Felsőbb Matematika (2012-13 ősz) 2. gyakorlat

1. Határozzuk meg a $\mathbf{P}$ és $\mathbf{R}$ mátrixok LU-felbontását, majd ezt fölhasználva oldjuk meg a $\mathbf{Px} = (0, 2, 4, 6)$ egyenletrendszert, invertáljuk az $\mathbf{R}$ mátrixot, ahol

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A Pascal-háromszög LU-felbontása két Pascal-háromszöget ad:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A másik felbontás is hasonlóan varázslatos:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Az egyenletrendszer megoldása $(-2, 2, 0, 0)$.
2. Az inverz:

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Adjunk meg olyan lineáris transzformációt $\mathbb{R}^3$-ben (ha létezik), amely a $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ vektorokat a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ vektorokba viszi, ahol $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, -1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (2, -1, 3)$, és

(i) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (1, 1, 2)$;
(ii) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (3, 1, 5)$;
(iii) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (2, 1, 3)$;
Írjuk fel e leképezés mátrixát!

Megoldás. Mindhárom kérdés megválaszolható úgy, hogy megoldjuk az $\mathbf{Aw}_i = \mathbf{v}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ egyenletekből álló 9-ismeretlenes egyenletrendszert, ahol az ismeretlenek az $\mathbf{A}$ mátrix elemei. Egyetlen mátrixszorzatba tömörítve a fenti egyenleteket, megoldandó az $\mathbf{AW} = \mathbf{V}$ mátrixegyenlet, ahol $\mathbf{A}$ az ismeretlen, és $\mathbf{W}$ illetve $\mathbf{V}$ a $\mathbf{w}_i$, illetve $\mathbf{v}_i$ vektorokból álló mátrix. Az *(i)* kérdésben W invertálható, ezért a megoldás az $A = VW^{-1}$ kiszámolásával is megoldható, de mindhárom esetben használható az elemi sorműveletekkel való megoldás. Ha mindkét oldal transzponáltját vesszük, az ismeretlenek a hagyományos helyen jelennek meg, így a $W^T A^T = V^T$ egyenletben az A^T oszlopvektoraiban három háromismeretlenes egyenletrendszert, vagyis egy szimultán egyenletrendszert kapunk. Ezek megoldása:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Tehát az *(i)* megoldása

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

A *(ii)* esetén végtelen sok megoldást kapunk:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A jobb oldali rész első oszlopát véve egy egyenletrendszer jobb oldalának, az $x + 2z = 1$, $y - z = -1$ egyenletrendszert kapjuk, melynek megoldása $z = r$, $y = -1 + r$, $x = 1 - 2r$, ahol r szabad paraméter. Hasonlóan megoldva a másik két egyenletrendszert is, majd a belőlük képzett mátrixot transzponálva kapjuk *(ii)* megoldását:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - 2r & -1 + r & r \\ -2s & -1 - s & s \\ 1 - 2t & -t & t \end{bmatrix}.$$

Azért kaptunk végtelen sok megoldást, mert a $\mathbf{w}_i$ vektorok összefüggőek, egy síkot feszítenek ki, és a köztük lévő összefüggések megegyeznek a $\mathbf{v}_i$ vektorok közti összefüggésekkel. Ez a síkon kívüli vektorok leképzésére még végtelen sok lehetőséget hagy. A *(iii)* esetén nincs megoldás, mert bár a $\mathbf{w}_i$ vektorok itt is összefüggőek, de köztük más összefüggés van, mint a $\mathbf{v}_i$ vektorok közt:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

3. Adjuk meg az alábbi lineáris transzformációk mátrixát a megadott bázisokban:

(a) az $x - 2y + z = 0$ síkra való merőleges vetítés a standard bázisban;
(b) $f : (x, y, z) \mapsto (2x - y + z, x + z, y - 3z)$ a standard, illetve az $\{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (2, 1, 1)\}$ bázisban;
(c) a sík tükrözése az $y = 2x$ egyenesre a standard, illetve az $\{(1, 2), (-2, 1)\}$ bázisban;
(d) $\mathbb{R}^n$ vetítése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektor által kifeszített altérre a standard bázisban;
(e) $\mathbb{R}^n$ vetítése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektorra merőleges hipersíkra a standard bázisban;
(f) $\mathbb{R}^n$ tükrözése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektorra merőleges hipersíkra a standard bázisban.

