Felsőbb Matematika (2013-14 ősz) 6. gyakorlat

1. Hozzuk ortogonális hasonlósági transzformációval felső háromszögalakra az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 14 & -9 \\ 0 & 16 & -10, \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & -3 \\ 3 & 17 & -6 \\ -12 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixokat!

Megoldás. A $\mathbf{A}$ mátrixnál a jobb alsó 2×2-es mátrix sajátértéke $\lambda = 2$. A sajátvektor $^1/_5(3, 4)$. Kiegészítjük teljes bázissá, a bázistranszformáció mátrixa:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

A felsőháromszög-mátrix:

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}'\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -25 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{B}$ mátrixnál a karakterisztikus polinom $-x^3 + 28x^2 - 245x + 686 = (7 - x)^2(14 - x)$. A 7 kétszeres sajátérték, a sajátaltér 1-dimenziós, sajátvektor $\mathbf{x}_1 = (2, 3, 6)$, a 14-hez tartozó sajátvektor $\mathbf{x}_2 = (9, 17, 13)$, diagonalizálni nem lehet.

Az első sajátvektorhoz választunk egy ortonormált bázist, abból képezzük az $\mathbf{U}_1$ és az $\mathbf{U}_1^T\mathbf{B}\mathbf{U}_1$ mátrixot:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{U}_1 = [\mathbf{x}_1|\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_3] = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 3 & -2 & -6 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}_1^T\mathbf{B}\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -21 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{B}_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

tehát

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$$

A 7 sajátértékhez tartozó sajátvektor $(0, 1)$, rá merőleges a $(1, 0)$. Így

$$\mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_2 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{U}_2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Innen

$$\mathbf{U} = \mathbf{V}_1\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 2/7 & 3/7 & -6/7 \\ 3/7 & -6/7 & -2/7 \\ 6/7 & 2/7 & 3/7 \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{U}^T\mathbf{B}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 7 & -21 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

2. Melyek normálisak és melyek pozitív definitek az alábbi mátrixok közül?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. Mindegyik mátrix szimmetrikus vagy ferdén szimmetrikus, így normális. $\mathbf{B}$ nem szimmetrikus, így nem lehet definit. Az $\mathbf{A}$ főátlójában van 0, így nem lehet pozitív definit, például mert $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] = 0$. $\det \mathbf{C} = 0$, így $\mathbf{C}$ nem lehet pozitív definit. $\mathbf{E}$ főátlójában van negatív elem, így nem lehet pozitív definit. $\mathbf{D}$-nek két pozitív sajátértéke van, ezért pozitív definit.

3. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, akkor az alábbi állítások ekvivalensek:

1. $\mathbf{A}$ pozitív definit;
2. van olyan szimmetrikus, pozitív definit $\mathbf{X}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{X}^2$;
3. van olyan invertálható $\mathbf{Y}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{Y}^T\mathbf{Y}$.

Megoldás. 1. $\Rightarrow$ 2.: $\mathbf{A} = \mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^T = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{D}\mathbf{C}^T = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}^T = \mathbf{X}^2$

2. $\Rightarrow$ 3.: $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$ megfelel.

3. $\Rightarrow$ 1.: $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{Y}^T\mathbf{Y}\mathbf{x} = |\mathbf{Y}\mathbf{x}|^2 \geq 0$ és az invertálhatóság miatt $\neq 0$, ha $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

4. Mutassuk meg a karakterisztikus egyenlet felírása nélkül, hogy az alábbi mátrixnak van legalább két valós sajátértéke:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A 9-közepű 1-sugarú Gerschgorin-körben csak 1 gyök lehet, így az valós, és mivel 4 gyök van, a nem-valósak párosan fordulnak elő, ezért kell még valós gyöknek lennie.

