Tartalomjegyzék

Listák

Tételek, állítások, következmények

Definíciók

Kidolgozott példák

I. rész

A lineáris algebra forrásai

A lineáris algebra két fő forrásának egyike a geometria, másika az algebra vidékéről ered. Mindkét forrás jól jellemezhető egy-egy elemi fogalommal: az egyik a vektor, a másik a lineáris egyenletrendszer. E könyv első része e két fogalmat vizsgálja egészen elemi, középiskolai szintről indulva. A lineáris algebra mélyebb fogalmai már itt fölbukkannak, de csak nagyon egyszerű és a legkevésbé absztrakt formájukban. Az első rész végére látni fogjuk, hogy e két forrás már ezen a bevezető szinten szétválaszthatatlanul egyetlen folyammá válik.

Hang gliding @ Pule (CC) on flickr by purplemattfish

1 Vektorok

Általánosan elterjedt nézet szerint a természeti jelenségek leírásakor sok összefüggést számszerű adatokkal, ún. *skalárokkal* vagy *skalármennyiségekkel* fejezünk ki, míg mások leírásához a számadat mellett egy irány megadása is szükséges; ez utóbbiakat nevezzük *vektoroknak*. A valóság ennél sokkal színesebb: a téridő 4-dimenziós vektoraitól, a bitvektorokon, a gazdasági számításokban használt többszázezer-dimenziós, vagy az internetkeresők által kezelt sokmillió-dimenziós vektorokon át a matematika különböző területein gyümölcsöző absztrakt vektorfogalomig széles a skála.

Vektorok a 2- és 3-dimenziós térben

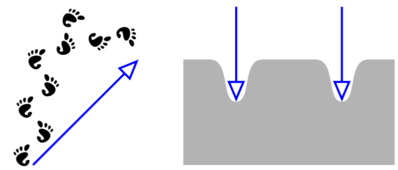
E szakaszban a vektor szemléletes, geometriai fogalmával ismerkedünk. A vektorok összeadásán és skalárral való szorzásán keresztül a lineáris kombináció és a lineáris függetlenség fogalmáig jutunk. E szakasz kulcsfogalma: egy vektor lineárisan független vektorok lineáris kombinációként való előállítása.

Irányított szakasz, kötött és szabad vektor Tekintsünk egy sárkányrepülőt repülés közben. Számtalan skalár- és vektormennyiség írja le állapotát. A földtől való távolság, a légnyomás, a légellenállási együttható vagy az emelkedés szöge skalármennyiségek, míg vektormennyiségek a sebesség- és gyorsulásvektor, a szárnyra ható felhajtóerő, a gravitációs erő, a szél ereje vagy az elmozdulást leíró vektor.

A vektor fogalma kapcsolatban van az irányított szakasz fogalmával. Irányított szakaszon olyan szakaszt értünk, melynek végpontjain megadunk egy sorrendet, azaz kijelöljük, hogy melyik a *kezdő-* és melyik a *végpontja*. Más szóhasználatban az irányított szakaszt szokás *kötött vektornak* is nevezni. Az A kezdőpontú és B végpontú irányított szakaszt $\overrightarrow{AB}$ jelöli.

Skalár, skaláris: a *lépcső*, *létra* jelentésű latin scalae (scālae) szóból ered. E szó származéka a skála szó is, mely jól őrzi az eredeti jelentést. A skalár vagy skaláris szót a matematikában szám vagy számszerű értelemben használjuk, például olyankor, amikor egy mennyiségről azt akarjuk hangsúlyozni, hogy irány nélküli, azaz nem vektor jellegű.

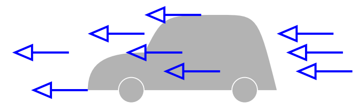
Több jelenség leírására a kötött vektor alkalmas. Természetes példa az elmozdulásvektor, mely megadja, hogy egy tárgy a tér mely pontjából melyik pontjába jutott. Másik példa kötött vektorra a rugalmas testen alakváltozást okozó erőt leíró vektor (1.1. ábra).



(a) (b)

1.1. ábra: Kötött vektorok: *(a)* elmozdulásvektor (lábnyomokkal), *(b)* rugalmas testen alakváltozást okozó erő vektora

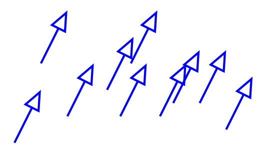
Alkalmazásokban gyakran előfordul, hogy egy jelenség különböző irányított szakaszokkal is ugyanúgy leírható. Például ha egy tárgy mozgását egy olyan irányított szakasszal jellemezzük, melynek hossza az időegység alatt megtett út hosszával egyenlő, iránya pedig a mozgás irányát jelzi, akkor mindegy hogy a tér melyik pontjából indítjuk e szakaszt, a mozgást ugyanúgy leírja (1.2. ábra). Ekkor tehát nem a két pont, hanem azok viszonya a kérdés, azaz hogy az egyik pont a másiktól milyen *távolságra*, és milyen *irányban* van. Az, hogy a két pont pontosan hol van, nem lényeges. Ekkor bármely két irányított szakasz, mely párhuzamosan egymásba tolható, ugyanazt a viszonyt fejezi ki. Az így kapott fogalmat a fizikában *szabad vektornak* nevezik. Ez a lineáris algebra vektor-fogalmának egyik forrása: a *vektor* a geometriában irányított szakasszal reprezentálható azt hozzávéve, hogy két irányított szakasz pontosan akkor reprezentálja ugyanazt a vektort, ha párhuzamosan egymásba tolhatók (ld. 1.3 ábra).



1.2. ábra: Példa szabad vektorra

Vektor: a *hordozó*, *vivő*, *utazó* jelentésű latin *vector* szóból származik. A tudomány más területein hordozó anyag, az élettanban vírushordozó értelemben használják.

Vektorok jelölésére félkövér kisbetűket használunk, pl. $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, stb. A műszaki és fizikai szakirodalomban a félkövér nagy betű is előfordul, pl. az $\mathbf{F}$ erő, a $\mathbf{B}$ indukció is vektormennyiségek.

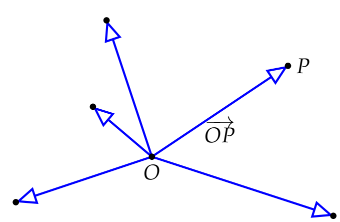


1.3. ábra: Ugyanazt a vektort reprezentáló irányított szakaszok

Vektor magadása egy irányított szakasszal Egy vektor megadható egy irányított szakasszal, azaz két pont és a köztük lévő sorrend kijelölésével. Valójában ennyi adat felesleges, hisz egy irányított szakasz önmagával párhuzamosan eltolva ugyanazt a vektort adja meg, ezért például kiköthető, hogy a kezdőpont a sík (tér) egy előre kijelölt rögzített pontja legyen. Ezt a közös kezdőpontot nevezzük *origónak*. Egy origóból induló irányított szakaszt egyértelműen definiál a végpontja, így a vektorok megadásához elég egyetlen pont, a végpont megadása. Ezzel a sík vagy tér pontjai és vektorai közt kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesíthetünk (1.4. ábra). Az origóból egy P pontba húzott irányított $\overrightarrow{OP}$ szakaszt a ponthoz tartozó *helyvektornak* is szokás nevezni. Világos, hogy minden vektor reprezentánsai közt pontosan egy helyvektor van.

Vektorok jelölése: Műszaki, fizikai szövegek szedésének tipográfiai szabályait az ISO 31-11 szabvány írja le. Eszerint a vektorok félkövér betűkkel szedendők. Kézírásban aláhúzással, vagy fölé írt nyíllal szokás jelezni a vektort (pl. $\underline{x}$, $\underline{u}$, $\vec{v}$,...), de körültekintő jelölésrendszer és jegyzetelés esetén elhagyhatók a jelzések. Felsőbb matematikai művek nem használják e szabványt, mondván, kiderül a szövegből, hogy vektort jelölnek-e a betűk (x, u, v,...).

A későbbiekben gyakran fogunk egy ponthalmazt az origóból a ponthalmaz pontjaiba mutató vektorokkal jellemezni. Amikor vektorok végpontjairól beszélünk, mindig a vektorokat megadó, az origóból indított irányított szakaszok végpontjaira gondolunk.

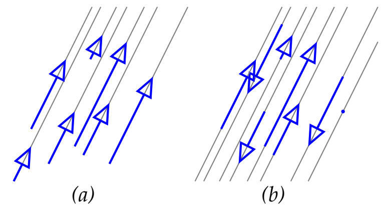


1.4. ábra: A sík pontjai és vektorai közti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés: egy P pontnak az $\overrightarrow{OP}$ vektor felel meg, az origónak a nullvektor.

Az olyan vektort, melynek kezdő és végpontja egybeesik, *zérusvektornak* vagy *nullvektornak* nevezzük. A zérusvektort általában félkövér zérussal, azaz $\mathbf{0}$-val jelöljük. A pontok és vektorok közti megfeleltetésben a zérusvektornak az origó felel meg.

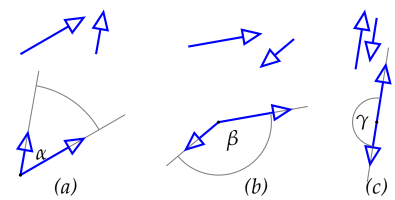
Vektor megadása hossz és irány segítségével Ha tudunk távolságot mérni és irányt meghatározni, akkor a vektor megadható hosszával és irányával is. A vektor *hosszát*, azaz két végpontjának távolságát, a vektor *abszolút értékének* is nevezzük. Az $\mathbf{a}$ vektor abszolút értékét $|\mathbf{a}|$ jelöli. Vektor abszolút értékét a vektor *euklideszi normájának* is nevezik, ugyanis speciális esete egy később részletezendő fogalomnak, a normának. Az $\mathbf{a}$ vektor (euklideszi) normájának jelölése az abszolút értékre emlékeztet: $\|\mathbf{a}\|$.

Az irány fogalmát az 1.38. feladatban definiáljuk. Itt megelégszünk annyival, hogy két nemzérus vektort *azonos irányú*nak vagy *egyirányú*nak nevezünk, ha a kezdőpontjukból induló, és a végpontjukon áthaladó félegyenesek párhuzamos eltolással fedésbe hozhatók (1.5 *(a)* ábra). Két nemzérus vektort *kollineáris*nak vagy *párhuzamos*nak nevezünk, ha az őket tartalmazó egyenesek párhuzamosak. Két vektort, amely párhuzamos, de nem egyirányú, *ellenkező irányú*nak nevezünk (1.5 *(b)* ábra). A zérusvektor irányát tetszőlegesnek tekintjük, így az bármely vektorral egyirányú. Belátható, hogy a vektort egyértelműen meghatározza hossza és iránya.



1.5. ábra: *(a)* egyirányú vektorok, *(b)* kollineáris (párhuzamos) vektorok, vannak köztük egyirányúak és ellenkező irányúak

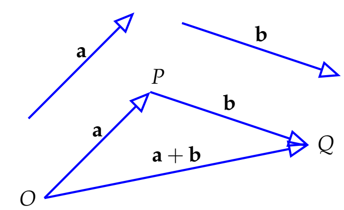
Vektor irányának meghatározásakor gyakran hívjuk segítségül a szög fogalmát. Két vektor szögén azt a szöget értjük, melyet a sík vagy tér egy tetszőleges pontjából kiinduló és az adott vektorokkal egyirányú félegyenesek zárnak be (1.6. ábra). Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szögét $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle$ jelöli. Két vektor szöge tehát mindig $0°$ és $180°$ – radiánban mérve 0 és π – közé esik, beleértve a határokat is. Egyirányú vektorok szöge 0, ellenkező irányúaké π.



1.6. ábra: Két vektor szöge ($0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$). Az ábra felső felén a két adott vektor, alatta szögük meghatározásának módja szerepel.

Vektorműveletek a 2- és 3-dimenziós térben A vektorműveletek – az összeadás és a számmal való szorzás – definíciója természetes módon adódik, ha a vektorok tipikus alkalmazásaira gondolunk. Pl. magától értetődő, hogy két elmozdulás összegén az elmozgatások egymás után való elvégzését, egy eltolás kétszeresén egy azonos irányú, de kétszer olyan hosszú eltolást értsünk.

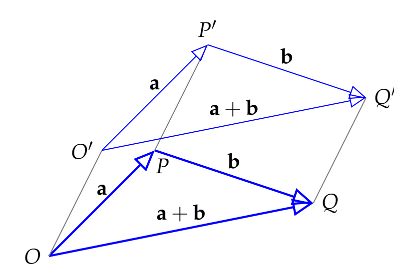
1.1. DEFINÍCIÓ (KÉT VEKTOR ÖSSZEGE – HÁROMSZÖGMÓDSZER). *Legyen adva két vektor, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$. Vegyünk föl egy tetszőleges O pontot. Indítsunk belőle egy $\mathbf{a}$-val egyenlő $\overrightarrow{OP}$ vektort, ennek végpontjából pedig egy $\mathbf{b}$-vel egyenlő $\overrightarrow{PQ}$ vektort. Az $\overrightarrow{OQ}$ vektort az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok összegének nevezzük és $\mathbf{a} + \mathbf{b}$-vel jelöljük (ld. 1.7. ábra).*



1.7. ábra: Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor összege

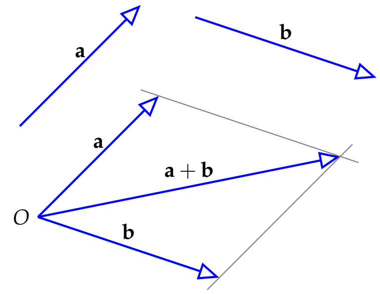
Könnyen belátható, hogy az eredmény független az O pont megválasztásától, tehát vektorok összeadásának művelete definiálható e módszerrel (a bizonyítás leolvasható az 1.8. ábráról).

Egy másik módszert is ismertetünk két nem kollineáris vektor összegének megszerkesztésére:



1.8. ábra: Az összeg független az O pont megválasztásától, ugyanis $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{O'Q'}$.

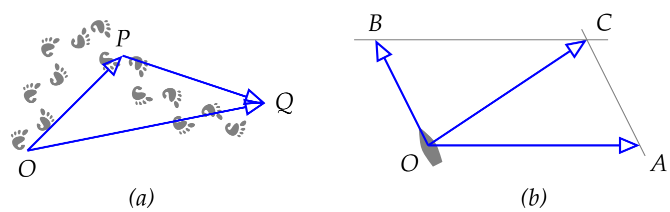
1.2. ÁLLÍTÁS (PARALLELOGRAMMA-MÓDSZER). *A közös kezdőpontból indított* **a** *és* **b** *vektorok összege megkapható abból a parallelogrammából, melynek két szomszédos oldala* **a** *és* **b***, ekkor az összeg a közös kezdőpontból indított és a parallelogramma szemközti csúcsába futó vektor.*



1.9. ábra: Parallelogramma-módszer

► Ha **a** és **b** *nem kollineárisak*, akkor összegük pl. megkapható úgy, hogy **a** végpontján át egy **b** egyenesével, **b** végpontján át egy **a** egyenesével párhuzamos egyenest húzunk. A közös kezdőpontból e két egyenes metszéspontjába futó vektor lesz az összeg (ld. 1.9. ábra).

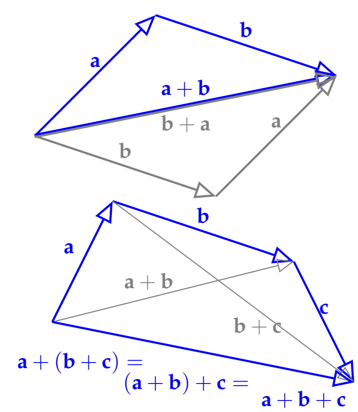
Az alkalmazásokban hol a háromszög-, hol a parallelogramma-módszer tűnik kézenfekvőbbnek (ld. 1.10).



1.10. ábra: Az *(a)* ábrán a lábnyomok O-ból P-be, majd onnan Q-ba vezetnek. Az $\overrightarrow{OP}$ és a $\overrightarrow{PQ}$ elmozdulásvektorok összege $\overrightarrow{OQ}$ (háromszögmódszer). A *(b)* ábrán a csónak az $\overrightarrow{OB}$ irányba evez, de a folyó $\overrightarrow{OA}$ irányba folyik. A két sebesség eredője, azaz összege $\overrightarrow{OC}$ (parallelogramma módszer).

Ha **a** és **b** két térbeli vektor, akkor a háromszögmódszerben és a parallelogramma-módszerben is az **a**, **b** és $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektorokat reprezentáló irányított szakaszok egy síkba esnek. Általában azt mondjuk, hogy néhány térbeli vektor egy síkba esik, más szóval *komplanáris*, ha van olyan sík, hogy mindegyik vektort reprezentáló irányított szakasz párhuzamosan betolható e síkba. Eszerint tehát az **a**, **b** és $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektorok mindig komplanárisak.

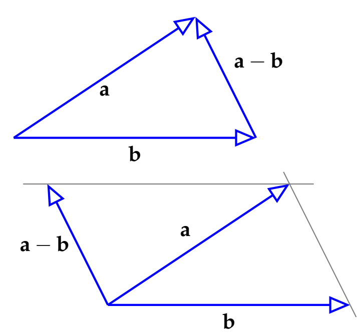
A vektorösszeadás két fontos tulajdonsága a kommutativitás ($\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$) és az asszociativitás ($\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$) könnyen leolvasható az 1.11. ábráról. Az asszociativitás következtében több tag összeadásánál elhagyható a zárójel, például az ábrabeli három vektor összegére $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ írható.



1.11. ábra: A vektorösszeadás kommutativitása és asszociativitása.

Az **a** és **b** vektorokat közös kezdőpontból indítva – a háromszögmódszerrel – azonnal látható, hogy csak egyetlen olyan **x** vektor létezik, melyre $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{x}$ (ld. 1.12 (a) ábra). Ennek felhasználásával definiálható vektorok különbsége.

1.3. DEFINÍCIÓ (VEKTOROK KÜLÖNBSÉGE). *Adva van az* **a** *és* **b** *vektor. Azt az egyértelműen létező* **x** *vektort, melyre* $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{x}$*, az* **a** *és* **b** *különbségének nevezzük és* $\mathbf{a} - \mathbf{b}$*-vel jelöljük.*



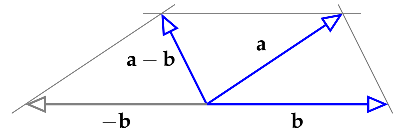
1.12. ábra: A különbségvektor meghatározása háromszög- és parallelogramma-módszerrel.

Könnyen fejben tartható a különbségvektor megszerkesztése akár a háromszög-, akár a parallelogrammamódszerrel (ld. 1.12. ábra), ha a definícióra gondolunk, azaz arra, hogy $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ az a vektor, melyet **b**-hez adva **a**-t kapunk, azaz

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + (\mathbf{a} - \mathbf{b}).$$

Az 1.13. ábráról az is leolvasható, hogy ha a $\mathbf{b}$ vektorral egyenlő hosszúságú, de ellenkező irányú vektort $-\mathbf{b}$ jelöli, akkor fönnáll az $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$ összefüggés, és így az is igaz, hogy $\mathbf{b}+(-\mathbf{b})=\mathbf{0}$.

