Felsőbb Matematika (2013-14 ősz) 4. gyakorlat

1. Igazoljuk a pszeudoinverzre vonatkozó alábbi összefüggéseket!

1. $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$,
2. $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$,
3. $(\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^+$,
4. $(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$.

Megoldás. ld. jegyzet 7. 40. Tétel

2 (1-rangú mátrixok pszeudoinverze)**.** Mutassuk meg, hogy ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 1$, akkor

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{\mathrm{trace}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}\mathbf{A}^T,$$

ahol $\mathrm{trace}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ elemeinek négyzetösszege. Eszerint ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, akkor

$$\mathbf{a}^+ = \frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}^T = \frac{1}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}^T.$$

Megoldás. Vegyük észre, hogy $\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{R}^T = (\mathbf{B}^T\mathbf{B})(\mathbf{R}\mathbf{R}^T)$ éppen A elemeinek négyzetösszege, $\mathbf{R}^T\mathbf{B}^T$ pedig megegyezik $\mathbf{A}^T$-tal.

3. Határozzuk meg a következő mátrixok általánosított (pszeudo)inverzét:

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (b)\ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(c)\ \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (d)\ \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás. (a) $r(\mathbf{A}) = 1$, a bázisfelbontás: $\mathbf{B} = [1\ \ -1]^T$, $\mathbf{R} = [1\ \ -1]$, ahonnan $\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{R}^T = 4$. Mivel $\mathbf{R}^T\mathbf{B}^T = \mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, ezért $\mathbf{A}^+ = {}^1\!/\!_4\mathbf{A}$.

(b) Mivel $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú,

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}^{-1}\mathbf{A}^T$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{36} & \frac{2}{36} \\ \frac{2}{36} & \frac{8}{36} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{18} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}.$$

(c) Az előző pontbeli mátrix transzponáltja.

(d) Eredmény:

$$\begin{bmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{18} & \frac{7}{9} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

4. Hogyan illesztenénk mért (t_i, y_i) adatpárokra egy $y = Ae^{\alpha t} + B\cos\beta t + C\sin\beta t$ alakú görbét, ha α és β ismert paraméterek, és A, B és C értékére kell optimális (legkisebb négyzetek elvének megfelelő) becslést adni. Írjuk fel az egyenletrendszert és a hozzá tartozó normálegyenletet-rendszert.

Megoldás. $\mathbf{M}$ i-edik sora $(e^{\alpha t_i}, \cos\beta t_i, \sin\beta t_i)$, az egyenletrendszer $\mathbf{M}\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \mathbf{Y}$. Be kell szorozni $\mathbf{M}^T$-vel.

5. Bizonyítsuk be, hogy egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor ortogonális (vagyis $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$), ha $\mathbf{A}$ oszlopai (és sorai) ortonormált rendszert alkotnak.

Megoldás. Definíció szerint.

6. Bizonyítsuk be, hogy ($n \times n$-es) ortogonális mátrixok szorzata és inverze is ortogonális.

Megoldás. Definíció szerint.

7. Adjunk meg ortonormált bázist az $\mathbf{a}_1 = (1, 2, -1, 0), \mathbf{a}_2 = (2, 1, 0, 1), \mathbf{a}_3 = (1, -1, 1, -1) \in \mathbb{R}^4$ vektorok által generált altérben.

Megoldás. Gram-Schmidt ortogonalizációval: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1$, $\mathbf{v}_2$ párhuzamos $\mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|^2}\mathbf{v}_1 = (\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$-vel, például $\mathbf{v}_2 = (4, -1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_3$ párhuzamos $\mathbf{a}_3 - \frac{\mathbf{a}_3\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{a}_3\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|^2}\mathbf{v}_2 = (\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{7}{5})$-vel, például $\mathbf{v}_3 = (4, -1, 2, -7)$. Kaptuk tehát a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ortogonális bázist az $\langle\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\rangle$ altérben, ebbõl normálással adódik egy ortonormált bázis is.