5. Számítsuk ki az alábbi vektorok megadott normáit!

1. $\mathbf{x} = (\sqrt{3} - \mathrm{i}, 6\mathrm{i}, 3)$, $\mathbf{y} = (0.1, -0.2, -0.2)$, $p = 1, 2, \infty$;
2. $(1,2,2)$, $(2,3,6)$, $(1,4,8)$, $(4,4,7)$, $p = 2$;
3. $(\mathrm{i}, 2, \sqrt{2} - \sqrt{2}\mathrm{i}, -4i)$, $p = 1, 2, \infty$;
4. $(3,4,5)$, $(11,12,13,14)$, $p = 3$;

Megoldás. 1. $\|\mathbf{x}\|_1 = 11$, $\|\mathbf{x}\|_2 = 7$, $\|\mathbf{x}\|_\infty = 6$, $\|\mathbf{y}\|_1 = 0.5$, $\|\mathbf{y}\|_2 = 0.3$, $\|\mathbf{x}\|_\infty = 0.2$.

2. Ezek az úgynevezett Pitagoraszi számnégyesekből képzett vektorok, amelyekben a koordináták négyzetösszege négyzetszám, így a 2-normájuk egész. A normák 3, 7, 9, 9.
3. 9, 5, 4;
4. 6, 20;

6. Számítsuk ki az alábbi mátrixok Frobenius-, 1-, 2- és ∞-normáját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. $\|\mathbf{A}\|_F = 5$, $\|\mathbf{A}\|_1 = 6$, $\|\mathbf{A}\|_2 = 5$, $\|\mathbf{A}\|_\infty = 6$.
$\|\mathbf{B}\|_F = 5$, $\|\mathbf{B}\|_1 = 7$, $\|\mathbf{B}\|_2 = 5$, $\|\mathbf{B}\|_\infty = 4$.
$\|\mathbf{C}\|_F = \sqrt{13}$, $\|\mathbf{C}\|_1 = 4$, $\|\mathbf{C}\|_2 = 3$, $\|\mathbf{C}\|_\infty = 4$
$\|\mathbf{D}\|_F = 9$, $\|\mathbf{D}\|_1 = 8$, $\|\mathbf{D}\|_2 = 8$, $\|\mathbf{D}\|_\infty = 8$.
$\|\mathbf{E}\|_F = 3\sqrt{3}$, $\|\mathbf{E}\|_1 = 5$, $\|\mathbf{E}\|_2 = 3$, $\|\mathbf{E}\|_\infty = 5$.
$\|\mathbf{F}\|_F = 3\sqrt{3}$, $\|\mathbf{F}\|_1 = 5$, $\|\mathbf{F}\|_2 = 5$, $\|\mathbf{F}\|_\infty = 5$.

7. Legyen d_i az $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^i$ nullterének dimenziója, $i = 1, 2, \ldots, s$, ahol s a maximális kitevő. Képezzük a $d'_i = d_i - d_{i-1}$ és abból a $d''_i = d'_i - d'_{i+1}$ (legyen $d_0 = d'_{s+1} = 0$). Mi a d' és a d'' sorozat elemeinek jelentése?

Megoldás. $d'_i = d_i - d_{i-1}$ a legalább i-hosszú Jordan-láncok száma, $d''_i = d'_i - d'_{i+1}$ a pontosan i-hosszú Jordan-láncok száma.

8. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-féle normálalakját, $\mathbf{J}$-t, és az $\mathbf{A}^{100}$, $e^{\mathbf{J}}$, $e^{3\mathbf{A}}$ mátixokat.

$$a)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad b)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \quad c)\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad d)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás. *a)* A mátrix sajátértékei és sajátvektorai: az 1 sajátértékhez tartozik a $(-1,1,0)$ és a $(-1,0,1)$, míg a 0 sajátértékhez a $(-1,1,1)$ sajátvektor. E vektorok lineárisan függetlenek, a belőlük alkotott bázisban a mátrix diagonális alakot ölt, melynek főátlójában a sajátértékek vannak. Az eredeti és a diagonális mátrix hasonló, a hasonlóság $\mathbf{C}$ mátrixa a sajátvektorokból áll. Ez és ennek inverze:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Így tehát

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tudjuk, hogy ha az f hatványsor konvergenciatartományának belsejében tartalmazza az $\mathbf{A}$ mátrix spektrumát, és $\mathbf{A} = \mathbf{CJC}^{-1}$, ahol $\mathbf{J}$ az $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakja, akkor $f(\mathbf{A}) = \mathbf{C}f(\mathbf{J})\mathbf{C}^{-1}$.