Érdekes megjegyezni, hogy ha P és Q két tetszőleges pont, akkor az $\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$ vektort akkor is ismerjük, ha az O pontot nem, hisz az a $\overrightarrow{PQ}$ vektor. Sok hasonló jelenség vezetett a *torzor* fogalmához, melyet egy rövid széljegyzetben ismertetünk.



1.13. ábra: Az $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$ szemléltetése.

TORZOR: a modern matematika fogalma. Néhány példa, mielőtt definiálnánk: (1) Az energiát a newtoni fizikában nem tudjuk mérni, csak az energiakülönbséget. Ha viszont megállapodunk abban, hogy egy adott rendszernek melyik állapota tartozik a 0 energiaszinthez, beszélhetünk a rendszer energiájáról is. (2) A pontba mutató vektor fogalmának nincs értelme, amíg nincs kijelölve az origó, viszont két pontba mutató vektor különbségét az origótól függetlenül is meg tudjuk határozni. (3) Egy f függvény I intervallumon vett határozatlan integrálja $F+C$ alakú, ahol C konstans. Nincs értelme megkérdezni, hogy f egy konkrét primitív függvényében mennyi a C értéke, de két primitív függvény különbsége mindig egy konstans. (4) Egy hasonló jelenség a zenéből: bármely két hang közti távolság meghatározható, de azt nem mondhatjuk egy hangra, hogy az a „fá”, amíg nem rögzítjük, melyik a „dó”.

A torzort egy *kommutatív csoport* nevű algebrai struktúrával definiálhatjuk, mely egy kommutatív, asszociatív, nullelemes, invertálható művelettel ellátott és e műveletre zárt halmaz. Kommutatív csoport például a valósok az összeadásra nézve, a vektorok az összeadásra nézve, vagy $\mathbb{Z}_{12}$ az összeadásra nézve (ld. az 1.8.. példát és az 1.9.. definíciót). Legyen G egy kommutatív csoport, és X egy nem üres halmaz, melyen definiálva van bármely két elem különbsége, ami G-beli. Ekkor X-et G-*torzornak* nevezzük, ha bármely $x_0, x_1, x_2 \in X$ elem esetén, ha $x_1-x_0=g_1$ és $x_2-x_0=g_2$, akkor $x_1-x_2=g_1-g_2$. Másként fogalmazva, X őrzi G struktúráját a zéruselem nélkül úgy, hogy bármely elemét zéruselemnek választva azonnal megkapjuk G-t.

1.4. DEFINÍCIÓ (VEKTOR SZORZÁSA SKALÁRRAL). *Legyen k valós szám. Az $\mathbf{a}$ vektor k-szorosán azt a vektort értjük, melynek hossza az $\mathbf{a}$ hosszának $|k|$-szorosa, iránya*

- *tetszőleges, ha $k=0$ vagy $\mathbf{a}=\mathbf{0}$,*
- *megegyezik $\mathbf{a}$ irányával, ha $k>0$, és*
- *ellentétes, ha $k<0$ (ld. 1.14. ábra).*

A skalárral való szorzás definíciójából azonnal látszik, hogy minden $\mathbf{a}$ vektorra $1\mathbf{a}=\mathbf{a}$, $0\mathbf{a}=\mathbf{0}$ és $(-1)\mathbf{a}=-\mathbf{a}$.

E paragrafus végén összefoglaljuk a vektorműveletek legfontosabb tulajdonságait, melyek segítségével később általánosítani fogjuk a vektor fogalmát. Az eddig nem bizonyított tulajdonságok igazolását az olvasóra hagyjuk.

1.5. TÉTEL (A VEKTORMŰVELETEK TULAJDONSÁGAI). *Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ a 2- vagy 3-dimenziós tér tetszőleges vektorai, $\mathbf{0}$ a zérusvektor és r, s két tetszőleges valós szám, akkor fönnállnak az alábbi azonosságok:*

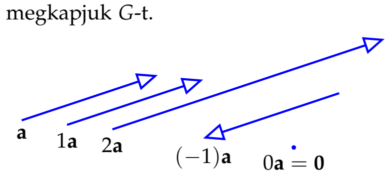
a)	$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$	*e)*	$r(s\mathbf{a})=(rs)\mathbf{a}$
b)	$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$	*f)*	$r(\mathbf{a}+\mathbf{b})=r\mathbf{a}+r\mathbf{b}$
c)	$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$	*g)*	$(r+s)\mathbf{a}=r\mathbf{a}+s\mathbf{a}$
d)	$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$	*h)*	$1\mathbf{a}=\mathbf{a}$ *és* $0\mathbf{a}=\mathbf{0}$

A lineáris kombináció definíciója Ha vektorokra a skalárral való szorzás és az összeadás műveletét alkalmazzuk, akkor e vektorok egy lineáris kombinációját kapjuk. Pontosabban:

1.6. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS KOMBINÁCIÓ). *Az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,..., $\mathbf{a}_k$ vektorok* lineáris kombináció*ján egy*

$$c_1\mathbf{a}_1+c_2\mathbf{a}_2+\ldots+c_k\mathbf{a}_k$$

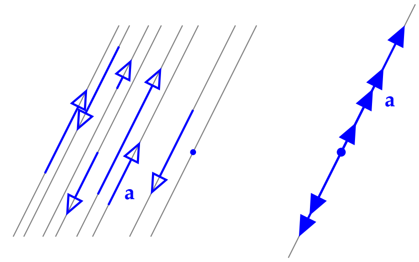
alakú vektort értünk, ahol $c_1, c_2, \ldots, c_k$ valós számok. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}$ vektor előáll *az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,..., $\mathbf{a}_k$ vektorok lineáris kombinációjaként, ha vannak olyan $c_1, c_2, \ldots, c_k$ valós számok, hogy $\mathbf{v}=c_1\mathbf{a}_1+\ldots+c_k\mathbf{a}_k$.*



1.14. ábra: Vektor skalárszorosai

Ha egy vektort egy skalárral beszorzunk, az előző definíció szerint egy lineáris kombinációját kapjuk, mely vele párhuzamos, azaz kollineáris. Így egy nemzérus vektor összes lineáris kombinációja csupa vele párhuzamos vektor (ld. 1.15. ábrát). Ennél több is igaz:

1.7. TÉTEL (VEKTORRAL PÁRHUZAMOS VEKTOROK). *Ha* $\mathbf{a}$ *nem zérusvektor, akkor bármely vele párhuzamos* $\mathbf{v}$ *vektor az* $\mathbf{a}$ *skalárszorosa, azaz van olyan* c *valós szám, hogy* $\mathbf{v} = c\mathbf{a}$*, más szóval* $\mathbf{v}$ *előáll az* $\mathbf{a}$ *valamely lineáris kombinációjaként. Ez az előállítás egyértelmű.*



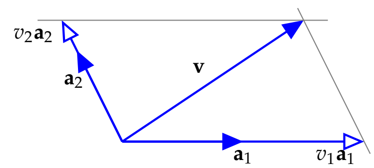
1.15. ábra: Egy nemzérus $\mathbf{a}$ vektor, és néhány lineáris kombinációja kétféle reprezentációban.

BIZONYÍTÁS. Ha a két vektor egyirányú, az előállításban szereplő c konstans egyszerűen a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{a}$ vektorok abszolút értékének hányadosa, ha ellenkező irányúak, e hányados (-1)-szerese. □

E tétel következménye, hogy ha $\mathbf{a}$ nem zérusvektor, akkor az $\mathbf{a}$ összes lineáris kombinációjának halmaza és az $\mathbf{a}$-val párhuzamos vektorok halmaza megegyezik. Másként fogalmazva: egy nemzérus vektor összes lineáris kombinációjának végpontja egy *origón átmenő egyenest ad*.

A háromszögmódszerből jól látszik, hogy tetszőleges két vektor bármely lineáris kombinációja velük komplanáris vektor lesz. Az állítás megfordítása is igaz:

1.8. TÉTEL (KÉT VEKTORRAL EGY SÍKBA ESŐ VEKTOROK). *Ha* $\mathbf{a}_1$ *és* $\mathbf{a}_2$ *nem párhuzamos vektorok, akkor bármely velük egy síkba eső* $\mathbf{v}$ *vektor előáll az* $\mathbf{a}_1$ *és* $\mathbf{a}_2$ *valamely lineáris kombinációjaként, azaz van olyan* v_1 *és* v_2 *konstans, hogy* $\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2$*. Ez az előállítás egyértelmű.*



1.16. ábra: A $\mathbf{v}$ egyértelműen előáll $\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2$ alakban, ha $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ nem párhuzamos.

BIZONYÍTÁS. A bizonyításnak a felbontás létezését biztosító része könnyen leolvasható az 1.16. ábráról. A $\mathbf{v}$ végpontjából húzzunk az $\mathbf{a}_1$ és az $\mathbf{a}_2$ vektorokkal párhuzamos egyeneseket. Az így létrejött – esetleg elfajuló – parallelogramma két oldala az előző tétel szerint $\mathbf{a}_1$, illetve $\mathbf{a}_2$ konstansszorosa, melyek összege a parallelogramma szabály szerint épp $\mathbf{v}$. Előállítottuk tehát $\mathbf{v}$-t $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ lineáris kombinációjaként. Meg kell még mutatnunk, hogy ez az előállítás egyértelmű. Legyen

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 = w_1\mathbf{a}_1 + w_2\mathbf{a}_2.$$

a $\mathbf{v}$ vektor két előállítása. Ekkor átrendezés után $(v_1 - w_1)\mathbf{a}_1 = (w_2 - v_2)\mathbf{a}_2$. Mivel $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ nem kollineárisak, konstansszorosaik csak akkor egyezhetnek meg, ha mindkettő a zérusvektor. Ugyanakkor $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}$, ezért az előző egyenlőség csak akkor áll fönn, ha $(v_1 - w_1) = (w_2 - v_2) = 0$, azaz ha $v_1 = w_1$ és $v_2 = w_2$. Tehát a felbontás egyértelmű. □

Látható tehát, hogy két nem párhuzamos vektor összes lineáris kombinációjának halmaza megegyezik a két vektorral komplanáris vektorok halmazával, egyszerűbben fogalmazva: két nem párhuzamos vektor összes lineáris kombinációjának végpontja *egy origón átmenő síkot ad*.

Abban nincs semmi meglepő, hogy a tér három nem egy síkba eső vektorának bármely lineáris kombinációja térbeli vektor, az állítás megfordítása viszont igen fontos:

1.9. TÉTEL (TÉRBELI VEKTOROK). *Ha* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ *és* $\mathbf{a}_3$ *nem egy síkba eső vektorok, akkor a tér bármely* $\mathbf{v}$ *vektora előáll az* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ *és* $\mathbf{a}_3$ *valamely lineáris kombinációjaként, azaz van olyan* v_1, v_2 *és* v_3 *konstans, hogy*

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3. \tag{1.1}$$

Ez az előállítás egyértelmű.

BIZONYÍTÁS. A $\mathbf{v}$ vektor V végpontján át párhuzamos egyenest húzunk az $\mathbf{a}_3$ vektorral, mely az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ vektorok síkját egy C pontban metszi (1.17. *(a)* ábra). Az $\overrightarrow{OC}$ vektor az előző tétel szerint egyértelműen előáll $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ lineáris kombinációjaként, azaz $\overrightarrow{OC} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2$ (ld. 1.17. *(b)* ábra). Másrészt $\mathbf{v} = \overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CV}$, ahol $\overrightarrow{CV} \parallel \mathbf{a}_3$, így $\overrightarrow{CV} = v_3\mathbf{a}_3$ valamely v_3 valósra. Tehát $\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3$.

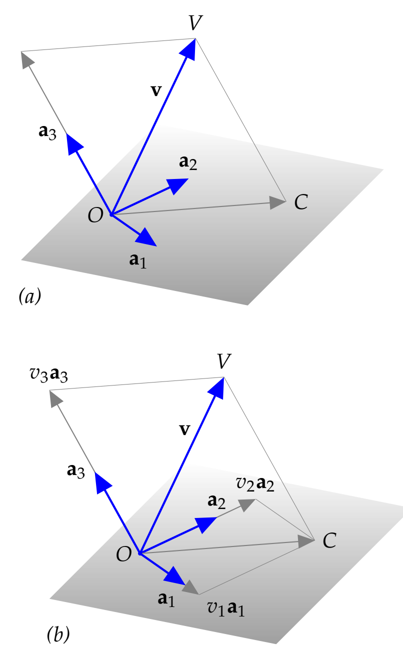
Be kell még látnunk az előállítás egyértelműségét! Tegyük fel, hogy

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3 = w_1\mathbf{a}_1 + w_2\mathbf{a}_2 + w_3\mathbf{a}_3$$

a $\mathbf{v}$ két felbontása. Ekkor $(v_1 - w_1)\mathbf{a}_1 + (v_2 - w_2)\mathbf{a}_2 + (v_3 - w_3)\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$. Így ha $v_1 \neq w_1$, akkor $\mathbf{a}_1$ kifejezhető $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{v_2 - w_2}{v_1 - w_1}\mathbf{a}_2 - \frac{v_3 - w_3}{v_1 - w_1}\mathbf{a}_3.$$

Ez ellentmond annak, hogy $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ nem esnek egy síkba. Így tehát $v_1 = w_1$. Hasonlóan kapjuk, hogy $v_2 = w_2$ és $v_3 = w_3$, azaz az (1.1) előállítás egyértelmű. □



1.17. ábra: A térbeli $\mathbf{v}$ vektor előállítása három nem egy síkba eső vektor lineáris kombinációjaként.

Lineáris függetlenség Az előző két tételből világos, hogy a tér három vektora vagy egy síkba esik, ekkor valamelyikük a másik kettő lineáris kombinációja, vagy nem esik egy síkba, és akkor egyikük sem áll elő a másik kettő lineáris kombinációjaként. Ekkor viszont a tér minden vektora előáll az ő lineáris kombinációjukként. Látjuk, alapvető, hogy egy vektor kifejezhető-e más vektorok lineáris kombinációjaként.

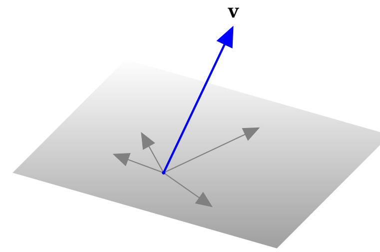
1.10. DEFINÍCIÓ (VEKTOROK FÜGGETLENSÉGE). *Azt mondjuk, hogy egy* $\mathbf{v}$ *vektor* lineárisan független *az* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_n$ *(*$n \geq 1$*) vektoroktól, ha* $\mathbf{v}$ *nem fejezhető ki e vektorok lineáris kombinációjaként. Azt mondjuk, hogy az* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_n$ *(*$n \geq 2$*) vektorok* lineárisan függetlenek *ha e vektorok egyike sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként. Ha legalább egyikük kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, azaz legalább egyikük* lineárisan függ *a többitől, akkor e vektorokat* lineárisan összefüggőknek *nevezzük. Az egyetlen vektorból álló vektorrendszert lineárisan függetlennek tekintjük, ha a vektor nem a zérusvektor.*

Például egy térbeli vektor, mely nem esik egy adott síkba, független a síkba eső vektorok bármely rendszerétől (1.19. ábra).

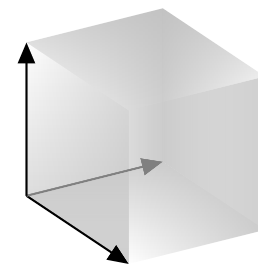
Egy kocka egy csúcsból kiinduló élvektorai lineárisan függetlenek (1.19. ábra).

Általában: bármely két nem kollineáris vektor lineárisan független, hasonlóképp, a tér bármely három nem komplanáris, azaz nem egy síkba eső vektora lineárisan független.

Az 1.8. tétel tehát a következőképp fogalmazható át:



1.18. ábra: A síkba nem eső $\mathbf{v}$ vektor nem áll elő a síkbeli vektorok lineáris kombinációjaként.



1.19. ábra: Egy kocka három egy csúcsból induló élvektora lineárisan független.

1.11. TÉTEL (SÍKBELI VEKTOR FELBONTÁSA). *Ha $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ egy sík két lineárisan független vektora, akkor a sík minden $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen előáll e vektorok lineáris kombinációjaként, azaz egyértelműen léteznek olyan v_1 és v_2 valós számok, hogy*

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2.$$

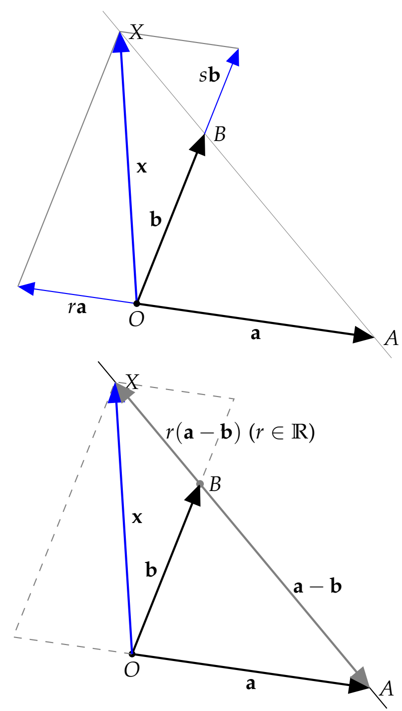
Hasonlóképp az 1.9. tétel így fogalmazható át:

1.12. TÉTEL (TÉRBELI VEKTOR FELBONTÁSA). *Ha $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ három lineárisan független térbeli vektor, akkor a tér minden $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen előáll e vektorok lineáris kombinációjaként, azaz egyértelműen léteznek olyan v_1, v_2 és v_3 valós számok, hogy*

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3.$$

A koordinátákról szóló szakaszban e két tétel lesz alapja a koordinátarendszer bevezetésének.

*Speciális lineáris kombinációk** A sík és a tér bizonyos konfigurációi jól jellemezhetők lineáris kombinációkkal, ha a kombinációs együtthatókra bizonyos feltételeket kötünk ki.



1.20. ábra: Az X pont pontosan akkor van az AB egyenesen, ha azon r és s valósokra, melyekre $\overrightarrow{OX} = r\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}$, $r + s = 1$ teljesül. Ezen az ábrán $r = -0.5$, $s = 1.5$.