Megoldás. *(a)* Az (a, b, c) ponton átmenő, az $x - 2y + z = 0$ síkra merőleges egyenes paraméteres vektoregyenlete: $(x, y, z) = (a, b, c) + t(1, -2, 1) = (a + t, b - 2t, c + t)$. Az egyenes metszéspontja a síkkal az $(a + t) - 2(b - 2t) + (c +$

$t) = 0$ egyenletből kapható $t = -\frac{1}{6}a + \frac{2}{6}b - \frac{1}{6}c$ paraméterértékből $(\frac{5}{6}a + \frac{2}{6}b - \frac{1}{6}c, \frac{2}{6}a + \frac{2}{6}b + \frac{2}{6}c, -\frac{1}{6}a + \frac{2}{6}b + \frac{5}{6}c)$. Ebből leolvasható, hogy az

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6}a + \frac{2}{6}b - \frac{1}{6}c \\ \frac{2}{6}a + \frac{2}{6}b + \frac{2}{6}c \\ -\frac{1}{6}a + \frac{2}{6}b + \frac{5}{6}c \end{bmatrix}$$

leképezést megvalósító mátrix

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}.$$

(b) Az f transzformáció mátrixa a $\mathcal{E} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ standard bázisban $\mathbf{A}_\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.
A $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\} = \{(1,1,0), (0,1,0), (2,1,1)\}$ bázisnál az áttérés mátrixával számolunk:

$$\mathbf{C}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}} = \mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Így $\mathbf{A}_\mathcal{C} = \mathbf{C}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}}\mathbf{A}_\mathcal{E}\mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}} = \mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}^{-1}\mathbf{A}_\mathcal{E}\mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}$ fölhasználásával

$$\mathbf{A}_\mathcal{C} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 8 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(c) Érdemes először a $\mathcal{C} = \{(1,2), (-2,1)\}$ bázisban fölírni a mátrixot, mert ennek elemei sajátvektorok, így a képüket meghatározni és koordinátázni is könnyű: $\mathbf{c}_1 = (1,2)$ és $\mathbf{c}_2 = (-2,1)$ jelöléssel

$$f(\mathbf{c}_1) = \mathbf{c}_1 = 1 \cdot \mathbf{c}_1 + 0 \cdot \mathbf{c}_2$$
$$f(\mathbf{c}_2) = -\mathbf{c}_2 = 0 \cdot \mathbf{c}_1 + (-1) \cdot \mathbf{c}_2$$

tehát f mátrixa $\mathcal{C}$ szerint $\mathbf{A}_\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Az $\mathbf{A}_\mathcal{E}$ standard mátrixra $\mathbf{A}_\mathcal{E} = \mathbf{P}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}\mathbf{A}_\mathcal{C}\mathbf{P}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}^{-1}$, ahol $\mathbf{P}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, így azt kapjuk, hogy $\mathbf{A}_\mathcal{E} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$.

(d) Keressük $\mathbf{x} \mapsto \operatorname{proj}_\mathbf{a}(\mathbf{x})$ mátrixát. Ennek i-edik oszlopa

$$\operatorname{proj}_\mathbf{a}(\mathbf{e}_i) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\mathbf{a} = \frac{a_i}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a},$$

amiből a vetítés mátrixa

$$\mathbf{P} = \left[\frac{a_1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a} \mid \frac{a_2}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a} \mid \dots \mid \frac{a_n}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\right] = \frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^T$$

(e) Keressük az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - \operatorname{proj}_\mathbf{a}(\mathbf{x})$ mátrixát:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^T$$