Itt $f(\mathbf{J})$ úgy kapható meg, hogy $\mathbf{J}$ minden Jordan-blokkjára alkalmazzuk az f függvényt. Mivel e feladatban minden Jordan-blokk 1×1-es, hisz a normálalak diagonális, ezért csak a főátló elemeire kell alkalmazni f-et. Eszerint

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{100} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1^{100} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az eredmény meglepő, de ha csak $\mathbf{A}^2$-et kiszámoltuk volna, láthattuk volna, hogy $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}$ minden pozitív egész n-re. Bár ezt az eredményt az $e^{3\mathbf{A}}$ kiszámításánál is fölhasználhatnánk, kövessük a fent vázolt utat:

$$e^{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^1 & 0 \\ 0 & 0 & e^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad e^{3\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 0 & e^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

és az utóbbi mátrixot felhasználva

$$e^{3\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} e^{3\mathbf{J}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^3-1 & e^3-1 & e^3-1 \\ 1-e^3 & 1 & 1-e^3 \\ 1-e^3 & 1-e^3 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Először meghatározzuk a sajátértékeket a hagyományos módon, azaz a karakterisztikus polinommal (az első sort levonjuk a többi sorból, majd az összes oszlopot hozzáadjuk az első oszlophoz):

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-\lambda & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}$$

A karakterisztikus polinom 1 főegyütthatóval felírva: $(n-\lambda)\lambda^{n-1}$, tehát az n egyszeres, a 0 $(n-1)$-szeres sajátérték.

A csupa 1-esből álló $n\times n$-es $\mathbf{U}$ mátrix egyik sajátvektora a csupa 1-esből álló vektor, hisz $\mathbf{U}\cdot(1,1,\dots,1) = (n,n,\dots,n)$, és a hozzá tartozó sajátérték n. Másrészt $\mathbf{J}$ minden vektort $(k,k,\dots,k)$ alakú vektorba visz, azaz a képtér 1-dimenziós, így a magtér $(n-1)$-dimenziós. Eszerint a 0 sajátértékhez tartozó sajátaltér $(n-1)$-dimenziós, így kiválasztható a sajátvektorok közül egy ortonormált rendszer. A sajátvektorokból, mint oszlopokból képzett mátrix legyen $\mathbf{C}$, ennek első oszlopa legyen az egységnyi $(\frac{1}{\sqrt{n}},\dots,\frac{1}{\sqrt{n}})$. Mivel $\mathbf{C}$ ortogonális, ezért inverze $\mathbf{C}^T$. A normálalak egyet kivéve minden eleme 0, ezért a $\mathbf{C}$ mátrixnak csak egyetlen sora befolyásolja az eredményt. Tehát

$$\mathbf{U}^{100} = \mathbf{C}\mathbf{J}^{100}\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & ? & \dots & ? \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & ? & \dots & ? \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & ? & \dots & ? \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n^{100} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ ? & ? & \dots & ? \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ? & ? & \dots & ? \end{bmatrix} = n^{99}\mathbf{U}$$

Hasonlóképp általában $\mathbf{U}^m = n^{m-1}\mathbf{U}$. Az $e^{\mathbf{J}}$ bal felső sarkában e^n áll, főátlójában 1-esek, egyebütt 0. Az $e^{3\mathbf{J}}$ hasonló, csak ott a sarokban e^{3n} áll. Ebből az $e^{3\mathbf{A}}$ már az előzőkhöz hasonlóan kapható meg, ha $e^{3\mathbf{J}}$-t felbontjuk egy $K+I$ összegre.

c) E mátrix háromszög alakú, így főátlójából leolvasható a karakterisztikus polinom: $(\lambda-2)^2(\lambda+5)$. A 2-höz tartozó sajátvektor $(1,0,0)$, a -5-höz tartozó $(-9/7,0,1)$, ezért a Jordan-mátrix alakja $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