1.13. ÁLLÍTÁS (KÉT PONTON ÁTMENŐ EGYENES JELLEMZÉSE). *Legyen O, A és B a sík vagy a tér három pontja. Az $r\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}$ alakú lineáris kombináció végpontja pontosan akkor mutat az A és B ponton átmenő egyenes egy pontjába, ha $r + s = 1$.*

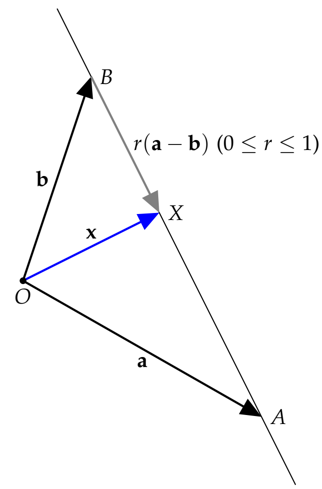
BIZONYÍTÁS. Legyen $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, és $\mathbf{x}$ mutasson az AB egyenes valamely X pontjára, azaz legyen $\mathbf{x} = \overrightarrow{OB} + r\overrightarrow{BA}$ valamilyen r valós számra, tehát

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} + r(\mathbf{a} - \mathbf{b}), \text{ azaz } \mathbf{x} = r\mathbf{a} + (1 - r)\mathbf{b}.$$

A fenti gondolatmenet lépésein visszafelé haladva látható, hogy minden valós r számra az $r\mathbf{a} + (1 - r)\mathbf{b}$ vektor végpontja az AB egyenesen van. Fogalmazhatunk úgy is, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok végpontján átmenő egyenes összes pontját pontosan azok az $r\mathbf{a} + s\mathbf{b}$ alakú lineáris kombinációk adják, amelyeknél $r + s = 1$ (ld. **??** ábra). □

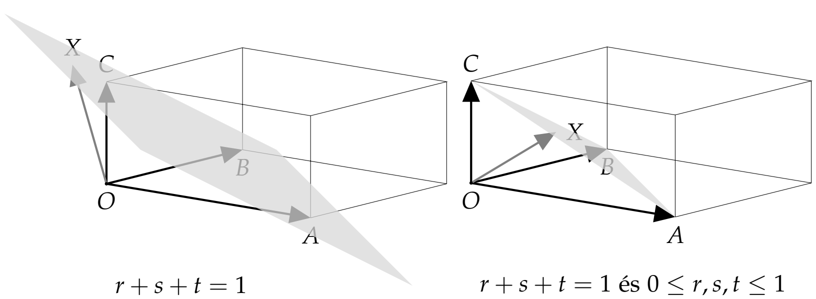
1.14. ÁLLÍTÁS (INTERVALLUM PONTJAINAK JELLEMZÉSE). *Legyen O, A és B a sík vagy a tér három pontja. Az $r\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}$ vektor pontosan akkor mutat az A és B pontot összekötő szakasz valamely pontjába, ha $r + s = 1$ és $0 \le r, s \le 1$.*

BIZONYÍTÁS. Megismételjük az előző feladat megoldását azzal a különbséggel, hogy itt a $\overrightarrow{BX} = r\overrightarrow{BA}$ összefüggés csak 0 és 1 közé eső r értékekre igaz. Tehát $\mathbf{x} = r\mathbf{a} + (1-r)\mathbf{b}$, ahol $0 \le r \le 1$. Másként fogalmazva az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok végpontjait összekötő szakasz összes pontját pontosan azok az $r\mathbf{a} + s\mathbf{b}$ alakú lineáris kombinációk adják, amelyekben $r + s = 1$ és $0 \le r, s \le 1$ (ld. 1.21 ábra). □



1.21. ábra: Az X pont pontosan akkor van az $\overline{AB}$ intervallumban, ha valamely 0 és 1 közé eső r és s valósokra $\overrightarrow{OX} = r\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}$, és $r + s = 1$.

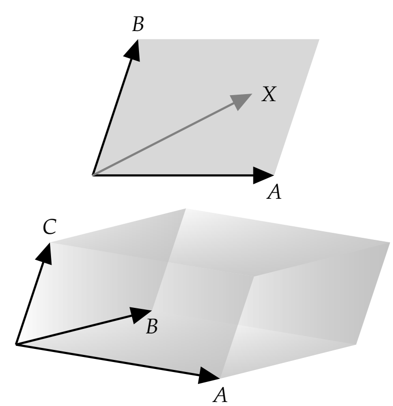
Hasonló összefüggés igaz három vektor esetén is, azaz megmutatható, hogy a nem kollineáris $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok végpontjaira fektetett sík pontjaiba pontosan azok a vektorok mutatnak, melyeket $r\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$ alakba írva $r + s + t = 1$. Ha még azt is kikötjük e három számról, hogy legyen $0 \le r, s, t \le 1$, akkor az $r\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$ alakú vektorok a három vektor végpontja által meghatározott háromszög pontjaiba mutatnak (ld. az 1.22. ábrát és a **??** feladatot).



1.22. ábra: Az X pont pontosan akkor esik az A, B és C pontokon átmenő síkba, ha $\overrightarrow{OX} = r\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$ és $r + s + t = 1$. Az X az ABC háromszögbe pedig pontosan akkor esik, ha ezen kívül még $0 \le r, s, t \le 1$ is fönnáll.

Szemléletesen világos, például a mellékelt 1.23. ábráról leolvasható, de nem bizonyítjuk, hogy két tetszőleges nem kollineáris vektor összes olyan lineáris kombinációja, amelyben az együtthatók 0 és 1 közé esnek, egy parallelogrammát ad. Pontosabban fogalmazva egy $r\mathbf{a} + s\mathbf{b}$ alakú vektor végpontja pontosan akkor tartozik az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által meghatározott (kifeszített) *parallelogrammához*, ha $0 \le r, s \le 1$.

Hasonló mondható három, nem egy síkba eső vektorról: egy $r\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$ alakú vektor végpontja pontosan akkor tartozik az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ által kifeszített *parallelepipedonhoz*, ha $0 \le r, s, t \le 1$ (1.23. ábra).

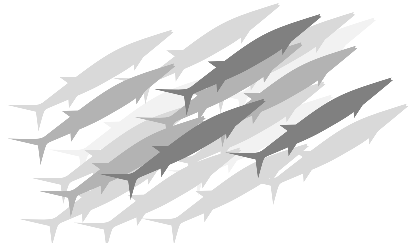


1.23. ábra: A *parallelogramma* és a *parallelepipedon* olyan lineáris kombinációkkal állítható elő, ahol az együtthatók 0 és 1 közé esnek.

Feladatok

Vektor

1.1. Egy matematikán kívüli szemléltetés a vektor fogalmához: hogyan fejeznénk be az alábbi hasonlatot? „Ha az irányított szakasz a hal, akkor a vektor a…”



1.2.• VEKTOROK: IGAZ – HAMIS Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

a) Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok hajlásszöge α, akkor $\mathbf{a}$ és $-\mathbf{b}$ hajlásszöge $\pi-\alpha$.
b) Ha A és B két adott pont, akkor az $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ vektor független az O megválasztásától.
c) Ha A és B két adott pont, akkor az $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ vektor független az O megválasztásától.
d) Ha két vektor egyirányú, akkor egyikük a másik skalárszorosa.
e) Ha két vektor egyike a másik skalárszorosa, akkor egyirányúak.
f) Ha két vektor egyike a másik skalárszorosa, akkor párhuzamosak.

Vektorműveletek a 2- és 3-dimenziós térben

1.3. Adva van a síkban két tetszőleges vektor, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$. Szerkesszük meg a következő vektorokat: *a)* $\mathbf{c}=2\mathbf{a}+\mathbf{b}$, *b)* $\mathbf{d}=2\mathbf{a}-\mathbf{b}$, *c)* $\mathbf{e}=\frac{2}{3}\mathbf{a}+\frac{1}{3}\mathbf{b}$, *d)* $\mathbf{f}=\frac{2}{5}\mathbf{a}+\frac{3}{5}\mathbf{b}$.

1.4. Legyen $\mathbf{u}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{v}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$. Fejezzük ki az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor segítségével a következő vektorokat: *a)* $2\mathbf{u}+2\mathbf{v}$, *b)* $3\mathbf{u}-3\mathbf{v}$, *c)* $3\mathbf{u}-\mathbf{v}$, *d)* $2\mathbf{u}-\frac{1}{2}\mathbf{v}$.

1.5. Tekintsük az $ABCD$ négyzetet. Határozzuk meg a következő összegeket! *a)* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$, *b)* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$, *c)* $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$, *d)* $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$, *e)* $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$, *f)* $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}$, *g)* $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$

1.6. Tekintsük az $ABCD$ négyzetet. Jelölje a BC oldal felezőpontját E, a CD oldal felezőpontját F, a négyzet középpontját O. Fejezzük ki az egymásra merőleges $\mathbf{b}=\overrightarrow{AB}$ és $\mathbf{d}=\overrightarrow{AD}$ vektorok segítségével az $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{OF}$ vektorokat!

1.7. Tekintsük az $ABCD$ tetraédert! Határozzuk meg az
a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$,
b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}$,
c) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$
vektorokat.

1.8. Tekintsük a szabályos $ABCDEF$ hatszöget, melynek geometriai középpontját jelölje O. Fejezzük ki az $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$ és $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$ vektorok segítségével az *a)* $\overrightarrow{OC}$, *b)* $\overrightarrow{OE}$, *c)* $\overrightarrow{OF}$, *d)* $\overrightarrow{AC}$, *e)* $\overrightarrow{BD}$, *f)* $\overrightarrow{BF}$, *g)* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}$ vektorokat!

1.9.• Adva van n tetszőleges, nem feltétlenül különböző P_1, P_2,…,P_n pont a térben. Mivel egyenlő a

$$\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_2P_3}+\overrightarrow{P_3P_4}+\ldots+\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$$

és a

$$\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_2P_3}+\overrightarrow{P_3P_4}+\ldots+\overrightarrow{P_{n-1}P_n}+\overrightarrow{P_nP_1}$$

összeg?

1.10. Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok pontosan akkor lehetnek (egy esetleg szakasszá vagy ponttá elfajuló) háromszög oldalvektorai, ha az

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c},\quad \mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c},\quad \mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c},\quad \mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}$$

vektorok legalább egyike zérus. Másként fogalmazva: ha a három vektor összege $\mathbf{0}$, vagy valamelyik vektor egyenlő a másik kettő összegével.

1.11. Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két tetszőleges vektor. Mutassuk meg, hogy van olyan (esetleg elfajuló) háromszög, melynek oldalvektorai $2\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{a}+2\mathbf{b}$ és $3\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

Lineáris kombináció, lineáris függetlenség

1.12.• LINEÁRIS ÖSSZEFÜGGŐSÉG: IGAZ – HAMIS Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

a) Ha három vektor a térben lineárisan összefüggő, akkor bármelyikük a másik kettő lineáris kombinációja.
b) Megadható a térben három vektor, hogy egyikük sem lineárisan független a többitől.
c) Megadható a térben három vektor, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$, hogy $\mathbf{a}$ független a $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektoroktól, de $\mathbf{b}$ nem független az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ vektoroktól.
d) Ha három térbeli vektor egy síkba esik, akkor mindegyik kifejezhető a másik kettő lineáris kombinációjaként!

Speciális lineáris kombinációk

1.13.• SZAKASZT $m:n$ ARÁNYBAN OSZTÓ PONT Ha az $\overline{AB}$ szakaszt a P pont úgy bontja ketté, hogy $|\overline{AP}|:|\overline{PB}|=m:n$, akkor bármely O pontra igaz, hogy

$$\overrightarrow{OP}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}.$$

Speciálisan, az $\overline{AB}$ szakasz felezőpontjába az

$$\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$$

vektor mutat.

Távolság, szög, orientáció

A címben jelzett három alapfogalomhoz három – vektorok közti – szorzásművelet visz közelebb. Mindegyik művelet igen szokatlan tulajdonságokkal rendelkezik: az egyik eredményül nem vektort, hanem skalárt ad, a másik nem felcserélhető, és kétváltozós (bináris) műveletként csak a 3-dimenziós térben definiálható, a harmadik pedig nem két- hanem háromváltozós művelet.

Skaláris szorzás A fizikában az erő által végzett munka az út hosszának és az erő elmozdulás irányába eső merőleges vetülete hosszának szorzata. Vagyis két vektorjellegű mennyiségből egy skalármennyiséget kapunk eredményül. Ha $\mathbf{F}$ jelöli az erővektort, $\mathbf{s}$ az elmozdulásvektort, $\mathbf{F}_s$ az erőnek az elmozdulás irányába eső merőleges vetületi vektorát és γ az $\mathbf{F}$ és $\mathbf{s}$ vektorok hajlásszögét, akkor a munka értéke $|\mathbf{F}_s||\mathbf{s}| = |\mathbf{F}||\mathbf{s}|\cos\gamma$. Ez vezet a következő definícióhoz:

1.15. DEFINÍCIÓ (KÉT VEKTOR SKALÁRIS SZORZATA). *Két vektor* skaláris szorzatán *a vektorok abszolút értékének és az általuk bezárt szög koszinuszának szorzatát értjük. Az* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektorok skaláris szorzatát* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ *jelöli, tehát*

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle,$$

ahol a két vektor által bezárt szög $(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle$.

Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ valamelyike zérusvektor, akkor a két vektor szöge, s így annak koszinusza sem határozható meg egyértelműen, a skaláris szorzat viszont ekkor is egyértelmű, éspedig 0, hisz a zérusvektor abszolút értéke 0, és 0 bármivel vett szorzata 0.

Szokás $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ skaláris szorzatát $\mathbf{ab}$-vel is jelölni, de ezt egy később bevezetendő művelettel (a mátrixszorzással) való összekeverés elkerülése érdekében e könyvben nem fogjuk használni.

1.16. PÉLDA (SKALÁRIS SZORZAT KISZÁMÍTÁSA A DEFINÍCIÓ ALAPJÁN). *Mennyi a skaláris szorzata egy* 1 *és egy* 2 *egység hosszú és egymással* $60°$*-os szöget bezáró két vektornak?*

MEGOLDÁS. A szorzat $1\cdot 2\cdot\cos 60° = 1\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 1$. □

1.17. TÉTEL (MIKOR 0 A SKALÁRIS SZORZAT?). *Két vektor skaláris szorzata pontosan akkor* 0*, ha a két vektor merőleges egymásra.*

BIZONYÍTÁS. ($\Longleftarrow$) Ha $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, akkor $(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = \pi/2$, azaz $\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 0$, tehát $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$.

($\Longrightarrow$) Ha $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, azaz $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 0$, akkor $|\mathbf{a}| = 0$, $|\mathbf{b}| = 0$ vagy $\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 0$. Ha valamelyik vektor zérusvektor, akkor iránya bármely vektoréra merőlegesnek tekinthető. Ha viszont $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ és $\mathbf{b}\neq$

$\mathbf{0}$, akkor $\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 0$, a cos függvénynek a $[0,\pi]$ intervallumban csak $\pi/2$-ben van zérushelye, tehát a két vektor merőleges egymásra. □

► A tétel bizonyításából látszik, a zérusvektorra úgy tekintünk, mint ami bármely vektorra merőleges. Korábban – a skalárral való szorzásnál – a zérusvektorra úgy tekintettünk, mint ami bármely vektorral párhuzamos, hisz skalárszorosa. A zérusvektorra tehát úgy tekintünk, mint ami egy adott vektorral akkora szöget zár be, mint amekkorára épp szükségünk van. Ezt megtehetjük, hisz a zérusvektor iránya tetszőleges. Ez megóv minket attól, hogy minden tételbe a zérusvektor esetét külön, mint valami rendhagyó esetet bele kelljen fogalmaznunk.

1.18. TÉTEL (A SKALÁRIS SZORZÁS MŰVELETI TULAJDONSÁGAI). *Ha* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *és* $\mathbf{c}$ *tetszőleges térbeli (síkbeli) vektorok és* r *tetszőleges valós szám, akkor igazak az alábbi összefüggések:*

a) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ *(kommutativitás)*

b) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ *(disztributivitás)*

c) $r(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (r\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot(r\mathbf{b})$

d) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} > 0$, *ha* $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, *és* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 0$, *ha* $\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

A bizonyítást az olvasóra hagyjuk.

Mivel két vektor skaláris szorzata skalár, ezért az asszociativitás (csoportosíthatóság) kérdése föl sem vethető, hisz az $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$ szorzatban két különböző szorzásművelet szerepel. Mindezzel együtt $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} \neq \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$ (ld. az 1.18. feladatot).

Hosszúság és szög Egy vektor hossza, és ezzel két pont távolsága, valamint két vektor hajlásszöge kifejezhető a skaláris szorzat segítségével.

Egy tetszőleges $\mathbf{a}$ vektorra $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}||\mathbf{a}|\cos 0 = |\mathbf{a}||\mathbf{a}|$, tehát

$$|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}, \text{ azaz } |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}.$$

E képlet szerint tehát egy *vektor hossza* megegyezik az önmagával vett skaláris szorzatának gyökével. Ebből az is adódik, hogy *két pont távolsága* megegyezik az őket összekötő vektor önmagával vett skaláris szorzatának négyzetgyökével.

Két pontot összekötő vektor egyenlő az oda mutató helyvektorok különbségével, így ha a két pontba mutató helyvektor $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$, akkor a pontok távolsága – és ezt fogjuk a vektorok távolságának is tekinteni

$$d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|.$$

Két vektor skaláris szorzatának és a vektorok hosszának ismeretében a *szögük* meghatározható:

$$\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}, \tag{1.2}$$

mivel a $[0,\pi]$ intervallumon a koszinusz függvény kölcsönösen egyértelmű.

Pithagorász-tétel A távolságot vagy hosszúságot skaláris szorzattal is ki tudjuk fejezni, így segítségével a rá vonatkozó összefüggések is vizsgálhatók.

1.19. TÉTEL (PITHAGORÁSZ-TÉTEL). *Az* **a** *és* **b** *vektorokra pontosan akkor teljesül az*

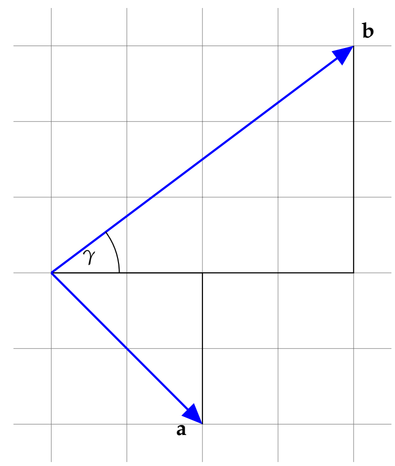
$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$$

összefüggés, ha **a** *és* **b** *merőlegesek egymásra.*

BIZONYÍTÁS.

$$\begin{aligned}
|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \\
&= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} && \text{disztributivitás} \\
&= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} && \text{kommutativitás} \\
&\overset{?}{=} \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} && ? \\
&= |\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2,
\end{aligned}$$

Világos, hogy a ?-lel megjelölt egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$, azaz ha **a** és **b** merőlegesek egymásra. □



1.24. ábra: Két vektor skaláris szorzata

1.20. PÉLDA (SKALÁRIS SZORZAT KISZÁMÍTÁSA). *Számítsuk ki az 1.24 ábrán látható két vektor skaláris szorzatát (a szomszédos rácsvonalak távolsága* 1 *egység).*

MEGOLDÁS. Az **a** vektor hossza $\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$, a **b** vektor hossza $\sqrt{4^2+3^2}=5$, az **a** vektornak a vízszintes rácsvonalakkal bezárt szöge $\pi/4$, a **b** vektornál e szög szögfüggvényei $\cos\gamma=\frac{4}{5}$, $\sin\gamma=\frac{3}{5}$. Így

$$\cos(\gamma+\frac{\pi}{4}) = \cos\gamma\cos\frac{\pi}{4}-\sin\gamma\sin\frac{\pi}{4} = \frac{4}{5}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{5}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{5}\frac{\sqrt{2}}{2},$$

tehát a skaláris szorzat $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=2\sqrt{2}\cdot 5\cdot\frac{1}{5}\frac{\sqrt{2}}{2}=2.$ □

Két fontos egyenlőtlenség Mivel a koszinusz függvény értéke abszolút értékben sosem nagyobb 1-nél, ezért a skaláris szorzat definíciójából azonnal látszik, hogy

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle| \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}|.$$

Ezzel bizonyítottuk a következő tételt:

1.21. TÉTEL (CAUCHY–BUNYAKOVSZKIJ–SCHWARZ-EGYENLŐTLENSÉG). *Két vektor skaláris szorzatának abszolút értéke sosem nagyobb abszolút értékeik szorzatánál, azaz*

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}|.$$

A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség segítségével bizonyítjuk a geometriából jól ismert háromszög-egyenlőtlenséget. Ennek az az értelme, hogy e bizonyítás változtatás nélkül működni fog sokkal általánosabb körülmények között is.

