenletrendszert!

Megoldás. $\mathbb{R}$ fölött Gauss-eliminálva kapjuk, hogy $x = 1$, $y = 0$, $z = w = \frac{1}{2}$. Az egyenletrendszer $\mathbb{F}_2$ fölött nem megoldható, mert az első három egyenlet baloldalai megegyeznek, míg a jobboldalak különböznek. Végül $\mathbb{F}_3$ fölött a megoldás $x = y - 1 = z = w$, azaz itt három megoldás van.

10. Van-e olyan lineáris egyenletrendszer, aminek
a) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;
b) 6 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;
c) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van, és nincs megoldása;
d) 5 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és pontosan 5 megoldása van?

Megoldás. a) Nem lehetséges hiszen a változók száma (6) nagyobb, mint az együttható mátrix vagy a kibővített mátrix rangja (ami legfeljebb 5 lehet, a sorok száma).
b) Ez lehetséges, például $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$ és $x_4 + x_5 = 9$.
c) Ez lehetséges, például $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$ és $x_1 = 9$.
d) Egy egyenletrendszernek általában ($\mathbb{R}$ felett) vagy nincs, vagy pontosan egy vagy végtelen sok megoldása van. De a $\mathbb{Z}_5$ test felett van ilyen például: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_1 + x_2 = 3$.

11. Határozzuk meg az alábbi két altér metszetének egy bázisát!

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \operatorname{span}((1,2,2,1,2),(1,2,1,2,2),(2,1,1,2,2)) \\ \mathcal{V} &= \operatorname{span}((1,2,2,1,1),(1,2,1,2,1),(2,1,2,1,2)) \end{aligned}$$

Megoldás. Jelölje az $\mathcal{U}$ alteret generáló vektorokat $\mathbf{u}_i$ ($i = 1,2,3$), a $\mathcal{V}$-t generálókat $\mathbf{v}_i$ ($i = 1,2,3$). A metszet vektorai eleget tesznek a

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + d_3\mathbf{v}_3$$

egyenletnek, ami átrendezve egy homogén lineáris egyenletrendszer. Ennek mátrixa és lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Innen $(c_1, c_2, c_3, -d_1, -d_2, -d_3) = s(1,-1,0,-1,1,0) + t(-1,1,-1,0,0,1)$. E két generátorvektorból a metszet tér két bázisvektora: $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = (0,0,1,-1,0)$, $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 = (2,1,2,1,2)$.

HF. Igazoljuk, hogy egy vektortér vektorainak egy véges $\mathcal{V}$ halmaza pontosan akkor lineárisan független, ha $\operatorname{span}(\mathcal{V})$ bármely vektora csak egyféleképp áll elő $\mathcal{V}$ vektorainak lineáris kombinációjaként.