Keresünk egy harmadik bázisvektort, jelölje (x,y,z). Ekkor a $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & x & -9/7 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & z & 1 \end{bmatrix}$ mátrixra igaz, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{J}\mathbf{B}^{-1}$, azaz $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{J}$. Ebből a $\mathbf{B}$-ben lévő ismeretlenekre megoldható egyenletrendszert kapunk, egy megoldás: $x = z = 0$, $y = 1/3$, ennek inverze $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9/7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Mivel $(x^{100})' = 100x^{99}$, $(e^x)' = e^x$, $(e^{3x})' = 3e^{3x}$, ezért

$$\mathbf{J}^{100} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 100\cdot 2^{99} & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{bmatrix}, \quad e^{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-5} \end{bmatrix}, \quad e^{3\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} e^6 & 3e^6 & 0 \\ 0 & e^6 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-15} \end{bmatrix}.$$

Innen az $\mathbf{A}^{100} = \mathbf{B}\mathbf{J}^{100}\mathbf{B}^{-1}$ és $e^{3\mathbf{A}} = \mathbf{B}e^{3\mathbf{J}}\mathbf{B}^{-1}$ felhasználásával

$$\mathbf{A}^{100} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 100 \cdot 3 \cdot 2^{99} & \frac{9}{7}(2^{100} - 5^{100}) \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{bmatrix}, \quad e^{3\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^6 & 9e^6 & \frac{9}{7}(e^6 - e^{-15}) \\ 0 & e^6 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-15} \end{bmatrix}.$$

d) Először is $\mathbf{A}^{100}$ könnyen számolható, hisz néhány hatványozás után látszik, hogy $\mathbf{A}^3 = I$, így $\mathbf{A}^{99} = I$, tehát $\mathbf{A}^{100} = \mathbf{A}$. De a további kérdésekhez nem kerülhetjük el a karakterisztikus egyenlet meghatározását, ami $-\lambda^3 + 1 = 0$, azaz $\lambda^3 = 1$, aminek a harmadik egységgyökök a megoldásai, azaz az $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ jelöléssel a három sajátérték: $\varepsilon^0 = 1$, ε és $\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. A sajátértékekhez tartozó sajátvektorok, az áttérés $\mathbf{C}$ mátrixa és a $\mathbf{C}^{-1}$ mátrix:

$$1: \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon: \begin{bmatrix} \varepsilon^2 \\ \varepsilon \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon^2: \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon^2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{így } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ és } \mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{bmatrix}.$$

Itt a számolásokban kihasználhatjuk, hogy $\varepsilon^3 = 1$ és $\varepsilon^2 = -\varepsilon - 1$. Mivel $\mathbf{J}$ diagonális mátrix, konkrétan $\mathbf{J} = \operatorname{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2)$, így azonnal adódik, hogy $\mathbf{J}^{100} = \operatorname{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2)$, hisz $\varepsilon^{100} = \varepsilon$. Innen is kijön, csak bonyolultan, hogy $\mathbf{A}^{100} = \mathbf{C}\mathbf{J}^{100}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{A}$. Hasonlóképp $e^{\mathbf{J}} = \operatorname{diag}(e, e^{\varepsilon}, e^{\varepsilon^2})$ és $e^{3\mathbf{J}} = \operatorname{diag}(e^3, e^{3\varepsilon}, e^{3\varepsilon^2}) = \operatorname{diag}(e^3, e^{-3/2}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2} + ie^{-3/2}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}, e^{-3/2}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2} - ie^{-3/2}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2})$. Innen $e^{3\mathbf{A}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$, ahol $a = e^3 + 2e^{-3/2}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $b = e^3 - e^{-3/2}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}e^{-3/2}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $c = e^3 - e^{-3/2}\cos\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}e^{-3/2}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

9. Ellenőrizzük Perron tételét az alábbi mátrixra:

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Sajátértékek: 10, 3, 3, jobb Perron-vektor: $(5/25, 9/25, 11/25)$, bal Perron-vektor: $(4/7, 2/7, 1/7)$.

10. Határozzuk meg, hogy az alábbi mátrixok irreducibilisek vagy reducibilisek! A reducibilisekhez határozzuk meg a permutációs mátrixot is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Az $\mathbf{A}$ reducibilis, a $\mathbf{B}$ irreducibilis, a permutációs mátrix és a szimmetrikusan permutált $\mathbf{A}$ mátrix:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

HF. Egy 10×10-es $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Az $\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 8, 6, 5, 4, 4. Az $\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 7, 6, 6. Írjuk fel $\mathbf{A}$ Jordan-alakját!