1.22. tétel (Háromszög-egyenlőtlenség). *Bármely két* **a** *és* **b** *vektorra*

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

Bizonyítás. Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldalán nemnegatív szám áll, ezért vele ekvivalens egyenlőtlenséghez jutunk, ha mindkét oldalt négyzetre emeljük.

$$\begin{aligned}
|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \\
&= |\mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2 \qquad \text{ld. az 1.19. tétel bizonyítását} \\
&\le |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 \\
&\le |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 \\
&= (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2 .
\end{aligned}$$

És ezt akartuk bizonyítani. □

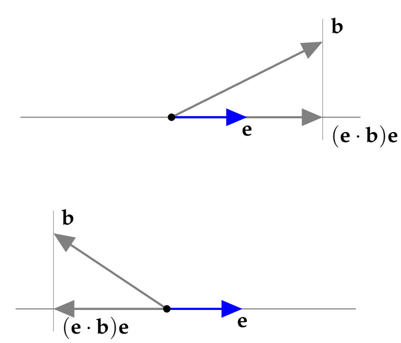
Egységvektorral való szorzás és a merőleges vetítés Minden olyan vektort, melynek abszolút értéke 1, *egységvektornak* nevezünk.

Ha **a** egy tetszőleges nemzérus vektor, akkor $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ egységvektor, ugyanis abszolút értéke 1:

$$\left|\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right| = \frac{1}{|\mathbf{a}|}|\mathbf{a}| = 1.$$

1.23. tétel (Egységvektorral való szorzás geometriai jelentése). *Ha* **e** *egységvektor, akkor a* $\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{e}\cdot\mathbf{b})\mathbf{e}$ *vektor a* **b** *vektornak az* **e** *egyenesére való merőleges vetülete. Az* $\mathbf{e}\cdot\mathbf{b}$ *szorzat e vetület előjeles hossza, mely pozitív, ha* $\hat{\mathbf{b}}$ *és* **e** *egyirányúak, és negatív, ha ellenkező irányúak.*

Bizonyítás. Ha **e** egységvektor, azaz abszolút értéke 1, akkor $\mathbf{e}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\cos(\mathbf{e},\mathbf{b})_\angle$, ez pedig a koszinusz függvény definíciója szerint **b** merőleges vetületének előjeles hosszát jelenti. E szám **e**-szerese pedig egy **e** irányú, és ilyen hosszú vektort ad, mely épp **b** vetületi vektora. □



1.25. ábra: Az **b** vektor és az **e** egységvektor egyenesére eső vetülete. A felső ábrán $\mathbf{e}\cdot\mathbf{b} > 0$, az alsón $\mathbf{e}\cdot\mathbf{b} < 0$.

Jelölje a **b** vektornak az **a** egyenesére eső merőleges vetületi vektorát $\operatorname{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$. Eszerint ha **e** egységvektor, akkor

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{e}}\mathbf{b} = (\mathbf{e}\cdot\mathbf{b})\mathbf{e}.$$

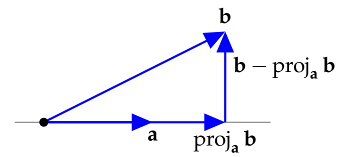
Alapvető feladat egy vektornak egy másikkal párhuzamos és rá merőleges vektorok összegére való felbontása, amit másként *merőleges összetevőkre bontásnak* nevezünk.

1.24. TÉTEL (VEKTOR FELBONTÁSA MERŐLEGES ÖSSZETEVŐKRE). *Ha* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *a sík vagy a tér két vektora, és* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, *akkor* $\mathbf{b}$*-nek az* $\mathbf{a}$ *egyenesére eső merőleges vetülete*

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}.$$

A $\mathbf{b}$*-nek az* $\mathbf{a}$ *egyenesére merőleges összetevője*

$$\mathbf{b} - \operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}.$$



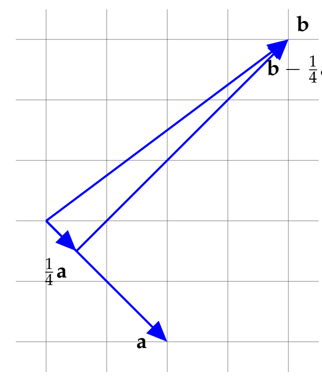
1.26. ábra: Az $\mathbf{b}$ vektor felbontása az $\mathbf{a}$ vektorral párhuzamos és rá merőleges vektorok összegére.

BIZONYÍTÁS. Az első képlet az egységvektorral szorzás geometriai jelentéséről szóló 1.23. tételből következik. Legyen $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ az $\mathbf{a}$-irányú egységvektor. Ekkor

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{e}} \mathbf{b} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e} = \left(\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \cdot \mathbf{b} \right) \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{|\mathbf{a}|^2} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}.$$

(Az utolsó egyenlőségnél kihasználtuk, hogy $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$.) Mivel $\mathbf{e}$ és $\mathbf{a}$ párhuzamosak, ezért $\operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \operatorname{proj}_{\mathbf{e}} \mathbf{b}$, ami bizonyítja első állításunkat. Az állítás második fele abból adódik, hogy a két összetevő összege $\mathbf{b}$. □

1.25. PÉLDA (MERŐLEGES ÖSSZETEVŐKRE BONTÁS). *Az 1.24 ábrabeli* $\mathbf{b}$ *vektort bontsuk fel az* $\mathbf{a}$*-val párhuzamos és rá merőleges összetevőkre.*



1.27. ábra: Vektor felbontása merőleges összetevőkre

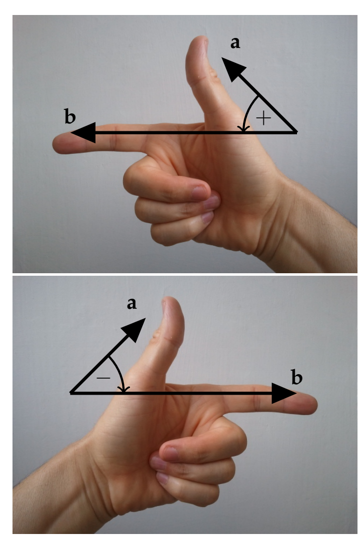
MEGOLDÁS. Bár a megoldás az 1.27 ábráról is leolvasható, kövessük végig a számítást: az 1.20. példa szerint $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2$, $|\mathbf{a}| = 2\sqrt{2}$, ezért

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a} = \frac{2}{8} \mathbf{a} = \frac{1}{4} \mathbf{a},$$

míg az $\mathbf{a}$-ra merőleges összetevő $\mathbf{b} - \frac{1}{4}\mathbf{a}$. □

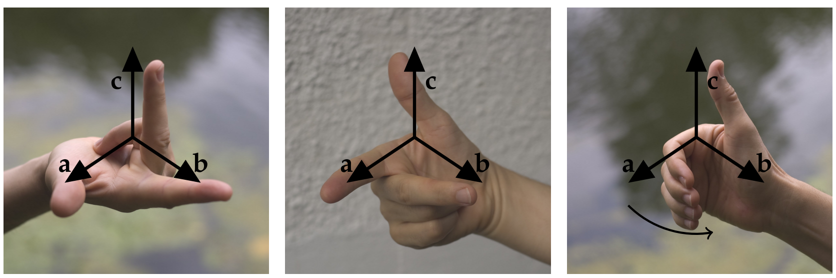
Merőlegesség és orientáció Legyenek $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egymásra merőleges nemzérus vektorok a síkban. Ekkor $\mathbf{a}$ és $-\mathbf{b}$ is merőlegesek, azaz $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle = (\mathbf{a}, -\mathbf{b})_\angle = \pi/2$. Csak az $\mathbf{a}$ ismeretében meg tudjuk-e különböztetni a $\mathbf{b}$ és $-\mathbf{b}$ vektorokat? Hasonló kérdés a térben is fölmerül: ha $\mathbf{c}$ merőleges a nem kollineáris $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok mindegyikére, akkor $-\mathbf{c}$ is. Vajon $\mathbf{c}$ és $-\mathbf{c}$ megkülönböztethető-e egymástól csak $\mathbf{a}$-hoz és $\mathbf{b}$-hez való viszonyukat tekintve?

A válaszhoz az *irányítás*, más szóval *orientáció* fogalma vezet. E fogalmat precízen később definiáljuk (ld. ???. szakasz), az alapgondolat viszont egyszerű. A síkban a két független vektorból álló párokat két osztályba sorolhatjuk aszerint, hogy a tenyérrel fölfelé fordított jobb vagy bal kezünk első két ujjával szemléltethetőek (1.28. ábra) (hüvelyk az első, mutató a második vektor).

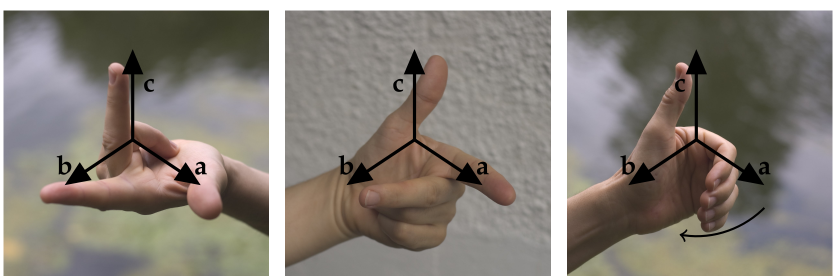


1.28. ábra: Két vektor egymáshoz való viszonya jobbrendszert (felső ábra) vagy balrendszert (alsó ábra) alkot. A közbe zárt irányított szög az előbbi esetben pozitív, utóbbiban negatív.

Hasonlóképp: a térben a független vektorokból álló hármasokat két osztályba sorolhatjuk aszerint, hogy jobb vagy bal kezünk első három ujjával szemléltethetőek (1.29. és 1.30. ábra). Kézenfekvőnek tűnik az első vektornak a hüvelyk, a másodiknak a mutató, a harmadiknak a középső ujjunkat megfeleltetni, de azokban a kultúrákban, ahol a mutató és középső ujjal mutatják a kettőt, ott a mutató-középső-hüvelyk a sorrend. Aszerint, hogy egy vektorpár a síkban, illetve egy vektorhármas a térben melyik osztályba esik, azt mondjuk, hogy *jobbrendszert*, illetve *balrendszert* alkot. Az 1.29. ábra harmadik képén látható mód (az ökölbe szoruló jobb kéz mozgása) azt is megmutatja, hogy milyen egy egyenes körül való pozitív forgás iránya. A síkban ezt azzal is ki tudjuk fejezni, hogy két független vektor szögét előjellel látjuk el, nevezetesen pozitívval, ha jobbrendszert, és negatívval, ha balrendszert alkotnak. Az így kapott szöget a két vektor *irányított szögének* nevezzük. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ irányított szögét $(\mathbf{a},\mathbf{b})_\sphericalangle$ jelöli. Tehát míg $(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = (\mathbf{b},\mathbf{a})_\angle$, addig $(\mathbf{a},\mathbf{b})_\sphericalangle = -(\mathbf{b},\mathbf{a})_\sphericalangle$, és ha $(\mathbf{a},\mathbf{b})_\sphericalangle = \pi/2$, akkor $(\mathbf{a},-\mathbf{b})_\sphericalangle = -\pi/2$. Ez tehát a válasz a paragrafus elején feltett kérdésre.



1.29. ábra: Az **a**, **b** és **c** vektorok ebben a sorrendben jobbrendszert alkotnak, ha irányuk a jobb kezünkkel mutatható a mellékelt három ábra bármelyike szerint: (1) hüvelyk–mutató–középső ujj, (2) mutató–középső–hüvelykujj, (3) a hüvelyk mutatja a **c** vektort, ökölbe szoruló kezünk ujjai pedig az **a** felől a **b** felé haladnak.



1.30. ábra: Az **a**, **b** és **c** vektorok ebben a sorrendben balrendszert alkotnak, ha irányuk a bal kezünkkel mutatható a következők bármelyike szerint: (1) hüvelyk–mutató–középső ujj, (2) mutató–középső–hüvelykujj, (3) a hüvelyk mutatja a **c** vektort, ökölbe szoruló kezünk ujjai pedig az **a** felől a **b** felé haladnak.

Vektori szorzás A fizikában több olyan jelenség is van, melyben két térbeli vektorhoz keresünk egy mindkettőre merőleges harmadikat. Legismertebb példa a *forgatónyomaték*.

Hasson egy $\mathbf{F}$ erő egy test $\mathbf{P}$ pontjában, és legyen a test rögzítve az O pontjában. A P ponton átmenő, $\mathbf{F}$ irányú egyenesnek az O-tól való távolságát az erő karjának nevezzük. Az $\mathbf{F}$ hatására a test O körül elfordul. Ennek jellemzésére tudnunk kell a forgás tengelyét, a forgás „nagyságát”, és azt, hogy a tengely körüli két forgásirány közül melyikről van szó. Erre alkalmas lehet egy vektor – ezt nevezzük *forgatónyomatéknak* –, melynek iránya a forgástengellyel párhuzamos, hossza a forgás nagyságát írja le, és a forgástengellyel párhuzamos két vektorirány a két forgásirányhoz tartozik. Hogyan definiálható a forgatónyomaték-vektor, ha tudjuk, hogy abszolút értéke az erőkar hosszának és az erő abszolút értékének szorzata?

Az erő karja $|\overrightarrow{OP}|\sin(\overrightarrow{OP},\mathbf{F})_\angle$, így az $\mathbf{M}$ forgatónyomaték abszolút értéke:

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{F}||\overrightarrow{OP}|\sin(\overrightarrow{OP},\mathbf{F})_\angle.$$

A forgás tengelye nyilván merőleges $\mathbf{F}$-re és $\overrightarrow{OP}$-re is, csak abban kell megegyezni, hogy az $\overrightarrow{OP}$, $\mathbf{F}$ és $\mathbf{M}$ vektorok jobb- vagy balrendszert alkossanak. A fizikusok a jobbrendszert választották.

A forgatónyomaték és több hasonló fizikai fogalom a következő definícióhoz vezet:

1.26. DEFINÍCIÓ (VEKTORI SZORZÁS). *A 3-dimenziós tér két vektorának* vektori szorzatán *azt a vektort értjük, melynek*

a) abszolút értéke *a két vektor abszolút értékének és közbezárt szöge szinuszának szorzata,*

b) iránya *merőleges mindkét vektor irányára és – ha a szorzat nem a nullvektor, akkor – az első tényező, a második tényező és a szorzat ebben a sorrendben jobbrendszert alkot.*

► A vektor abszolút értéke tényleg nem negatív, mert a szinusz függvény a $[0,\pi]$ intervallumon nem negatív.

► E definíció bármely két 3-dimenziós vektor vektori szorzatát egyértelműen definiálja, ugyanis minden olyan esetben, amikor nem tudnánk eldönteni, hogy a vektorok jobbrendszert alkotnak-e, a szorzat a nullvektor (gondoljuk meg!).

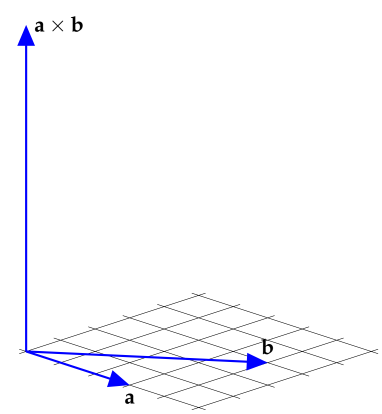
► Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektori szorzatát $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ jelöli, amit „a kereszt b"-nek olvasunk. Képletekkel megfogalmazva: $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ egy vektor, melyre

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle,$$

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}\perp\mathbf{a}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\perp\mathbf{b}$, továbbá $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot, ha $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\neq 0$.

1.27. PÉLDA (VEKTORI SZORZAT MEGHATÁROZÁSA). *Tegyük fel, hogy a tér két vektora 3 illetve 5 hosszú, az általuk bezárt szög koszinusza $\frac{4}{5}$. Mit tudunk a vektori szorzatról?*

MEGOLDÁS. Ha $\cos\gamma=\frac{4}{5}$, akkor $\sin\gamma=\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=\frac{3}{5}$, így a vektori szorzat hossza $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 3\cdot 5\cdot\frac{3}{5} = 9$, iránya merőleges mindkét vektorra és $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot (ld. 1.31. ábra). □



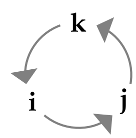
1.31. ábra: Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ vektorok

1.28. PÉLDA ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ VEKTORI SZORZATA). *Legyen* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ *három, páronként egymásra merőleges, ebben a sorrendben jobbrendszert alkotó egységvektor. Készítsünk művelettáblát vektori szorzataikról!*

MEGOLDÁS. Mivel $(\mathbf{i},\mathbf{i})_\angle = 0$, ezért $|\mathbf{i}\times\mathbf{i}| = 0$, így $\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{0}$. Hasonlóan $\mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{k}\times\mathbf{k} = \mathbf{0}$.

Mivel $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = 1$ és $(\mathbf{i},\mathbf{j})_\angle = 90°$, ezért $|\mathbf{i}\times\mathbf{j}| = 1$, azaz $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$ is egységvektor. Ráadásul $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$ merőleges $\mathbf{i}$-re és $\mathbf{j}$-re, és $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ valamint $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$ jobbrendszert alkotnak épp úgy, mint $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$. Ebből következik, hogy $\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}$. Hasonlóképp $\mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}$ és $\mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$. Ha $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ jobbrendszert alkot, akkor $\mathbf{j}$, $\mathbf{i}$ és $\mathbf{k}$ balrendszert, így $\mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k}$. Mindezeket összefoglalva a következő művelettáblát kapjuk.

$\times$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$



E három vektor közti szorzatok könnyen megjegyezhetőek, ha egy szabályos háromszög csúcsaira írjuk őket pozitív körüljárás szerint, mint azt a táblázat melletti ábra mutatja. Ekkor két különböző vektor szorzata a harmadik, ha a két vektor pozitív körüljárás szerint követi egymást. Ha negatív körüljárás szerint követik egymást, a szorzat a harmadik vektor -1-szerese. □

1.29. TÉTEL (MIKOR $\mathbf{0}$ A VEKTORI SZORZAT?). *Két térbeli vektor vektori szorzata pontosan akkor zérusvektor, ha a két vektor párhuzamos.*

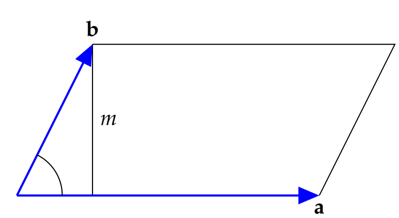
BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{a}$ vagy $\mathbf{b}$ valamelyike zérusvektor, akkor egyrészt a két vektor tekinthető párhuzamosnak, másrészt $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{0}$, az állítás tehát igaz, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy a két tényező egyike sem zérusvektor.

