Felsőbb matematika vizsga – 2014-01-21

Név ______________________ **Neptun** __________

Az összesen szerezhető 25 pontból legalább 10 pontot el kell érni. A bekeretezett részbe kell a választ beírni. Csak annyit írjunk be, amennyit a feladat kér! Részletszámításokat sehol nem kérünk. A vizsgán semmilyen segédeszköz nem használható.

1. Tekintsük a 2-elemű $\mathbb{F}_2$ test fölötti 5-dimenziós tér alábbi öt vektorát: $\mathbf{v}_1 = (1,1,1,0,0)$, $\mathbf{v}_2 = (1,0,1,1,1)$, $\mathbf{v}_3 = (0,1,0,1,0)$, $\mathbf{v}_4 = (0,1,0,0,1)$, $\mathbf{v}_5 = (1,1,1,0,1)$. Hány dimenziós az általuk kifeszített altér? Állítsuk elő a $\mathbf{w} = (1,1,1,1,1)$ vektort ezek lineáris kombinációjaként! *(2 pont)*

a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok mátrixának rref-ja: $\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$, így a rang 4 és $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$.

2. Írjuk fel annak a lineáris leképezésnek a standard bázisra vonatkozó mátrixát, amely a valós 3-dimenziós teret az $(1,-3,3)$ vektor irányában az $x+y+z=0$ síkra vetíti! *(2 pont)*

$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&-3\\-1&0&3\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}0&-1&-1\\3&4&3\\-3&-3&-2\end{bmatrix}$

3. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}3&0\\0&1\\4&0\end{bmatrix}$ mátrix redukált szinguláris felbontását, és ezt használva írjuk fel azt az 1-rangú mátrixot, mely Frobenius-normában a legközelebb van $\mathbf{A}$-hoz. *(2 pont)*

$\begin{bmatrix}0.6&0&-0.8\\0.0&1&0.0\\0.8&0&0.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, a legközelebbit a legnagyobb szinguláris érték megtartásával kapjuk: $\begin{bmatrix}3&0\\0&0\\4&0\end{bmatrix}$

4. Írjuk fel az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix}4&2\\3&1\end{smallmatrix}\right]$ mátrix első oszlopát az $(5,0)$ vektorba vivő Givens-forgatás $\mathbf{G}$ és Householder-tükrözés $\mathbf{H}$ mátrixát! *(2 pont)*

$\mathbf{G} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}4&-3\\3&4\end{bmatrix}$, $\mathbf{H} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}4&3\\3&-4\end{bmatrix}$.

5. Mely mátrixok diagonalizálhatók a valós test fölött? (röviden indokoljuk a választ!) *(1.5 pont)*

a) $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$, *b)* $\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$, *c)* $\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

a) nem, mert már Jordan-alakban van, és az nem diagonális, *b)* igen, mert szimmetrikus, és az még ortogonálisan is diagonalizálható, *c)* igen, mert 3 különböző sajátértéke van.

6. Egy 8×8-as $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei 1 és 2. Az $\mathbf{A}-\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 6, 4, 3, 3, az $\mathbf{A}-2\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 7, 6, 5, 5. Írjuk fel Jordan-féle normálalakját! *(2 pont)*

$$\left[\begin{array}{ccc|cc|ccc}1&1&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&0&2&1&0\\0&0&0&0&0&0&2&1\\0&0&0&0&0&0&0&2\end{array}\right].$$

7. Mi a kapcsolat egy mátrix primitvitása és sajátértékei között? *(1 pont)*

Ha $\mathbf{A}$ nemnegatív irreducibilis mátrix, akkor pontosan akkor primitív, ha spektrálkörén csak egyetlen sajátérték van.

8. Számítsuk ki az alábbi vektor- és mátrixnormákat! *a)* $\|(3,4,5)\|_3$, *b)* $\|\mathbf{A}^{-1}\|_2$, ha $\mathbf{A}$ szinguláris értékei 3, 3, 2, 2. *c)* $\|\mathbf{B}\|_2$, ha $\|\mathbf{B}^{\mathsf{H}}\|_2 = 3$, $\|\mathbf{B}^{-1}\|_2 = 2$ és $\mathbf{B}$ egyik szinguláris értéke 2. *(1.5 pont)*

a) 6, *b)* $\frac{1}{2}$, *c)* 3.

9. Fogalmazzuk meg a mátrixok unitér diagonalizálhatóságára vonatkozó tételt, és írjuk le a tételben szereplő két legfontosabb fogalom definícióját is! *(2 pont)*

Egy komplex elemű négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixhoz pontosan akkor létezik olyan unitér $\mathbf{U}$ és diagonális $\mathbf{\Lambda}$ mátrix, hogy $\mathbf{U\Lambda U}^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}$, ha $\mathbf{A}$ normális.
$\mathbf{U}$ unitér, ha $\mathbf{UU}^{\mathsf{H}} = \mathbf{I}$.
$\mathbf{A}$ normális, ha $\mathbf{AA}^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$.

10. Adjunk meg egy olyan n-dimenziós vektort, mely minden olyan pozitív $\mathbf{A}_{n\times n}$ mátrixnak sajátvektora, melyben mindegyik sorösszeg c! Ezt fölhasználva mutassuk meg, hogy e mátrixnak c a spektrálsugara. *(2 pont)*

Ha $\mathbf{A}$ minden sorösszege c, akkor az $\mathbf{1} > \mathbf{0}$ vektor a c-hez tartozó jobb sajátvektor, így c a legnagyobb abszolút értékű sajátérték.

11. Igazoljuk, hogy bármely komplex mátrix esetén $\mathcal{S}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\bar{\mathbf{A}})$, ahol $\bar{\mathbf{A}}$ az $\mathbf{A}$ mátrix elemenkénti konjugáltja. *(3 pont)*

12. Igazoljuk, hogy különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek egymástól! *(4 pont)*