Felsőbb Matematika (2013-14 ősz) 5. gyakorlat

1. Írjuk fel az alábbi mátrixok sajátfelbontását, annak diadikus alakját, illetve a spektrálfelbontásukat!

$$\text{(a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{(b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{(c) } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. (a) Szimmetrikus mátrixról van szó, így ortogonálisan diagonlaizálható, vagyis a sajátfelbontása $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T$, ahol $\mathbf{D} = diag(1, 1, -2)$ és egy lehetséges választás $\mathbf{Q}$-ra

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Ez alapján a diadikus alak $\mathbf{A} = 1\mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T + 1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^T + (-2)\mathbf{q}_3\mathbf{q}_3^T$, a spektrálfelbontás pedig $\mathbf{A} = 1\mathbf{P}_1 + (-2)\mathbf{P}_{-2}$ ahol $\mathbf{P}_1 = \mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T + \mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^T$ és $\mathbf{P}_{-2} = \mathbf{q}_3\mathbf{q}_3^T$.

(b) Ugyancsak szimmetrikus mátrixról van szó. Most $\mathbf{D} = diag(3, 0, 0)$ és egy lehetséges választás $\mathbf{Q}$-ra

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Ez alapján a diadikus alak $\mathbf{B} = 3\mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T$, a spektrálfelbontás pedig $\mathbf{B} = 1\mathbf{P}_3 + 0\mathbf{P}_0$ ahol $\mathbf{P}_3 = \mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T$ és $\mathbf{P}_0 = \mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^T + \mathbf{q}_3\mathbf{q}_3^T$.

(c) A mátrix nem szimmetrikus, de van 3 független sajátvektora, így diagonalizálható: $\mathbf{C} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1}$, ahol $\mathbf{D} = diag(2, 2, 0)$ és egy lehetséges választás $\mathbf{U}$-ra

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}^{-1} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Ez alapján a diadikus alak $\mathbf{C} = 2\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + 2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^T$, a spektrálfelbontás pedig $\mathbf{C} = 2\mathbf{P}_2 + 0\mathbf{P}_0$ ahol $\mathbf{P}_2 = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^T$ és $\mathbf{P}_0 = \mathbf{u}_3\mathbf{v}_3^T$.

2. Számítsuk ki a k-adik Fibonacci-számot ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$)!

Megoldás. Mátrixegyenletbe írva:

$$\begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{bmatrix}$$

$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 - \lambda - 1$, $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, a sajátvektorok $\mathbf{x}_i = (\lambda_i, 1)$ $(i = 1, 2)$. $\begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\mathbf{A}^n = \mathbf{C}\Lambda^n\mathbf{C}^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{bmatrix}$$

amiből $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

3. Mutassuk meg, hogy az alábbi (valós) mátrixok mind hasonlók:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix}$, ahol a, b, c és d tetszőleges nem 0 értékek;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{bmatrix}$, ahol a, b, c és d tetszőleges nem 0 értékek;

(c) $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$, ahol $a \neq c$ tetszőleges, egymástól különböző értékek;

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Megoldás. (a) Új bázist adunk meg, amelyben az első leképezés mátrixa a második mátrix lesz. Az új bázist $\mathbf{e}_1$, $\alpha\mathbf{e}_2$ alakban keressük. Látható, hogy $\alpha = b/a$ megfelelő. A 3-4. mátrixhoz elég az elsőt transzponálni. Erre a mellékátlóban-csupa-1 mátrix jó.

(b) Az előző feladatbeli mátrixok realizálják a hasonlóságot itt is.

(c) Mindkét mátrixnak két sajátértéke van, az a és a c, így a hozzájuk tartozó sajátvektorokból álló bázisban az első mátrix diagonális lesz.

(d) Az $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ vektorok bázist alkotnak, melyeket az első mátrix a második szerint képez le.

4. Ábrázoljuk az $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 20y + 5 = 0$ egyenletű másodrendű görbét! Határozzuk meg centrumát, és tengelyeinek egyenletét!