($\Longleftarrow$) Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ párhuzamosak, akkor $(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 0$ vagy π, tehát $\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 0$, így $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|0 = 0$, azaz $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

($\Longrightarrow$) Ha $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{0}$, azaz $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 0$, akkor $|\mathbf{a}| \neq 0$ és $|\mathbf{b}| \neq 0$ miatt $\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 0$. A szinusz függvénynek a $[0,\pi]$ intervallumban a 0 és a π helyen van zérushelye, tehát a két vektor vagy egyirányú, vagy ellenkező irányú, vagyis párhuzamos. □

1.30. TÉTEL (VEKTORI SZORZAT ABSZOLÚT ÉRTÉKÉNEK GEOMETRIAI JELENTÉSE). *Két vektor vektori szorzatának abszolút értéke a két vektor által kifeszített parallelogramma területének mérőszámával egyenlő.*

BIZONYÍTÁS. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített parallelogramma oldalainak hossza $|\mathbf{a}|$ és $|\mathbf{b}|$, az $\mathbf{a}$ oldalhoz tartozó magassága pedig $m = |\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle$. A parallelogramma területe $|\mathbf{a}|m = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ (1.32. ábra). □



1.32. ábra: $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ megegyezik a parallelogramma területével

1.31. TÉTEL (VEKTORI SZORZÁS MŰVELETI TULAJDONSÁGAI). *Tetszőleges* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *és* $\mathbf{c}$ *vektorokra, valamint tetszőleges* r *valós számra igazak az alábbi összefüggések:*

a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ *(alternáló tulajdonság)*

b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ *(disztributivitás)*

c) $r(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (r\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (r\mathbf{b})$

d) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2}$

► E tétel *a)* pontja szerint a vektori szorzás *nem kommutatív*!
► A vektori szorzás nem is asszociatív. Az 1.28. példa eredményét használva könnyen látható, hogy

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} \neq \mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}),$$

ugyanis $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$, másrészt $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$.
► A tétel bizonyítását az 1.32. feladatra hagyjuk.

Parallelepipedon térfogata és előjeles térfogata Az 1.30. tételben megmutattuk, hogy a vektori szorzat abszolút értéke a két vektor által kifeszített parallelogramma területét adja. Hogy számítható ki a parallelepipedon térfogata?

1.32. PÉLDA (PARALLELEPIPEDON TÉRFOGATA). *Határozzuk meg az* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *és* $\mathbf{c}$ *vektorok által kifeszített parallelepipedon térfogatát!*

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített parallelogramma területe $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, és mivel $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges a parallelogramma síkjára, ezért a parallelepipedon magassága $\mathbf{c}$-nek az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ egyenesére eső merőleges vetületi hosszával egyenlő. Ez az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ irányú egységvektorral való skaláris szorzással számolható. Az egységvektor

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|},$$

a magasság $|\mathbf{e} \cdot \mathbf{c}|$, és így a térfogat (azaz az alapterületszer magasság) értéke

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \left| \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} \cdot \mathbf{c} \right| = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| \,.$$

Tehát a parallelepipedon térfogata $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$. □

► A $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ skalárt az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített parallelepipedon *előjeles térfogatának* nevezzük.
► Ez pontosan akkor negatív, ha a $\mathbf{c}$ vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ egyenesére eső merőleges vetülete és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ellenkező irányú. Vagyis ha a $\mathbf{c}$ vektor az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ síkjának másik oldalán van, mint az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor, azaz ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ balrendszert alkot! Tehát e skalár előjele a három vektor orientációját adja.

▶ A három vektor pontosan akkor esik egy síkba, azaz pontosan akkor lineárisan összefüggők, ha $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=0$.

Vegyes szorzat Az előző paragrafusban megmutattuk az $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ kifejezés fontosságát. Ez vezet a következő definícióhoz:

1.33. DEFINÍCIÓ (VEGYES SZORZAT). *A 3-dimenziós tér három tetszőleges* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *és* $\mathbf{c}$ *vektorából képzett*

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$$

kifejezést a három vektor vegyes szorzatának *nevezzük.*

▶ A vegyes szorzat eredménye skalár.
▶ Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok vegyes szorzatának szokás jelölése $\mathbf{abc}$, de mi a későbbi fejezetekben nem fogjuk használni.
▶ Mivel a skaláris szorzás kommutatív, ezért $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.
▶ A parallelepipedon térfogatára ugyanazt az értéket kell kapnunk, bármelyik oldallapot is választjuk alapnak, így e három vektorból a vektorok különböző sorrendjeivel képzett vegyes szorzatok csak előjelükben térhetnek el egymástól. Mivel az előjel az orientáció függvénye, ezért – figyelembe véve az előző megjegyzést is – kapjuk, hogy

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}=(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

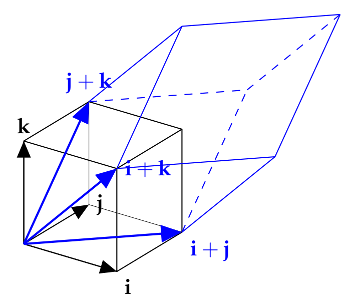
Az ellenkező előjelű szorzatok:

$$(\mathbf{c}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}=(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{c}=(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{b}).$$

Ezeket a vegyes szorzatra használt jelöléssel fölírva:

$$\mathbf{abc}=\mathbf{bca}=\mathbf{cab}=-\mathbf{acb}=-\mathbf{cba}=-\mathbf{bac}.$$

1.34. PÉLDA (VEGYES SZORZAT). *Határozzuk meg egy egységélű kocka egy csúcsból induló három lapátló-vektorának vegyes szorzatát (1.33 ábra)!*



1.33. ábra: $(\mathbf{i}+\mathbf{j})(\mathbf{j}+\mathbf{k})(\mathbf{k}+\mathbf{i})=2$

MEGOLDÁS. Jelölje a kocka egyik csúcsából induló három élvektorát $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$. E három vektor ebben a sorrendben alkosson jobbrendszert. Ekkor az előző megjegyzés szerint $\mathbf{ijk}=\mathbf{jki}=\mathbf{kij}=1$, $\mathbf{kji}=\mathbf{jik}=\mathbf{ikj}=-1$. Mivel a vegyes szorzat egy parallelepipedon térfogatát vagy annak ellentettjét adja, ezért ha egy szorzatban egy vektor többször is szerepel, akkor annak értéke 0. Például $\mathbf{iji}=(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\cdot\mathbf{i}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0$. A három lapátló-vektor: $\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{k}+\mathbf{i}$. Ezek vegyes szorzata

$$\begin{aligned}((\mathbf{i}+\mathbf{j})\times(\mathbf{j}+\mathbf{k}))\cdot(\mathbf{k}+\mathbf{i})&=\mathbf{ijk}+\mathbf{iji}+\mathbf{ikk}+\mathbf{iki}+\mathbf{jjk}+\mathbf{jji}+\mathbf{jkk}+\mathbf{jki}\\&=1+0+0+0+0+0+0+1\\&=2,\end{aligned}$$

tehát a három lapátló-vektor vegyes szorzata 2. Ez azt is jelenti, hogy e három vektor által kifeszített parallelepipedon térfogata 2. □

Feladatok

Skaláris szorzás

A következő feladatokban megadott adatok alapján számítsuk ki az $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ skaláris szorzatot! Legyen $\gamma = (\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle$.

1.14.• $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$.

1.15. $|\mathbf{a}| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{b}| = 2$, $\gamma = \frac{3\pi}{4}$.

1.16. $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, $\gamma = \pi$.

1.17.• $|\mathbf{a}| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{b}| = 2$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

1.18. Igazoljuk, hogy általában

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \neq \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

1.19.• Skaláris szorzás: igaz – hamis Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

a) Két egységvektor skaláris szorzata -1 és $+1$ közé eső szám.
b) Egy $\mathbf{v}$ vektor szorzata egy egységvektorral megegyezik $\mathbf{v}$-nek az egységvektor egyenesére eső merőleges vetületével.
c) A skaláris szorzás kommutatív.
d) A skaláris szorzás asszociatív (ld. 1.18. feladat).
e) A nullvektor bármely vektorra merőleges.
f) Két vektor pontosan akkor merőleges, ha skaláris szorzatuk 0.

Egyszerüsítsük az alábbi két kifejezést!

1.20. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$

1.21. $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

1.22. Mennyi az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ szöge, ha $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$, $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 5$.

1.23.* Igaz-e, hogy $|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ három egymásra páronként merőleges vektor?

1.24. Határozzuk meg az $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ értékét, ha $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ és $\mathbf{e}_3$ egységvektorok és $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$.

Merőlegesség és orientáció: vektori szorzás

1.25.• Számítsuk ki $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ értékét, ha $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle = \frac{\pi}{6}$.

1.26.• Számítsuk ki $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ értékét, ha $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle = \pi$.

Egyszerüsítsük az alábbi két kifejezést!

1.27. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})$

1.28. $(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + \mathbf{j})$

1.29. Tekintsünk egy egységélű kockát, melynek egyik csúcsát jelölje P. Számítsuk ki a P-ből induló

a) valamelyik két lapátló-vektor,
b) egyik lapátló- és a testátló-vektor

skaláris szorzatát, valamint a P-ből induló

c) valamelyik élvektor és egy vele egy lapon lévő lapátló-vektor,
d) valamelyik élvektor és a vele nem egy lapon lévő lapátló-vektor

vektori szorzatát.

1.30. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{u}$ merőleges a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorokra, akkor merőleges minden lineáris kombinációjukra is.

1.31. Három lineárisan független vektornak hány sorrendje van? E sorrendek közül hány alkot jobb- és hány balrendszert?

1.32. Igazoljuk az 1.31. tétel állításait!

1.33. Szögfelező Legyenek $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nemzérus vektorok. Mutassuk meg, hogy a $|\mathbf{b}|\mathbf{a} + |\mathbf{a}|\mathbf{b}$ vektor felezi $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ szögét!

1.34. Háromszög szögfelezője Az előző feladat eredményét felhasználva mutassuk meg, hogy a háromszög egyik szögének szögfelezője a szemközti oldalt a két szomszédos oldal hosszának arányában osztja fel.

1.35. Mit cserél föl a tükör? Hogy lehet az, hogy a tükör fölcseréli a jobbat a ballal, de nem cseréli föl a föntet a lenttel?

Projekt: ekvivalencia reláció

Egy X halmazon értelmezett *(bináris) reláción* az X elempárjainak egy R halmazát értjük. Ha egy (a, b) pár benne van ebben a halmazban, azt mondjuk, hogy a az R relációban van b-vel, és úgy jelöljük, hogy $a\ R\ b$. Például, ha X az összes valaha élt ember halmaza, akkor az összes olyan (a, b) emberpár halmaza, ahol a anyja b-nek, egy reláció (anya-gyermek reláció). Ha X a valósok halmaza, és R azokból az (a, b) párokból áll, melyekre a kisebb vagy egyenlő mint b, akkor R egy reláció, melyet a valósok rendezési relációjának nevezünk. E reláció szokásos jele $\leq$, így ha $(a, b) \in R$, akkor az $a \leq b$ jelölést használjuk.

Egy halmaz diszjunkt részhalmazok uniójára való fölbontását szokás s halmaz elemei osztályozásának (particionálásának) nevezni. Egy ilyen osztályozáshoz természetes módon hozzárendelhető egy reláció, melyet a halmazon értelmezett *ekvivalencia relációnak* nevezünk, és amelyben két elem pontosan akkor van relációban (pontosan akkor ekvivalensek), ha azonos osztályba tartoznak. Kérdés, egy relációról hogyan állapítható meg, hogy ekvivalenciareláció-e?

1.35. TÉTEL (EKVIVALENCIARELÁCIÓ). *Legyen R egy tetszőleges reláció az X halmazon. R pontosan akkor ekvivalenciareláció, ha tetszőleges $a, b, c \in X$ elemre fennáll az alábbi három tulajdonság:*

a) R reflexív, *azaz $a\ R\ a$, vagyis minden elem relációban van önmagával,*

b) R szimmetrikus, *azaz ha $a\ R\ b$, akkor $b\ R\ a$,*

c) R tranzitív, *azaz ha $a\ R\ b$ és $b\ R\ c$, akkor $a\ R\ c$.*

1.36. Legyen R a fenti tétel szerinti reláció, és jelölje R_a az a-val relációban lévő elemek halmazát. Mutassuk meg, hogy bármely két $a, b \in X$ elemre R_a és R_b vagy azonos, vagy diszjunkt. Ezzel bizonyítsuk az előző tételt!

1.37. SZABAD VEKTOR FOGALMA Mutassuk meg, hogy a 3-dimenziós tér szabad vektorai definiálhatók egy – az irányított szakaszok halmazán értelmezett – ekvivalenciareláció ekvivalenciaosztályaival. Mi ez a reláció?

1.38. VEKTOR IRÁNYA Milyen halmazon értelmezett ekvivalenciareláció segítségével definiálható a vektor irányának és állásának fogalma?

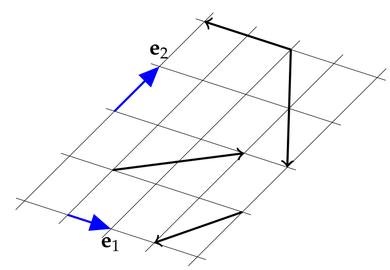
Vektorok koordinátás alakban

A koordináták bevezetésével egyrészt új algebrai eszközökhöz jutunk a vektorok és a különféle geometriai alakzatok vizsgálatában, másrészt lehetővé válik a vektor fogalmának kiterjesztése. Így jutunk a sokdimenziós terek fogalmához, ami nélkülözhetetlen a közgazdaságtanban, az internetes keresők matematikájában, vagy véges struktúrák fölötti változatában a kódelméletben és a kriptográfiában.

Descartes-féle koordinátarendszer Descartes 1637-ben *La Géométrie* című művében egy szép ötlettel összekapcsolta a geometriát az algebrával. Alapgondolata az volt, hogy a geometria alapelemei (pl. pontok) és a valós számok/számpárok/számhármasok közt kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés hozható létre, így bizonyos geometriai alakzatok algebrai egyenletekkel leírhatóvá és vizsgálhatóvá válnak.

René Descartes (Renatus Cartesianus) (1596–1650) francia filozófus és matematikus, a modern filozófia atyja, az analitikus geometria egyik megalkotója. Filozófiáját a puszta hitre alapozott állításokkal szemben a racionális érvelések útján kívánta fölépíteni (lásd *descartesi kételkedés* és „gondolkodom, tehát vagyok”). Orvostudományt és jogot tanult, végül hadmérnöki képesítést szerzett. Több háborúban is részt vett. 1619-ben egy Magyarországot is érintő hosszú útján egy Ulm melletti parasztházban három álmot látott, melyek megfejtése „egy csodálatos tudományhoz” vezette, ami filozófiája alapjává vált.

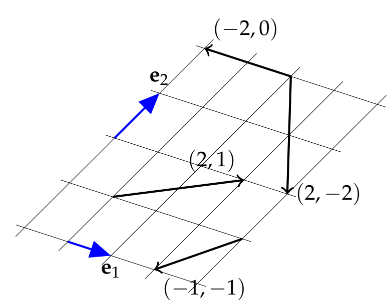
Az 1.11. tétel szerint a sík bármely $\mathbf{v}$ vektora felírható két adott lineárisan független $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ vektor lineáris kombinációjaként, és e felírás egyértelmű. Ha e lineáris kombináció $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$ alakú, akkor a $\mathbf{v}$ vektorhoz a (v_1, v_2) számpárt rendeljük, és ezt a $\mathbf{v}$ vektor *koordinátás alakjának*, a v_1 és v_2 skalárokat pedig a $\mathbf{v}$ *koordinátáinak* nevezzük. Azt mondjuk, hogy az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ vektorpár e koordinátázási rendszer – egyszerűbben *koordinátarendszer* – *bázisa*, az $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ vektorok a *bázisvektorok* vagy *alapvektorok*. Tetszőleges vektor koordinátáinak meghatározásához elég a bázisvektorokat ismerni.



1.34. ábra: Mik a vektorok koordinátái?

1.36. PÉLDA (VEKTOROK KOORDINÁTÁI). *Határozzuk meg az 1.34. ábrán megadott vektoroknak – az $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ vektorokra, mint bázisra vonatkozó – koordinátáit!*

MEGOLDÁS. A megoldás könnyen leolvasható az 1.35. ábráról. Áttekinthetőbb, ha az összes vektort egyetlen pontból indítjuk. Ezt mutatja az 1.36. ábra. □

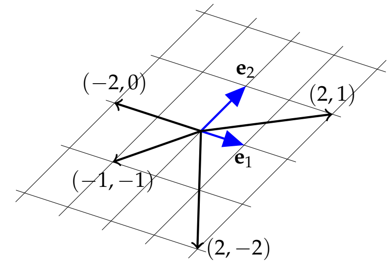


1.35. ábra: A megoldás

A koordinátarendszer a 3-dimenziós térben is hasonló módon építhető fel. Az 1.12. tétel szerint a tér bármely $\mathbf{v}$ vektora felírható három adott lineárisan független $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ és $\mathbf{e}_3$ vektor lineáris kombinációjaként, és e felírás egyértelmű. Ha e lineáris kombináció $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$ alakú, akkor a $\mathbf{v}$ vektorhoz a (v_1, v_2, v_3) számhármast rendeljük, és ezt a $\mathbf{v}$ vektor *koordinátás alakjának*, a v_1, v_2 és v_3 skalárokat pedig a $\mathbf{v}$ *koordinátáinak* nevezzük. *Bázis* az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ vektorhármas.

Sőt, a koordinátázás az 1-dimenziós térben is megvalósítható: ha $\mathbf{e}$ egy nemnulla vektor (tehát lineárisan független vektorrendszer!), akkor bármely vele párhuzamos $\mathbf{v}$ vektor egyértelműen felírható $\mathbf{v} = v\mathbf{e}$ alakban. E v skalár lesz a $\mathbf{v}$ koordinátás alakja (a zárójel használata itt szükségtelen). Így a $\mathbf{v} \leftrightarrow v$ hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít a vektorok és a skalárok közt.

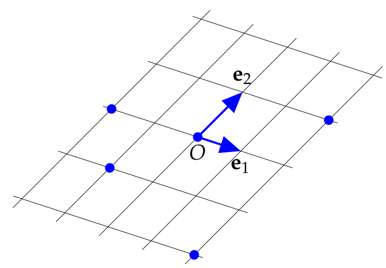
Ha kijelölünk egy pontot az egyenesen/síkban/térben – ez lesz az origó –, akkor az egyenes/sík/tér pontjai és a helyvektorok végpontjai közti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetéssel egyúttal a pontok is koordinátát kapnak.



1.36. ábra: A megoldás helyvektorokkal ábrázolva.

1.37. PÉLDA (PONTOK KOORDINÁTÁI). *Határozzuk meg az 1.37. ábrán kijelölt pontok – megadott bázisvektorokra és origóra vonatkozó – koordinátáit!*

MEGOLDÁS. E feladat megoldása lényegében azonos az előzőével, minthogy a kijelölt pontokba mutató helyvektorok megegyeznek az ott megadott vektorokkal (ld. 1.38. ábra). □

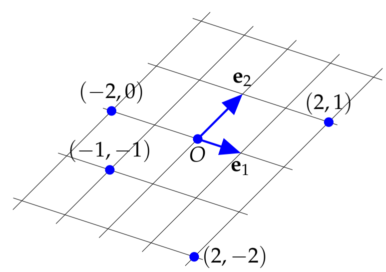


1.37. ábra: Mik a pontok koordinátái?

