2013 Felsőbb matematika, vizsgatematika

▶ jelentése: bizonyítás is. v1.0

Vektorok: vektorok lineáris kombinációja, lineáris függetlensége, vektorműveletek, távolság, szög, Pithagorász-tétel, Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség, háromszögegyenlőtlenség, vektor vetítése egy másik egyenesére. Koordinátázás, számtestből képzett rendezett n-esek tere, skaláris szorzás nemstandard bázisban. Gauss-Jordan-kiküszöbölés, elemi sorműveletek hatása a sor- és oszloptérre, altér dimenziója, vektorrendszer/mátrix rangja, egyenletrendszer megoldhatóságának mátrixrangos feltétele, a homogén és inhomogén egyenletrendszerek megoldásai, és azok terei. Nulltér, ▶ a nulltér altér; bázistétel. Mátrixműveletek, blokkmátrixok, báziscsere, az áttérés mátrixa, LU-felbontás, egyenletrendszer megoldása LU-felbontással. Lineáris leképezések, ▶ minden (végesdimenziós terek közti) lineáris leképezéshez létezik mátrix, mely azt a leképezést generálja; Forgatás mátrixa. Altérre való merőleges vetítés mátrixa, ▶ ortogonális vektorok függetlensége; ▶ Gram-Schmidt ortogonalizáció; QR-felbontás, ▶ a QR-felbontás létezése; $\mathbf{R}$ kiszámítása $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{A}$ ismeretében. Tükrözés mátrixa. QR-febontás tükrözéssel és forgatással (Householder-tükrözés, Givens-forgatás). $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ nulltere megegyezik. Vektor egyértelmű előállíthatósága egy $\mathcal{A}$- és egy $\mathcal{A}^{\perp}$-beli vektor összegeként, ▶ $\operatorname{rang}(\mathbf{A})+\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A}))=n$, ▶ $\mathcal{S}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$. ▶ megoldható egyenletrendszer egyértelmű megoldása a sortérben és e megoldás abszolút értékének minimalitása; ellentmondásos egyenletrendszer optimális megoldása a normálegyenletből. Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér, sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása, ▶ különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineáris függetlensége, mátrixok hasonlósága, ▶ hasonló mátrixok karakterisztikus polinomjai megegyeznek; megegyezik spektrumuk, rangjuk, nyomuk, determinánsuk, nullitásuk. Az algebrai és geometriai multiplicitás viszonya, ▶ a diagonalizálhatósággal ekvivalens állítások. Komplex mátrixok, adjungált, skaláris szorzás komplex vektortérben, önadjungált, unitér, ferdén önadjungált, normális mátrixok, önadjungált és unitér mátrix determinánsa; mátrix unitér/ortogonális diagonalizálhatósága, Schur-felbontás, ▶ $\mathbf{A}$ pontosan akkor diagonalizálható unitéren, ha normális; pontosan akkor diagonalizálható ortogonálisan, ha szimmetrikus; spektrálfelbontás, Jordan-normálalak, általánosított sajátvektor, Jordan-lánc, Jordan-bázis konstrukciója. Kvadratikus alak, főtengelytétel, definit és indefinit mátrixok, definitség megállapítása a sajátértékekből és a főminorokból. Szinguláris értékek, szinguláris értékek szerinti felbontás (SVD) és annak redukált alakja, ▶ SVD létezése; SVD és a négy altér kapcsolata, polárfelbontás, általánosított inverz, ellentmondásos egyenletrendszer megoldása általánosított inverzzel, Gerschgorin-körök, ▶ Gerschgorin-tétel, hatványiteráció (hatványmódszer), eltolt és inverz hatványmódszer, Mátrixfüggvények. Véges Markov-láncok, átmenetmátrix, Perron-tétel pozitív mátrixokra, Collatz–Wielandt-formula, irreducibilis és primitív mátrixok, Perron–Frobenius-tétel, $\lim_{k\to\infty}(\mathbf{A}/r)^k$ értéke ha $\mathbf{A}$ primitív. Test, vektortér, euklideszi tér, norma (p-norma), normák ekvivalenciája, mátrixnormák (Frobenius, indukált, 1-norma, ∞-norma). Duplán sztochasztikus mátrixok, Frobenius–Kőnig-tétel, Birkhoff-tétel.