Megoldás. Az $\mathbf{A}$ sajátfelbontásából $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x} + C = \mathbf{x}_1^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{x}_1 + C$, ahol $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{B} = [-10 \;\; -20], \quad C = 5,$$

azaz $10x_1^2 + 5y_1^2 - 10\sqrt{5}y_1 + 5 = 0$, amiből $10x_1^2 + 5(y_1^2 - 2\sqrt{5}y_1 + 5) = 20$, azaz $(x_2, y_2) = (x_1, y_1 - \sqrt{5})$ jelöléssel: $2x_2^2 + y_2^2 = 4$. A középpont $(x_1, y_1) = (0, \sqrt{5})$, azaz $(x, y) = \mathbf{Q}(0, \sqrt{5}) = (1, 2)$, a rajta átmenő tengelyek iránytangense 2 és $-1/2$.

5. Számítsuk ki az alábbi mátrixok szinguláris érték szerinti felbontásának teljes és redukált alakját, és írjuk fel a hozzá tartozó diadikus felbontást!

$$(a) \begin{bmatrix} -\frac{4}{13} & 6 \\ \frac{111}{13} & -4 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(d)\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ -2 & 3 & -2\\ 4 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

Megoldás. *(a)* a teljes és a redukált alakok megegyeznek,

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix}73 & -36\\ -36 & 52\end{bmatrix},\ x^2 - 125x + 2500,\quad \begin{matrix}\lambda_1 = 100,\ \lambda_2 = 25,\\ \sigma_1 = 10,\ \sigma_2 = 5\end{matrix}$$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix}-5 & 12\\ 12 & 5\end{bmatrix},\ \mathbf{V} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & 3\\ -3 & 4\end{bmatrix}$$

(b) $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$-ból indulva $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$, a sajátvektorok $\lambda = 3$: $(1, 2, 1)$, $\lambda = 1$: $(1, 0, -1)$, $\lambda = 0$: $(1, -1, 1)$. Innen a felbontás:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}, \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}, \mathbf{V} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

A redukált felbontás

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

(c) Hasonlóan az előzőhöz:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix},\quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

(d) A teljes felbontás mátrixai:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{V} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

a redukált felbontás:

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

6. Határozzuk meg a fenti mátrixok pszeudoinverzét!

Megoldás. *(a)* $\begin{bmatrix}2/25 & 3/25\\ 111/650 & 2/325\end{bmatrix}$, *(b)* $\begin{bmatrix}-1/3 & 2/3\\ 1/3 & 1/3\\ 2/3 & -1/3\end{bmatrix}$, *(d)* $\begin{bmatrix}-1/9 & 0 & 2/9\\ -1/9 & 1/9 & 0\\ 1/6 & -1/9 & -1/9\end{bmatrix}$

7. Határozzuk meg az (d)-beli mátrix polárfelbontását is!

Megoldás. $\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

8. Tudjuk, hogy az $\mathbf{A} = \mathbf{U}\operatorname{diag}(4, -2, -2, 0)\mathbf{U}^T$ az $\mathbf{A}$ mátrix sajátfelbontása, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{U} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

Írjuk fel $\mathbf{A}$ szinguláris felbontását!

Megoldás. Az $\mathbf{A} = \mathbf{U}\operatorname{diag}(4, 2, 2, 0)\left(\operatorname{diag}(1, -1, -1, 1)\mathbf{U}^T\right)$ az $\mathbf{A}$ szinguláris felbontása, azaz $\mathbf{V}^T$ úgy kapható meg $\mathbf{U}^T$-ból, ha második és harmadik sorát -1-gyel szorozzuk. A módszer tetszőleges sajátfelbontás esetén működik.

HF. Írjuk fel az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

mátrix sajátfelbontását, annak diadikus alakját, illetve a spektrálfelbontását. Hogyan bonthatunk fel egy tetszőleges $\mathbb{R}^3$-beli vektort e mátrix sajátaltereibe eső vektorok összegére? Bontsuk fel így az $(1, 2, 3)$ vektort!