A helyvektorok és a pontok közti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést a jelölésben is kifejezzük azzal, hogy nem teszünk különbséget a vektor és a pont koordinátás alakja közt, azaz a $\mathbf{v} = (a, b)$ vektorhoz adott origó mellett rendelt pontot is (a, b) jelöli. Ha a pontnak nevet is adunk, pl. e pont a P pont, akkor a $P(a, b)$ jelölés a nevet és a koordinátákat is megadja. Ekkor a helyvektort $\overrightarrow{OP}$ is jelölheti. Tehát $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$. Szokás a vektorok koordinátás alakját úgynevezett *oszlopvektor* alakba is írni, mi e könyvben ekkor kerek helyett szögletes zárójelet használunk, például:

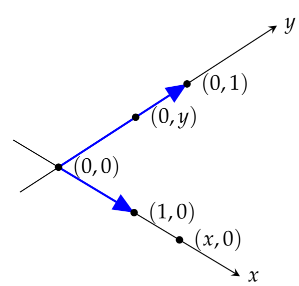
$$\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

E jelölés előnyeivel hamarosan találkozunk.



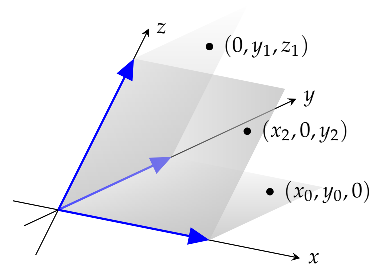
1.38. ábra: Pontok és koordinátáik

Látható, hogy ha egy pont az első tengelyen van, és azon az egyenesen x az 1-dimenziós koordinátája, akkor síkbeli koordinátás alakja $(x, 0)$ lesz. Hasonlóképp a második tengely minden pontjának $(0, y)$ a koordinátás alakja. Az origóé $(0, 0)$ (ld. 1.39. ábra). Az alapvektorok koordinátás alakja $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ és $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$.



1.39. ábra: Pontok a koordinátarendszer tengelyein.

Hasonlóképp a 3-dimenziós esetben a koordinátatengelyekre eső pontok 3-dimenziós koordinátás alakja $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$, illetve $(0, 0, z)$ attól függően, hogy melyik tengelyről van szó. Az origón átmenő és 2 tengelyt tartalmazó síkokat *koordinátasíkoknak* nevezzük. Ezekből is három van. Könnyen látható, hogy a koordinátasíkok pontjainak alakja $(x, y, 0)$, $(x, 0, z)$, illetve $(0, y, z)$. Az origóé $(0, 0, 0)$, míg az alapvektoroké $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ (ld. 1.40. ábra).



1.40. ábra: Pontok a koordinátasíkokon

Műveletek koordinátás alakban megadott vektorokkal Legyen adva a térben egy koordinátarendszer és abban két tetszőleges $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektor. E paragrafusban megkeressük a vektorműveletek koordinátás alakját. A kérdés tehát az, hogy hogyan kapható meg $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $c\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ koordinátás alakja.

Mindegyik műveletnél felhasználjuk a vektoroknak a bázisvektorok lineáris kombinációjaként való előállítását. Az adott két vektor összege:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}+\mathbf{v} &= (u_1,u_2,u_3)+(v_1,v_2,v_3)\\ &= (u_1\mathbf{e}_1+u_2\mathbf{e}_2+u_3\mathbf{e}_3)+(v_1\mathbf{e}_1+v_2\mathbf{e}_2+v_3\mathbf{e}_3)\\ &= (u_1+v_1)\mathbf{e}_1+(u_2+v_2)\mathbf{e}_2+(u_3+v_3)\mathbf{e}_3\\ &= (u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3).\end{aligned}$$

Hasonló képlet adódik a különbségre:

$$\mathbf{u}-\mathbf{v} = (u_1,u_2,u_3)-(v_1,v_2,v_3) = (u_1-v_1,u_2-v_2,u_3-v_3).$$

A skalárral való szorzás is a koordinátánként való végrehajtás lehetőségét mutatja:

$$\begin{aligned}c\mathbf{u} &= c(u_1,u_2,u_3) = c(u_1\mathbf{e}_1+u_2\mathbf{e}_2+u_3\mathbf{e}_3)\\ &= cu_1\mathbf{e}_1+cu_2\mathbf{e}_2+cu_3\mathbf{e}_3\\ &= (cu_1,cu_2,cu_3).\end{aligned}$$

Összefoglalva tehát a következő állítást kapjuk:

1.38. ÁLLÍTÁS (VEKTORMŰVELETEK KOORDINÁTÁS ALAKJA). *Adva van a térben egy koordinátarendszer és abban két tetszőleges* $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$ *és* $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$ *vektor, valamint egy tetszőleges* $c\in\mathbb{R}$ *valós szám. Ekkor a vektorok összegének, különbségének és skalárszorosának koordinátás alakja rendre*

$$\begin{aligned}\mathbf{u}+\mathbf{v} &= (u_1,u_2,u_3)+(v_1,v_2,v_3) = (u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3),\\ \mathbf{u}-\mathbf{v} &= (u_1,u_2,u_3)-(v_1,v_2,v_3) = (u_1-v_1,u_2-v_2,u_3-v_3),\\ c\mathbf{u} &= c(u_1,u_2,u_3) = (cu_1,cu_2,cu_3).\end{aligned}$$

Az oszlopvektor jelölést használva

$$\mathbf{u}\pm\mathbf{v} = \begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}\pm\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1\pm v_1\\u_2\pm v_2\\u_3\pm v_3\end{bmatrix},\quad c\mathbf{u}=c\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}cu_1\\cu_2\\cu_3\end{bmatrix}.$$

A síkbeli vektorokra hasonló állítások igazak, csak két koordinátával. Érdekesebb a helyzet a skaláris szorzással. Látni fogjuk, hogy a skaláris szorzás koordinátás alakja függ a koordinátarendszertől.

1.39. PÉLDA (SKALÁRIS SZORZÁS KOORDINÁTARENDSZERBEN). *Tekintsünk egy olyan síkbeli koordinátarendszert, ahol az első alapvektor hossza* 1*, a másodiké* 2*, és a kettőjük közti szög* $\pi/3$*. Számítsuk ki az* $\mathbf{a}=(1,1)$ *és a* $\mathbf{b}=(-5/2,1)$ *vektorok skaláris szorzatát.*

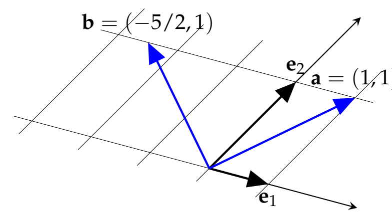
MEGOLDÁS. Az alapvektorok hosszát és szögét ismerve ki tudjuk számítani az alapvektorok skaláris szorzatait:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 2^2 = 4, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 1 \cdot 2 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 1.$$

Ezt fölhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \cdot (-\frac{5}{2}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \\
&= -\frac{5}{2}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + (1 - \frac{5}{2})\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \\
&= -\frac{5}{2} - \frac{3}{2} + 4 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

tehát a két vektor merőleges egymásra (ld. az 1.41. ábrát).



1.41. ábra: Két vektor skaláris szorzata

Érdekességként meghatározzuk e koordinátarendszerben a skaláris szorzás általános képletét:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2) \cdot (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) \\
&= u_1v_1\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + (u_1v_2 + u_2v_1)\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + u_2v_2\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \\
&= u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + 4u_2v_2.
\end{aligned}$$

□

A derékszögű koordinátarendszer A természeti törvények különös fontosságot adnak az egymásra merőleges irányoknak, ezért például igen gyakran érdemes olyan koordinátarendszert választani, amelyben az alapvektorok merőlegesek, más szóval *ortogonálisak* egymásra. A bázisvektorok szöge mellett azok hosszát is érdemes standardizálni, nevezetesen egységnyi hosszúnak választani, így mindegyik koordináta egyúttal távolságot is jelent. Az egységvektorokból álló ortogonális bázist *ortonormáltnak* nevezzük.

Az egységes tárgyalás érdekében a bázisvektorok körüljárását is előírhatjuk: általánosan elterjedt szokás a jobbrendszert választani. Az így konstruált bázis vektorait síkban gyakran **i**, **j**, térben **i**, **j** és **k** jelöli.

A két és háromdimenziós térben a skaláris szorzat egyszerű alakot ölt, ha a koordinátarendszer alapvektorai ortonormáltak.

1.40. ÁLLÍTÁS (SKALÁRIS SZORZAT ORTONORMÁLT KOORDINÁTARENDSZERBEN). *A síkbeli* $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ *és* $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, *illetve a térbeli* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *és* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *vektorok skaláris szorzata ortonormált koordinátarendszerben*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2, \text{ illetve } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Bizonyítás. A síkbeli esetben kihasználjuk, hogy $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1$ és $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0$:

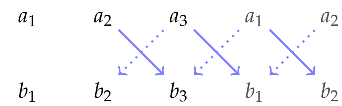
$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j})\cdot(v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j})\\ &= u_1v_1\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + (u_1v_2 + u_2v_1)\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + u_2v_2\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}\\ &= u_1v_1 + u_2v_2\end{aligned}$$

A térbeli eset hasonlóan bizonyítható. □

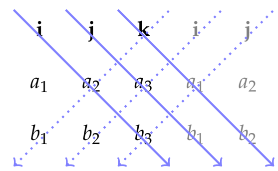
1.41. Állítás (Vektori szorzat ortonormált koordinátarendszerben). *A térbeli* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *és* $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *vektorok vektori szorzata derékszögű koordinátarendszerben*

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

► Az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ koordinátáinak könnyű memorizálására két sémát mutatunk a széljegyzetben.



a) $(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$



b) $$\begin{aligned}&(a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} +\\ &\quad(a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} +\\ &\qquad(a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}\end{aligned}$$

1.42. ábra: A vektori szorzat kiszámítása a két vektor koordinátáiból:
a) Írjuk a két vektort egymás alá, majd az első két koordinátát másoljuk a vektorok végére, végül az X alakba rakott nyílpároknál a ↘ nyíl végein lévő számok szorzatából vonjuk ki a ↙ szerinti szorzatot. Az eredmény:

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

b) Írjuk a két vektor koordinátái fölé az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ vektorokat, majd az előzőhöz hasonlóan másoljuk e táblázat után az első két oszlopot, végül a ↘ nyíl menti szorzatokból vonjuk ki a ↙ menti szorzatokat. Megjegyezzük, hogy e séma a később tanulandó determinánsok kiszámítására emlékeztet, formálisan föl is szokás írni a determinánsokat jelölő függőleges zárójelek segítségével:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}.$$

Bizonyítás. Az alapvektorok egymással való vektori szorzatait már kiszámoltuk az 1.28. példában. Kihasználva, hogy $\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = \mathbf{0}$, $\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k}, \dots$, a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})\times(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})\\ &= a_2b_3\mathbf{j}\times\mathbf{k} + a_3b_2\mathbf{k}\times\mathbf{j} + a_3b_1\mathbf{k}\times\mathbf{i} + a_1b_3\mathbf{i}\times\mathbf{k} + a_1b_2\mathbf{i}\times\mathbf{j} + a_2b_1\mathbf{j}\times\mathbf{i}\\ &= a_2b_3\mathbf{i} - a_3b_2\mathbf{i} + a_3b_1\mathbf{j} - a_1b_3\mathbf{j} + a_1b_2\mathbf{k} - a_2b_1\mathbf{k}\\ &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).\end{aligned}$$ □

1.42. példa (Parallelogramma területe). *Mutassuk meg, hogy az* (a, b) *és a* (c, d) *vektorok által kifeszített parallelogramma területe*

$$|ad - bc|.$$

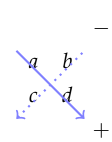
Mi a jelentése az $ad - bc$ *előjelének?*

Megoldás. Két 3-dimenziós vektor által kifeszített parallelogramma területe a vektori szorzatuk abszolút értéke. Ágyazzuk be a megadott két vektort a tér egyik koordinátasíkjába, tekintsük például az $(a, b, 0)$ és a $(c, d, 0)$ vektorokat. Vektori szorzatuk

$$(a, b, 0)\times(c, d, 0) = (0, 0, ad - bc),$$

ennek abszolút értéke $|ad - bc|$.

Mivel az $(a, b, 0)$, $(c, d, 0)$ és $(0, 0, ad - bc)$ vektorok jobbrendszert alkotnak, ezért $ad - bc$ pontosan akkor pozitív, ha a síkban az (a, b) és a (c, d) vektorok jobbrendszert alkotnak, és $ad - bc$ pontosan akkor negatív, ha az (a, b) és a (c, d) vektorok balrendszert alkotnak (gondoljuk meg!). □



1.43. ábra: A parallelogramma előjeles területe $ad - bc$, melynek memorizálására a fenti séma használatos. Ez megegyezik két 2-dimenziós vektor – később tanulandó – determinánsával, melyet úgy jelöljük, hogy a két vektor koordinátáiból képzett táblázatot függőleges zárójelek közé zárjuk:

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix} = ad - bc$$

Vigyázzunk, e jel nem az abszolút értéket jelöli, ahhoz egy további zárójelpár szükséges, azaz

$$|ad - bc| = \left|\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\right|.$$

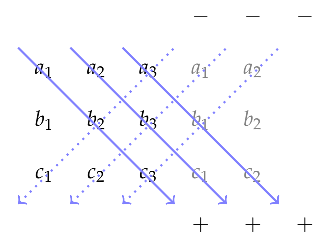
1.43. PÉLDA (PARALELEPIPEDON TÉRFOGATA). *Mutassuk meg, hogy az* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *és* $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ *vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata*

$$|a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1|$$

Mi a jelentése az $a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$ *előjelének?*

MEGOLDÁS. Az 1.32. példában láttuk, hogy a három vektor által kifeszített parallelepipedon térfogata $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$, amit a koordinátás alakokból kiszámolhatunk:

$$\begin{aligned}(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \cdot (c_1, c_2, c_3) = \\ a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1. \end{aligned} \qquad \square$$



1.44. ábra: A paralelepipedon térfogata megegyezik az azt kifeszítő három vektor vegyes szorzatának abszolút értékével. A vektori szorzáshoz használt séma itt is működik: a három vektort egymás alá írjuk, az így kapott táblázat első két oszlopát utána másoljuk, végül a ↘ nyíl menti szorzatokból kivonjuk a ↙ menti szorzatokat. A később tanulandó determinánsokra használt jelöléssel tehát a paralelepipedon előjeles térfogata:

$$\mathbf{abc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Az $\mathbb{R}^n$ *halmaz* Láttuk, hogy 2-dimenziós, illetve 3-dimenziós vektorjellegű mennyiségek leírhatók egy rendezett számpárral, illetve számhármassal. Izgalmas a fordított helyzet, amikor legalább 4, de akár több millió szorosan összefüggő adatból képzett, rendezett szám-n-essel dolgozunk. Vajon értelmes dolog-e e szám-n-eseket egy n-dimenziós tér vektorainak, vagy pontjainak tekinteni? És van-e értelme a 2- és 3-dimenziós térben használt fogalmak általánosításának n dimenzióra? A válasz mindegyik kérdésre határozott igen, amit a fizika 4-dimenziós tér-idő fogalma, számtalan gazdasági, vagy internettel kapcsolatos probléma megoldása fényesen bizonyít.

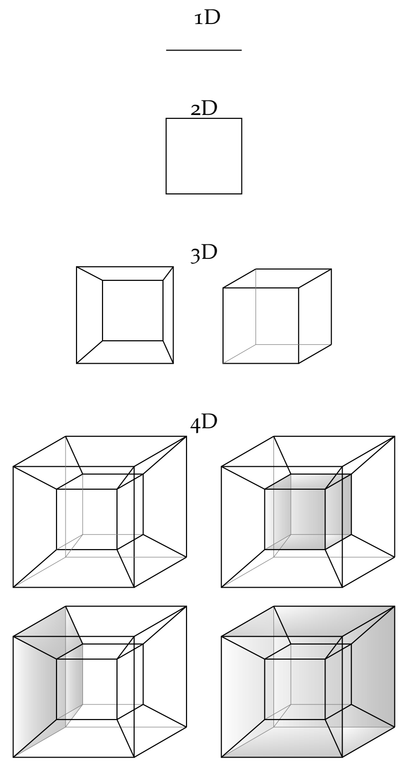
1.44. DEFINÍCIÓ. *Egy tetszőleges* H *halmaz elemeiből képzett rendezett elem-n-esek halmazát* H^n*-nel jelöljük.*

Például ha $H = \{0, 1\}$, akkor H^3 a H elemeiből képzett rendezett elemhármasok halmaza, azaz:

$$\{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}.$$

A fenti jelölésnek megfelelően $\mathbb{R}^n$ *a valós számokból képzett rendezett szám-n-esek halmazát jelöli.* Eszerint a sík pontjait és vektorait $\mathbb{R}^2$, a térét $\mathbb{R}^3$ elemeivel koordinátáztuk. Később $\mathbb{R}^n$ elemein vektorműveleteket fogunk bevezetni, és $\mathbb{R}^n$-ről, mint vektortérről fogunk beszélni. Hasonlóképp, $\mathbb{R}^n$-t geometriai vagy ponttérnek fogjuk tekinteni, ha elemeire, mint pontokra gondolunk, és köztük geometriai műveleteket végezünk. E sokféleség sosem fog gondot okozni: $\mathbb{R}^n$ szerepét mindig az fogja meghatározni, hogy mit teszünk elemeivel, vagyis a szám-n-esekkel.

Az $\mathbb{R}^n$ megismerésében az *analógia* fonalán haladunk, a 2- és 3-dimenziós tér fogalmait fogjuk átvinni, általánosítani n dimenzióra. Ez



1.45. ábra: 4-dimenziós kocka ábrázolása 2-dimenzióban. A 0-dimenziós „kocka” egyetlen pontból áll, az 1-dimenziós kockát két 0-dimenziós határolja, azaz ez egy szakasz. A 2-dimenziós „kockát”, azaz a négyzetet minden tengelyirányból két-két egybevágó 1-dimenziós „kocka” határolja (azaz összesen négy), míg a 3-dimenziós kockát minden tengelyirányból két-két négyzet (azaz összesen hat). A 3-dimenziós kocka ábrázolása 2-dimenzióban csak a határoló négyzetek torzításával oldható meg. A 4-dimenziós kockát mind a négy tengelyirányból két-két 3-dimenziós kocka határolja, összesen nyolc. Az ábrán három ilyen 3-dimenziós kockát kiszíneztünk.

az analógia fog segíteni abban, hogy valamit „lássunk” n dimenzióban is (ha nem is olyan jól, mint 3 dimenzióban). Példaként az analógiára egy 4-dimenziós kocka 2-dimenziós vetületét mutatjuk az 1.45. ábrán.

Vektorok összeadása és skalárral szorzása $\mathbb{R}^n$-ben A 2- és 3-dimenziós vektorok műveleteinek koordinátás alakja az összeadás, kivonás és skalárral szorzás esetén analóg módon átvihető az n-dimenziós vektorokra.