8 (QR-felbontás Givens-forgatásokkal)**.** Számítsuk ki az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 3 & 10 & 6 \\ 0 & 12 & 13 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását Givens-forgatások segítségével!

Megoldás. Először az első és második sorokat és oszlopokat figyelve elimináljuk a második sor első elemét. Itt $a = 4$, $b = 3$, tehát $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$. Így első lépésben a következő mátrixszorzással eliminálhatunk:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 12 & 13 \end{bmatrix}.$$

Következő lépésben a $\mathbf{Q}_1\mathbf{A}$ mátrix harmadik sorának második elemét elimináljuk:

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ 0 & -\frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix}. \qquad \mathbf{R} = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 0 & 13 & 12 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

és innen

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1)^{-1} = \mathbf{Q}_1^T\mathbf{Q}_2^T = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{13} & \frac{36}{65} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{13} & -\frac{48}{65} \\ 0 & \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix},$$

amely mátrixokkal $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$ valóban fennáll.

9 (QR-felbontás Householder-tükrözéssel)**.** Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását Householder-módszerrel!

Megoldás. Az $(1, 2, -2) \mapsto (3, 0, 0)$ transzformációhoz az

$$\mathbf{a} = (1, 2, -2) - (3, 0, 0) = (-2, 2, -2)$$

vektorral Householder-tükrözést végzünk:

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{I}_3 - \frac{2}{\mathbf{a}'\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Ezután a $\mathbf{Q}_1\mathbf{A}$ mátrixból képzeletben elhagyva az első sort és oszlopot a $(4,3) \mapsto (5,0)$ transzformációhoz kell az $\mathbf{a} = (4,3) - (5,0) = (-1,3)$ vektorral Householder-tükrözést végezni:

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{I}_2 - \frac{2}{\mathbf{a}'\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{Q}_2 = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 4/5 & 3/5 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \end{array}\right], \qquad \mathbf{R} = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1)^{-1} = \mathbf{Q}_1'\mathbf{Q}_2' = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 14 \\ 10 & 10 & -5 \\ -10 & 11 & 2 \end{bmatrix}.$$

10. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ oszlopai lineárisan függetlenek, és $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ a QR-felbontás, akkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszerhez tartozó normálegyenlet-rendszer $\mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^T\mathbf{b}$, aminek $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{b}$ az optimális megoldása.

Megoldás. Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhető.

11. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. $\mathbf{A}$ pszeudoinverzének segítségével (melyet egy korábbi feladatban már meghatároztunk) határozzuk meg az $\mathbf{Ax} = (10,2,6)$ egyenletrendszer legkisebb abszolút értékű optimális megoldását! Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix QR-felbontását, és ennek felhasználásával is keressük meg az előző egyenletrendszer legkisebb abszolút értékű optimális megoldását!

Megoldás. $\mathbf{A}^+\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. A QR-felbontáshoz először a Gram–Schmidt-eljárással $\mathbf{A}$ első oszlopára merőleges vektort keresünk:

$$\mathbf{v}_1 = (2,-2,0), \quad \mathbf{v}_2 = (0,1,2) - \frac{(0,1,2)\cdot(2,-2,0)}{|(2,-2,0)|^2}(2,-2,0) = (0,1,2) - \frac{-2}{8}(2,-2,0) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2\right)$$

A $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ vektorok normáltjai lesznek $\mathbf{Q}$ oszlopai:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ -1 & 1/3 \\ 0 & 4/3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{R} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1/2 & 1/6 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix} = \sqrt{2}\begin{bmatrix} 1/4 & 1/12 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T = \sqrt{2}\begin{bmatrix} 1/4 & 1/12 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/18 & -2/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 4/9 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

HF. Igazoljuk, hogy blokkdiagonális mátrix esetén

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{A}_k \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^+ & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2^+ & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{A}_k^+ \end{bmatrix},$$

és ez alapján határozzuk meg a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix pszeudoinverzét.