(f) Keressük az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - 2\operatorname{proj}_\mathbf{a}(\mathbf{x})$ mátrixát:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^T$$

4. Ha W az $\mathbb{R}^n$ egy altere, és az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorai a $\mathcal{W}$ egy bázisát alkotják (tehát $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú), akkor a $\mathcal{W}$ altérre való merőleges vetítés mátrixa

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T.$$

Megoldás. ld. jegyzet 7.20. tétel

5. Határozzuk meg a $(-2,1,3)$ vektornak az $(1,0,1)$ és a $(-1,2,0)$ vektorok által kifeszített síkra eső merőleges vetületét!

Megoldás. ld. jegyzet 7.21. példa

6. Tekintsük az $\mathbb{R}^4$ tér $(1,-1,1,0)$ és $(0,1,-1,0)$ vektorai által kifeszített $\mathcal{W}$ alterét és legyen $x = (8,4,2,1)$. Bontsuk fel az x vektort $\mathcal{W}$ -be eső és $\mathcal{W}$ -re merőleges vektorok összegére.

Megoldás. ld. jegyzet 7.26. példa

7. Melyek igazak az $\mathbb{R}^n$ vektortér minden f lineáris transzformációjára?
1. $\mathbf{v}$ sajátvektora f-nek $\implies$ $\mathbf{v}$ sajátvektora f^2-nek;
2. $\mathbf{v}$ sajátvektora f^2-nek $\implies$ $\mathbf{v}$ sajátvektora f-nek;
3. 0 sajátértéke f^2-nek $\implies$ 0 sajátértéke f-nek.

Megoldás.
1. $\mathbf{v}$ sajátvektora f-nek, azaz $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v} \implies f^2(\mathbf{v}) = f(\lambda\mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v}) = \lambda^2\mathbf{v}$, azaz $\mathbf{v}$ sajátvektora f^2-nek, az állítás igaz.
2. Hamis, például ha f a sík $90°$-os elforgatása, akkor f^2 a $180°$-os elforgatás, aminek a sík minden vektora sajátvektora, f-nek viszont nincs.
3. Igaz, hisz ha f-nek a 0 nem sajátértéke, azaz f egyik vektort sem viszi a nullvektorba, akkor f^2 sem.

8. Mondjunk egy lineáris leképezést, melynek sajátértékei (a) 1, 1, 1; (b) 1, 1, -1; (c) 1, -1, -1; (d)-1, -1, -1 (e) 1; (f) -1?

Megoldás. *(a)* identikus *(b)* síkra tükrözés *(c)* egyenesre tükrözés *(d)* origóra tükrözés *(e)* pl. az egyenes körüli forgatás *(f)* pl. a forgatva tükrözés

9. Diagonalizáljuk ortogonálisan az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixot és írjuk fel a spektrálfelbontását, azaz állítsuk elő $\mathbf{A} = \sum_\lambda \lambda\mathbf{P}_\lambda$ alakban, ahol $\mathbf{P}_\lambda$ a λ sajátértékhez tartozó sajátaltérre való merőleges vetítés mátrixa.

Megoldás. Karakterisztikus polinom: $-x^3 + 6x^2 - 9x$, innen $\lambda_{1,2} = 3$, $\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$, a $(0,1,-1)$ sajátvektor ortogonalizálása után $\mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)$, $\lambda_3 = 0$, $\mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Ortogonálisan diagonalizáló mátrix:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

ahonnan $\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \operatorname{diag}(3,3,0)$.

A spektrálfelbontás ortonormált vektorokkal, ahonnan az alterekre vetítő változat is megkapható:

$$3\mathbf{x}_1\mathbf{x}_1^T + 3\mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^T + 0\mathbf{x}_3\mathbf{x}_3^T = 3 \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= 3 \cdot \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} +$$

HF. Határozzuk meg az

$$\begin{bmatrix} 3 & 10 & 10 \\ 2 & 4 & 11 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

mátrix LDU-felbontását, valamint a

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrix PLU-felbontását.