1.45. DEFINÍCIÓ (VEKTORMŰVELETEK $\mathbb{R}^n$-BEN). *Legyen $c \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges valós, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ az $\mathbb{R}^n$ tér két tetszőleges vektora. E két vektor összegét és egyikük c-szeresét a következő képletekkel definiáljuk:*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) \\ c\mathbf{u} &= (cu_1, cu_2, \ldots, cu_n). \end{aligned}$$

Összefoglaljuk e műveletek legfontosabb tulajdonságait. Ezekre többször is hivatkozni fogunk a későbbiekben.

1.46. TÉTEL (AZ ÖSSZEADÁS ÉS SKALÁRRAL SZORZÁS TULAJDONSÁGAI). *Legyen $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ az $\mathbb{R}^n$ három tetszőleges vektora, és legyen c, d két teszőleges valós, jelölje $\mathbf{0}$ a $(0, 0, \ldots, 0)$ vektort és $-\mathbf{u}$ a $(-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$ vektort. Ekkor*

a)	$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$	*a + művelet nem vezet ki $\mathbb{R}^n$-ből*
b)	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	*a művelet fölcserélhető (kommutatív)*
c)	$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$	*csoportosítható (asszociatív)*
d)	$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$	*zérusvektor*
e)	$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$	*ellentett vektor*
f)	$c\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$	*e szorzás nem vezet ki $\mathbb{R}^n$-ből*
g)	$c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$	*a két szorzás kompatibilis*
h)	$c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$	*disztributív*
i)	$(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$	*disztributív*
j)	$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$	*szorzás 1-gyel*

E tíz tulajdonság később kitüntetett szerepet fog játszani, ezért elkülönítjük a tovább felsorolandóktól:

1) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
2) $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$
3) $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$
4) *a skalár hátra is írható, azaz $c\mathbf{u} = \mathbf{u}c$ és így $\mathbf{u}/c = \frac{1}{c}\mathbf{u}$*

► E tulajdonságok mindegyike könnyen visszavezethető a valós számok algebrai tulajdonságaira, ezért ezek ellenőrzését (bizonyítását) az

Olvasóra hagyjuk. Mintaként megmutatjuk a *b)* bizonyítását:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}+\mathbf{v} &= (u_1+v_1, u_2+v_2, \dots, u_n+v_n)\\ &= (v_1+u_1, v_2+u_2, \dots, v_n+u_n)\\ &= \mathbf{v}+\mathbf{u}.\end{aligned}$$

► Az *a)–e)* tulajdonságok az összeadás, az *f)–j)* tulajdonságok a skalárral szorzás tulajdonságait írják le. Mindkét csoport első tulajdonsága csak annyit mond, hogy a művelet eredménye is ugyanabba a vektorhalmazba, azaz $\mathbb{R}^n$-be esik, ahová a műveletben szereplő vektor való.

1.47. PÉLDA. *Mutassuk meg, hogy az $\mathbb{R}^n$-beli $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$,..., $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$ vektorok lineárisan függetlenek, és hogy $\mathbb{R}^n$ minden vektora egyértelműen előáll ezek lineáris kombinációjaként!*

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{e}_1$ biztosan nem áll elő a többi vektor lineáris kombinációjaként, hisz a többi vektor első koordinátája 0, így azok bármely lineáris kombinációjában is 0 az első koordináta, $\mathbf{e}_1$-ben pedig 1. Hasonlóan igazolható, hogy egyik $\mathbf{e}_i$ sem áll elő a többi vektor lineáris kombinációjaként ($i = 2, 3, \dots, n$). A megadott vektorok tehát lineárisan függetlenek.

Mivel az i-edik koordináta egyedül csak az $\mathbf{e}_i$ vektorban 1, a többiben 0, ezért ha egy tetszőleges $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ vektor előáll az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$,..., $\mathbf{e}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként, akkor abban $\mathbf{e}_i$ együtthatója csak v_i lehet. Másrészt az is világos, hogy

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \dots + v_n\mathbf{e}_n.$$

Ezzel igazoltuk, hogy $\mathbb{R}^n$ minden vektora egyértelműen áll elő az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$,..., $\mathbf{e}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként. □

Lineáris kombináció, lineáris függetlenség, lineáris összefüggőség Hiába definiáltuk vektorok lineáris függetlenségének fogalmát tetszőleges számú vektorból álló vektorhalmazra, láttuk, hogy a 3-dimenziós térben legföljebb csak 3 vektor lehet lineárisan független. Viszont az $\mathbb{R}^n$ térben találtunk n lineárisan független vektort is.

Az 1.10. definíció szerint egy legalább kételemű vektorrendszer lineárisan független, ha mindegyik vektor független a többitől, azaz egyik sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként, egyetlen vektor pedig lineárisan független, ha nem a zérusvektor. Ez nehézkes feltétel, hisz mindegyik vektorra külön ellenőrizni kell, ezért egy könnyebben ellenőrizhető, de ekvivalens feltételt keresünk. A háromdimenziós térben láttuk, hogy ha három vektor független, akkor a tér bármely vektora *egyértelműen* előáll lineáris kombinációjukként. Ez igaz a nullvektorra is. A nullvektor egyféleképp biztosan előáll: a három vektor nullákkal vett lineáris kombinációjaként. Ezt nevezzük a nullvektor triviális előállításának. A fentiek szerint más előállítása nincs is, ha a három vektor lineárisan független. Ez az alapja a következő tételnek:

1.48. TÉTEL (LINEÁRIS FÜGGETLENSÉG). *Tetszőleges $\mathbb{R}^n$-beli $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ vektorrendszerre az alábbi két állítás ekvivalens:*

1. $\mathcal{V}$ lineárisan független, *azaz $k > 1$ esetén egyik vektora sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként, $k = 1$ esetén pedig a vektor nem a zérusvektor.*
2. *A zérusvektor csak egyféleképp – a triviális módon – áll elő $\mathcal{V}$ lineáris kombinációjaként. Másként fogalmazva, a c_1, c_2,..., c_k skalárokkal vett lineáris kombináció csak akkor lehet a nullvektor, azaz*

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

csak akkor állhat fenn, ha

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0.$$

BIZONYÍTÁS. Először tegyük fel, hogy a vektorrendszer csak egyetlen $\mathbf{v}$ vektorból áll. Ekkor a tétel azt állítja, hogy e vektor pontosan akkor lineáris független, azaz pontosan akkor nem a nullvektor, ha a $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$ csak $c = 0$ esetén állhat fenn. Ez nyilvánvaló, hisz ha $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ és $c \neq 0$, akkor $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sem állhat fenn. A továbbiakban tegyük fel, hogy a vektorrendszer legalább két vektorból áll. A következőkben kontrapozícióval bizonyítunk, azaz az $A \Rightarrow B$ állítást a vele ekvivalens $\neg B \Rightarrow \neg A$ állítással igazoljuk.

($\Longleftarrow$) Megmutatjuk, hogy ha $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ csak $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$ esetén állhat fenn, akkor semelyik $\mathbf{v}_i$ vektor sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként ($i = 1, 2, \ldots, k$). Tegyük fel, hogy valamelyik vektor – például a $\mathbf{v}_1$ – kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, azaz

$$\mathbf{v}_1 = d_2\mathbf{v}_2 + \ldots + d_k\mathbf{v}_k,$$

vagyis átrendezés után

$$(-1)\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \ldots + d_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Mivel $\mathbf{v}_1$ együtthatója nem 0, így elő tudtuk állítani a nullvektort olyan lineáris kombinációként, melyben nem minden együttható 0.

($\Longrightarrow$) Megmutatjuk, hogy ha a vektorrendszer egyik vektora sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként, akkor egyedül csak a csupa zérus együtthatójú lineáris kombinációja lehet zérusvektor. Ismét kontrapozícióval bizonyítunk: ha van olyan – nem csupa 0 együtthatójú – lineáris kombináció, mely a nullvektorral egyenlő, azaz

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

de valamelyik együttható – például a c_1 – nem 0, akkor $\mathbf{v}_1$ kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\mathbf{v}_2 - \ldots - \frac{c_k}{c_1}\mathbf{v}_k,$$

ami bizonyítja az állítást. □

Egy vektorrendszert *lineárisan összefüggőnek* nevezünk, ha nem független, azaz egyelemű vektorrendszer esetén ha az a vektor a zérusvektor, többelemű vektorrendszer esetén pedig ha van olyan vektora, mely kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Az előző tétel szerint ez azzal ekvivalens, hogy a vektorrendszernek van olyan zérusvektort adó lineáris kombinációja, melyben nem mindegyik együttható zérus. A lineáris összefüggőség definíciója kicsit élesíthető:

1.49. TÉTEL (LINEÁRIS ÖSSZEFÜGGŐSÉG). *Egy nullvektortól különböző elemekből álló, legalább kételemű $\mathbb{R}^n$-beli $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha van olyan $t \geq 2$ index, hogy $\mathbf{v}_t$ a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{t-1}$ vektorok lineáris kombinációja.*

Másként fogalmazva, ha egy nullvektort nem tartalmazó vektorrendszerben találunk olyan vektort, mely a többi lineáris kombinációja, akkor olyat is találunk a vektorok bármely sorba rendezése mellett, mely sorrendben csak az őt megelőző vektor(ok) lineáris kombinációja.

BIZONYÍTÁS. Először tegyük fel, hogy a vektorrendszer összefüggő, és legyen t az a legkisebb egész, melyre a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t$ vektorok már összefüggők. Mivel $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, ezért az első vektor nem lehet összefüggő, ezért $t \geq 2$. E vektorok összefüggősége miatt vannak olyan c_i konstansok, melyekkel

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_t\mathbf{v}_t = \mathbf{0}.$$

Biztos, hogy $c_t \neq 0$, különben már a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{t-1}$ vektorok is lineáris összefüggők lennének, és ez ellentmond t definíciójának. Így

$$\mathbf{v}_t = \frac{-c_1}{c_t}\mathbf{v}_1 + \frac{-c_2}{c_t}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{-c_{t-1}}{c_t}\mathbf{v}_{t-1},$$

ami bizonyítja, hogy összefüggő vektorrendszerben létezik ilyen vektor.

A másik irányú implikáció definíció szerint igaz, hisz ha létezik ilyen $\mathbf{v}_t$ vektor, akkor ez valóban lineáris kombinációja az összes többi vektornak. □

Skaláris szorzás $\mathbb{R}^n$-ben A skaláris szorzást először abból az alakból általánosítjuk, amelyet a 2- és 3-dimenziós térben ortonormált bázis esetén láttunk. A tetszőleges bázis esetére való általánosításra később térünk vissza.

1.50. DEFINÍCIÓ (SKALÁRIS SZORZÁS $\mathbb{R}^n$-BEN). *Legyen* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *és* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *az* $\mathbb{R}^n$ *tér két tetszőleges vektora. Skaláris szorzatukon a következő kifejezést értjük:*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n.$$

A skaláris szorzásnak most csak azokat a tulajdonságait említjük, melyek a későbbi általánosításhoz szükségesek lesznek:

1.51. TÉTEL (A SKALÁRIS SZORZÁS TULAJDONSÁGAI). *Legyen* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *és* $\mathbf{w}$ *az* $\mathbb{R}^n$ *három tetszőleges vektora, és legyen* c *egy teszőleges valós. Ekkor*

a)	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$	*a művelet fölcserélhető (kommutatív)*
b)	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$	*disztributív*
c)	$(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$	*a két szorzás kompatibilis*
d)	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ *és* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ *pontosan akkor teljesül, ha* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.	

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás itt is igen egyszerű, ezért csak az *a)* pontét mutatjuk meg, a többit az Olvasóra hagyjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n \\ &= v_1 u_1 + v_2 u_2 + \ldots + v_n u_n \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}. \end{aligned}$$

□

Távolság és szög $\mathbb{R}^n$*-ben* Két 2- vagy 3-dimenziós vektor (végpontja) távolságának és szögének a skaláris szorzatukkal való kapcsolatát használjuk e fogalmaknak a magasabb dimenziós terekben való definíciójához.

1.52. DEFINÍCIÓ (ABSZOLÚT ÉRTÉK, SZÖG, MERŐLEGESSÉG, TÁVOLSÁG). *Legyen* $\mathbf{u}$ *és* $\mathbf{v}$ *az* $\mathbb{R}^n$ *tér két tetszőleges vektora.*

a) *Az* $\mathbf{u}$ *vektor hosszán önmagával vett skaláris szorzatának gyökét értjük, azaz*
$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}. \tag{1.3}$$

b) *Az* $\mathbf{u}$ *és* $\mathbf{v}$ *vektorok* (hajlás)szögének *koszinuszát az alábbi törttel definiáljuk:*
$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\angle := \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \tag{1.4}$$

c) *Azt mondjuk, hogy az* $\mathbf{u}$ *és* $\mathbf{v}$ *vektorok* merőlegesek *egymásra, ha*
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{1.5}$$

d) *A két vektor végpontjának távolságán, amit egyszerűen a két* vektor távolságának *nevezünk, a*
$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u} - \mathbf{v}| \tag{1.6}$$

értéket értjük.

► A fenti definíciókat érdemes megtekinteni koordinátás alakjukba átírva. Eszerint például

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}| &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2},\\ \cos(\mathbf{u},\mathbf{v})_\angle &= \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}}.\end{aligned}$$

► A fenti definíciók közül a vektorok hajlásszögének definíciója még hiányos. Egy szög koszinusza csak a $[-1, 1]$ intervallumba eső szám lehet, ezért e definíció csak akkor értelmes, ha az (1.4) képlet számlálójára és nevezőjére igaz, hogy $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \le |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$, azaz ha n-dimenziós vektorokra is fönnáll a CBS-egyenlőtlenség. Ezt hamarosan igazolni fogjuk!

1.53. PÉLDA (VEKTOROK SZÖGE ÉS TÁVOLSÁGA). *Az $\mathbf{u} = (2, 3, 4, 14)$ vektornak mennyi az abszolút értéke, mennyi a $\mathbf{v} = (4, 6, -10, 10)$ vektortól való távolsága, és mennyi a $\mathbf{w} = (0, 3, 6, -2)$ vektorral bezárt szögének koszinusza?*

MEGOLDÁS. A válaszhoz az (1.3), az (1.6) és az (1.4) képleteket használjuk:

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}| &= \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2 + 14^2} = \sqrt{225} = 15,\\ d(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= \sqrt{(2-4)^2 + (3-6)^2 + (4-(-10))^2 + (14-10)^2}\\ &= \sqrt{2^2 + 3^2 + 14^2 + 4^2} = 15\\ \cos(\mathbf{u},\mathbf{w})_\angle &= \frac{2\cdot 0 + 3\cdot 3 + 4\cdot 6 + 14\cdot(-2)}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2 + 14^2}\sqrt{0^2 + 3^2 + 6^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{21}.\end{aligned}$$ □

1.54. TÉTEL (CAUCHY–BUNYAKOVSZKIJ–SCHWARZ-EGYENLŐTLENSÉG). *Tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra*

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \le |\mathbf{u}||\mathbf{v}|. \tag{1.7}$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ lineárisan összefüggők, azaz ha egyik vektor a másik skalárszorosa.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel először, hogy $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Ekkor a tétel állításának mindkét része nyilván igaz, hisz egyenlőség áll fenn, és a két vektor lineárisan összefüggő. Ha $\mathbf{v} \ne \mathbf{0}$, akkor legyen $\mathbf{e} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ a $\mathbf{v}$ irányú egységvektor. Az $\mathbf{u}$ vektor $\mathbf{e}$ egyenesére merőleges összetevőjének hossza, illetve annak négyzete nyilván nem negatív, azaz

$$\begin{aligned}0 &\le |\mathbf{u} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e}|^2 \\ &= |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}|^2 - 2\,|\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}|^2 \\ &= |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}|^2 \\ &= |\mathbf{u}|^2 - \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}|^2},\end{aligned}$$

Innen átrendezéssel azonnal megkapjuk a bizonyítandó állítást. Másrészt az is világos, hogy $0 = |\mathbf{u} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e}|$ csak akkor állhat fönn, ha $\mathbf{u} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e}$, azaz ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{e}$ párhuzamosak, azaz ha $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ skalárszorosa, vagyis ha a két vektor lineárisan összefüggő. □

1.55. TÉTEL (HÁROMSZÖG-EGYENLŐTLENSÉG $\mathbb{R}^n$-BEN). *Tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra*

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \le |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|.$$

A bizonyítás megegyezik a 3-dimenziós változatra, azaz az 1.22. tételre adott bizonyítással.

A vektor abszolút értékét a skaláris szorzat segítségével definiáltuk, de fordítva, a skaláris szorzat is kifejezhető a vektor abszolút értékével.

1.56. TÉTEL (SKALÁRIS SZORZAT ÉS ABSZOLÚT ÉRTÉK $\mathbb{R}^n$-BEN). *Tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra*

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{4}\left(|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2\right) \tag{1.8}$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2\right) \tag{1.9}$$

BIZONYÍTÁS. A bizonyításban az abszolút érték (1.3)-beli definícióját használjuk:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left(|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2\right) &= \frac{1}{4}\left((\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - (\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) \\ &= \frac{1}{4}(4\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}.\end{aligned}$$

A másik formula hasonlóan bizonyítható. □

Végül egy fontos összefüggés az ortogonális vektorrendszerekről:

1.57. ÁLLÍTÁS (ORTOGONÁLIS VEKTORRENDSZER LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGE). *Tegyük fel, hogy a zérusvektortól különböző $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots$, $\mathbf{v}_k$ vektorok páronként ortogonálisak, azaz bármely $i \ne j$ esetén $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$. Ekkor e vektorok lineárisan függetlenek.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy valamely $c_1, c_2, \ldots, c_k$ konstansokra

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Szorozzuk be az egyenlőség mindkét oldalát skalárisan a $\mathbf{v}_i$ vektorral. Mivel $i \neq j$ esetén $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$, ezért azt kapjuk, hogy

$$c_i\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = 0,$$

amiből $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \neq 0$ miatt következik, hogy $c_i = 0$. Mivel ez minden $i = 1, 2, \ldots, k$ indexre igaz, ezért a vektorok valóban lineárisan függetlenek. □

► Ha e vektorok az $\mathbb{R}^n$ tér vektorai, akkor felvetődik a kérdés, hogy mi k és n viszonya. Később látni fogjuk, hogy $k \leq n$.

► Később azt is meg fogjuk mutatni, hogy bármely független vektorrendszerből kiindulva megkonstruálható egy vele azonos elemszámú ortogonális vektorrendszer. A műszaki alkalmazásokban is gyakori, hogy egy meglévő alapvektorrendszerből egy ortogonális, majd abból egy ortonormált vektorrendszert konstruálunk.

*Korrelációs együttható** Az n-dimenziós térben szerzett friss szemléletünk segítségünkre lesz egy fontos fogalom megértésében.

Adva van két adatsor: $x_1, x_2, \ldots x_n$ és $y_1, y_2, \ldots y_n$. Átlagukat jelölje $\bar{x}$, illetve $\bar{y}$, azaz

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}.$$

Az r-rel jelölt ún. *korrelációs együttható* azt méri, hogy a két adatsor közti lineáris függvénykapcsolat milyen erős. Az erre használt képlet a következő:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}.$$

Vajon hogyan méri r a lineáris függvénykapcsolat erősségét?

Tegyük fel, hogy a két adatsor közt fönnáll az $y_i = cx_i + d$ lineáris függvénykapcsolat minden $i = 1, 2, \ldots n$ indexre valamely c, d konstansokkal. Ha mindkét adatsorból levonjuk az átlagukat (más szóval a két adatsort *normáljuk*), akkor az így kapott

$$a_i = x_i - \bar{x}, \quad b_i = y_i - \bar{y} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

adatsorokra igaz a $b_i = ca_i$ összefüggés. Ugyanis

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} cx_i + d\right) = c\bar{x} + d,$$

amiből $b_i = y_i - \bar{y} = cx_i + d - c\bar{x} - d = c(x_i - \bar{x}) = ca_i$.

Tehát az $y_i = cx_i + d$ lineáris függvénykapcsolat pontosan akkor áll fönn, ha a normált adatsorokra $b_i = ca_i$. Az adatsorokat n-dimenziós vektorokba foglalva ez azzal ekvivalens, hogy $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$, azaz ha e vektorok kollineárisak. A korrelációs együttható nem más, mint e két utóbbi vektor szögének koszinusza, ugyanis

$$\begin{aligned}\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle &= \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}}\\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i-\bar{y})^2}} = r.\end{aligned}$$

Valóban, a két vektor szögének koszinusza pontosan akkor 1, ha a vektorok szöge 0, és akkor -1, ha a szög π. A korreláció tehát -1 és 1 közt változik, és abszolút értéke annál kisebb, minél nagyobb az **a** és **b** vektorok hajlásszöge, azaz minél kevésbé kollineárisak, azaz minél kevésbé erős a két számsorozat közti lineáris függvénykapcsolat.

Ha $r = 0$, akkor **a** és **b** merőlegesek, ekkor lineáris függvénykapcsolat nincs az eredeti két mennyiség közt (más kapcsolat még lehet, tehát nem feltétlenül független a két adatsor egymástól valószínűségszámítási értelemben). A fogalom mélyebb megértése a valószínűségszámítás ismeretét is megkívánja, ezzel mi itt nem foglalkozunk.

*Bitvektorok, kódvektorok** A modern számítógépek memóriájában vagy háttértárolóin az adatok tárolásának legkisebb egysége a bit. Egy bittel két állapot tárolható, melyeket a 0 és 1 számokkal jelölünk, de amelyek több mindent is reprezentálhatnak: hamis/igaz, nem/igen, ki/be,.... A biteket a hardver lehetőségei és a feladat igényei szerint csoportokba, sorozatokba, vektorokba gyűjtik, melyekkel különféle műveletek végezhetők. Ezek attól is függnek, hogy a bitvektorok milyen adatokat kódolnak. E műveletek közül minket azok fognak érdekelni, melyek algebrailag a korábban megismert vektorműveletekre hasonlítanak.

Az egyszerűség kedvéért a bitvektorokat gyakran a biteket jelölő számjegyek egyszerű egymás mellé írásával adjuk meg, pl. 01110101 a $(0,1,1,1,0,1,0,1)$ vektort jelöli.

A modern számítástechnika számtalan kódot használ, mely bitvektorokkal (is) leírható. Például karakterek kódolására használatos a 7-dimenziós bitvektorokból álló ASCII-kód, a decimális számok kódolására a 4-dimenziós bitvektorokból álló BCD-kód.

Az emberek által is elolvasható kódok gyakran decimális számokból állnak. Például az emberek azonosítására használt *személyi szám* egy olyan vektornak tekinthető, amelynek koordinátái a 10-elemű $\{0,1,\ldots,9\}$ halmazból valók.

A kódoláshoz mi a továbbiakban mindig egy rögzített, véges kód-

Bit: az angol ***b**inary dig**it*** kifejezésből képzett szó, ami magyarul bináris, azaz kettes számrendszerbeli számot jelent. A szoftver (software) szót is megalkotó John W. Tukey ötlete.

Az ASCII-KÓD eredendően az angol nyelvű szövegek kódolására tervezett 8-hosszú bináris kód (azaz 1 bájtos). Az angol nyelv betűi, írásjelei, és néhány számítógépet vezérlő karakter mindegyikének egy olyan vektor felel meg, melynek első koordinátája 0. Tehát a lehetséges 256 darab 8-hosszú vektorból 128 tartozik a kódba. Pl. a „z" betű ASCII-kódja 01111010, decimális alakban 122.

A BCD-KÓD decimális számok egyik szokásos kódolása, mely a szám kettes számrendszerbe való átírása helyett a számjegyenként való kódolást választja. Több változata is van, a legegyszerűbbikben minden számjegynek 4-4 bit felel meg, így a 16 lehetséges 4-hosszú kódszó helyett csak tízet használ: a 0, 1,..., 9 jegyek kódja rendre 0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1001. Így az 561 BCD-kódja három kódvektorból áll: 0101 0110 0001. A kettes számrendszerbeli alak 1000110001.

ábécét használunk, amelynek betűi általában a 0-tól $n-1$-ig terjedő egészek lesznek. Az ábécé „betűiből”, azaz elemeiből képzett vektorokat *kódvektor*oknak vagy *kódszavak*nak nevezzük. A bitvektorok is kódvektorok, ahol a kódábécé a kételemű $\{0, 1\}$ halmaz.

A kódvektorok koordinátáinak számát, vagyis a kódvektor dimenzióját a kód *hosszának* nevezzük. Ez természetesen nem analóg fogalom a vektor abszolút értékével.

A személyi szám tehát egy 10-elemű ábécéből képzett 11-hosszú kódszó. Nem minden 11-hosszú decimális vektor lehet személyi szám, mert az utolsó koordináta egy ellenőrző jegy, vagyis a személyi szám, mint kód, matematikailag a 11-hosszú kódvektorok halmazának egy részhalmazaként írható le. Ezért általában a kódábécé betűiből képzett vektorok részhalmazait fogjuk kódnak nevezni.

1.58. DEFINÍCIÓ (KÓD). *A* kód *egy közös ábécéből képzett azonos hosszúságú kódszavak egy halmaza.* Kódolás *során a kódolandó objektumokhoz kódszavakat rendelünk,* dekódolás *az ellenkező irányú folyamat.*

Főként az információelméletben változó hosszú kódszavak is tartozhatnak egy kódhoz. Mi ilyenekkel nem fogunk foglalkozni, de megemlítjük, hogy a karakterek manapság elterjedt UTF-8 kódolása is ilyen, amelyben egy karakterkódja 8-, 16-, 24- vagy 32-bites lehet.

*Vektorműveletek $\mathbb{Z}_m^n$-ben** A $\mathbb{Z}_m$-re vonatkozó ismereteket a függelékben részletezzük. Az 1.44. definíció szerint $\mathbb{Z}_m^n$ a $\mathbb{Z}_m$-beli n-hosszú vektorokból áll. E vektorok összeadása, skalárral való szorzása és skaláris szorzása a $\mathbb{Z}_m$-beli műveletekkel az $\mathbb{R}^n$-beli vektorműveletekhez hasonlóan végezhető el. Ennek következtében a lineáris kombináció, lineáris függetlenség itt is ugyanúgy definiálható és használható.

1.59. PÉLDA (LINEÁRIS KOMBINÁCIÓ $\mathbb{Z}_m^n$-BEN). *Számítsuk ki a $\mathbb{Z}_2^5$-beli*

$$\mathbf{a} = (1, 0, 0, 1, 1, 0),\ \mathbf{b} = (0, 1, 0, 1, 0, 1) \text{ és } \mathbf{c} = (0, 0, 1, 0, 1, 1)$$

vektorok összes lineáris kombinációját $\mathbb{Z}_2$-beli együtthatókkal, valamint a $\mathbb{Z}_3^3$-beli

$$\mathbf{u} = (1, 1, 0) \text{ és } \mathbf{v} = (0, 1, 1)$$

vektorok összes lineáris kombinációját $\mathbb{Z}_3$-beli együtthatókkal.

MEGOLDÁS. A lehetséges $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$ alakú lineáris kombinációk száma 8, hisz $x, y, z \in \mathbb{Z}_2$, vagyis mindegyik együtthatónak 0 vagy 1 az értéke, és ez $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ eshetőség. Az $x = y = z = 0$ eset a zérusvektort adja. Ha x, y és z közül csak egyikük értéke 1, a többi 0, akkor a három adott vektort kapjuk vissza. Azok az esetek maradnak, amikor legalább két vektort kell összeadni. Például $1\mathbf{a} + 1\mathbf{b} + 0\mathbf{c} = (1, 0, 0, 1, 1, 0) + (0, 1, 0, 1, 0, 1) = (1, 1, 0, 0, 1, 1)$. Az összes lineáris kombináció az 1.1. (a) táblázatban látható.

Az $x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$ alakú lineáris kombinációk száma 9, mivel $x, y \in \mathbb{Z}_3$, azaz lehetséges értékük 0, 1 vagy 2, ami $3 \cdot 3 = 9$ lehetőséget ad. Példaként egy lineáris kombináció, a többi az 1.1. (b) táblázatban látható: $2\mathbf{u} + 1\mathbf{v} = 2(1,1,0) + (0,1,1) = (2,2,0) + (0,1,1) = (2,0,1)$. □

$x\ y\ z$	$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$
0 0 0	$(0,0,0,0,0,0)$
1 0 0	$(1,0,0,1,1,0)$
0 1 0	$(0,1,0,1,0,1)$
0 0 1	$(0,0,1,0,1,1)$
1 1 0	$(1,1,0,0,1,1)$
1 0 1	$(1,0,1,1,0,1)$
0 1 1	$(0,1,1,1,1,0)$
1 1 1	$(1,1,1,0,0,0)$

(a)

$x\ y$	$x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$
0 0	$(0,0,0)$
1 0	$(1,1,0)$
2 0	$(2,2,0)$
0 1	$(0,1,1)$
1 1	$(1,2,1)$
2 1	$(2,0,1)$
0 2	$(0,2,2)$
1 2	$(1,0,2)$
2 2	$(2,1,2)$

(b)

1.1. táblázat: Vektorok lineáris kombinációi *(a)* $\mathbb{Z}_2$ és *(b)* $\mathbb{Z}_3$ fölött.

E paragrafus további részében a vektorműveletekre két alkalmazást mutatunk.

1.60. PÉLDA (ONE TIME PAD – A TÖKÉLETES TITKOSÍTÁS). *Az üzenet küldése előtt a küldő és a fogadó megegyezik egy titkos kulcsban, mely egy olyan hosszú véletlen bitvektor, mint amilyen az üzenet legföljebb lehet. Legyen a kulcs $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_2^m$. Legyen a titkosítandó üzenet $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}_2^m$. A titkosítás során a küldő kiszámolja az $\mathbf{u} + \mathbf{k}$ vektort, és azt küldi a fogadónak, aki a titkosított üzenethez maga is hozzáadja a kulcsot, és mivel bármely $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^m$ vektorra $\mathbf{x} + \mathbf{x} = \mathbf{0}$, ezért $(\mathbf{u} + \mathbf{k}) + \mathbf{k} = \mathbf{u} + (\mathbf{k} + \mathbf{k}) = \mathbf{u}$, vagyis a fogadó így valóban megfejti az üzenetet.*

► Példaként egy üzenet, egy kulcs és a kettő összege – a titkosított üzenet – a tömör bitvektor-jelöléssel

$$\begin{aligned} \text{az üzenet:} \qquad & \mathbf{u} = 010101010000111111111111 \\ \text{a kulcs:} \qquad & \mathbf{k} = 001011000101101001011010 \\ \text{a titkosított üzenet:} \qquad & \mathbf{u} + \mathbf{k} = 011110010101010110100101 \end{aligned}$$

► A bitvektorok ilyen módon való összeadása megegyezik a kizáró vagy nevű logikai művelettel, melyet a XOR szóval (exlusive or), vagy a $\oplus$ műveleti jellel is szoktak jelölni (ld. 1.7.. példa).
► E titkosítás hátránya, hogy a $\mathbf{k}$ kulcs csak egyszer használható fel, mert két különböző $\mathbf{u}_1 + \mathbf{k}$ és $\mathbf{u}_2 + \mathbf{k}$ üzenetet elcsípve és összeadva az $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{k}) + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{k}) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ vektorban már nem szerepel $\mathbf{k}$, és ebből statisztikai módszereket is használva már mindkét üzenet kinyerhető.
► Bizonyítható, hogy e kód megfejthetetlen, ha $\mathbf{k}$ valóban véletlen bitsorozat, és csak egyetlen üzenet titkosítására használjuk.

A kódelmélet egyik célja, hogy redundáns információ hozzáadásával elérje az elküldött üzenet megérkezését zajos, veszteséges csatornán keresztül is. Ennek két gyakran alkalmazott típusa a hibajelző és a hibajavító kód: az előbbi az átvitel során bekövetkezett bizonyos hibákat jelez a fogadó számára, míg az utóbbi bizonyos hibák kijavítását is lehetővé teszi. Az 1.59. példában előállított lineáris kombinációk hibajelző kódok, egyikük hibajavító is. Az 1.39. feladat arra kérdez, hogy milyen hibát jeleznek, illetve javítanak.

Az elektronikus számítógépek adatkezelésének egyik első ötlete az adattárolás vagy továbbítás biztonságosabbá tételére a paritásbit. Ha egy n-hosszú $\mathbf{b}$ bitvektorhoz még egy bitet csatolunk, melynek értéke

1, ha $\mathbf{b}$-ben páratlan sok bit egyenlő 1-gyel, egyébként 0, akkor olyan $(n+1)$-hosszú vektort kapunk, melyben páros sok 1-esnek kell lenni. Ha egy bit elromlik, páratlan sok 1-es lesz, tehát ez az $(n+1)$-edik bit hibajelző. Ezt nevezzük *paritásbitnek*.

1.61. PÉLDA (PARITÁSBIT). *Írjuk fel a paritásbitet skaláris szorzatként!*

MEGOLDÁS. A paritásbit $\mathbb{Z}_2$ fölött $\mathbf{1} \cdot \mathbf{b}$ alakba írható, ahol $\mathbf{1}$ a $\mathbf{b}$-vel azonos hosszúságú és csupa 1-esből álló vektor. □

A paritásbit általánosítása az ún. *ellenőrző összeg*, melyre számtalan példát találunk a mindennapi életben.

A magyar személyi szám a személyre jellemző 10 jegyből, és az azt követő e ellenőrző összegből áll. Az e kiszámítási képlete

$$\mathbb{Z}_{11}\text{-ben számolva:} \quad e = (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10) \cdot \mathbf{u},$$

ahol $\mathbf{u}$ a személyi szám első 10 jegye. A személyi szám 8-10-edik jegyét úgy választják ki, hogy $e \neq 10$, így az ellenőrző összeg mindig egyjegyű.

A termékek EAN-kódja (European Article Number) egy 13-jegyű, a termék azonosítására szolgáló kód, melyhez egy vonalkód is tartozik. A 13-dik jegy az ellenőrző összeg. Ha az EAN kódvektort $\mathbf{v}$ jelöli, akkor fönn kell állni

$$\mathbb{Z}_{10}\text{-ben számolva az } (1,3,1,3,1,3,1,3,1,3,1,3,1) \cdot \mathbf{v} = 0$$

összefüggésnek (1.46. ábra).

ISBN 978-963-545-398-6

9 789635 453986 >

1.46. ábra: Egy könyv ISBN-13 kódja, ami egyúttal az EAN kódja is. Az EAN-kódhoz tartozik egy vonalkód is. 2007 óta a könyvek ISBN-száma (ISBN-13) megegyezik EAN-kódjával (korábban az ISBN-szám 10-jegyű volt).

Feladatok

1.39. Az 1.1. (a) táblázatban egy 8 bináris kódszóból, a (b) táblázatban egy 9 ternér kódszóból álló kód kódszavai vannak felsorolva. Határozzuk meg, hogy e kódok hány hiba jelzésére és hány hiba javítására képesek! (Az, hogy egy kód képes k hibát jelezni, azt jelenti, hogy ha legföljebb k jelet megváltoztatunk bármelyik kódszóban, akkor egy kódba nem tartozó vektort kapunk. Az, hogy a kód képes d hibát javítani, azt jelenti, hogy bármely kódszóban legföljebb d jelet megváltoztatva olyan vektort kapunk, amelyből más kódszó nem kapható meg legföljebb d jel megváltoztatásával.)

1.40. Mely bitvektorokra igaz, hogy minden bitjük a vektor maradék részének paritásbitje.

1.41. Ellenőrző összeg Csak az ellenőrző összeget nézve érvényes személyi szám-e a 26012310018, és érvényes EAN-kód-e a 9998887776665?

1.42. 2007 előtt a személyi számhoz hasonló módon számolták ki a könyvek ún. ISBN-10 kódjának ellenőrző jegyét, ami ha 10 volt, X-et írtak (római 10-es). A képlet:

$$Z_{11}\text{-ben számolva: } (10,9,8,7,6,5,4,3,2,1)\cdot \mathbf{u} = 0$$

ahol $\mathbf{u}$ a könyv ISBN-kódja, aminek utolsó jegye az ellenőrző összeg. Egy könyv kódjának első 9 jegye 963076198. Mi e könyv teljes ISBN-száma?

Megoldások

1.1. „Ha az irányított szakasz a hal, akkor a vektor a halraj.”

1.2. *a)* Igaz. *b)* Hamis, például ha $O = A$, akkor $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$, míg ha $O = B$, akkor $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$. *c)* Igaz, az eredmény O választásától függetlenül $\overrightarrow{BA}$. *d)* Igaz. *e)* Hamis, lehetnek ellenkező irányúak is. *f)* Igaz.

1.9. $\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_4} + \ldots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n} = \overrightarrow{P_1P_n}$, $\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_4} + \ldots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n} + \overrightarrow{P_nP_1} = \mathbf{0}$.

1.12. *a)* Hamis, lehet, hogy a három közül két vektor egy egyenesbe esik, és a harmadik független tőlük: ez a harmadik nem állítható elő a másik kettő lineáris kombinációjaként. *b)* Igaz, például $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ ilyenek. De bármely három egy síkba eső nemzérus-vektor ilyen, ha közülük bármely kettő lineárisan független. *c)* Igaz, például ha $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ és $\mathbf{a}$ független $\mathbf{b}$-től. *d)* Hamis, például ha $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ és $\mathbf{a}$ független $\mathbf{b}$-től, akkor $\mathbf{a}$ nem fejezhető ki $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ lineáris kombinációjaként.

1.13. Ha $|\overline{AP}| : |\overline{PB}| = m : n$, akkor $|\overline{AB}| : |\overline{PB}| = (m+n) : n$, amiből $\overrightarrow{BP} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{BA}$. De $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP}$ és $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$, így $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \frac{n}{m+n}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$, amiből azonnal következik a bizonyítandó formula. A felezőpontot az $m = n = 1$ esetben kapjuk, és ekkor valóban $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

1.14. $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

1.15. $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma = \sqrt{2} \cdot 2 \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}} = -2$.

1.16. $1 \cdot 2 \cdot (-1) = -2$.

1.17. 0, hisz merőlegesek ($|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma = \sqrt{2} \cdot 2 \cdot 0 = 0$).

1.18. Legyenek $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ független vektorok, $\mathbf{b}$ pedig tetszőleges. Ekkor az $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$ szorzat párhuzamos a $\mathbf{c}$ vektorral, míg az $\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$ szorzat az $\mathbf{a}$ vektorral, tehát $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} \neq \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$.

1.19. *a)* igaz, *b)* hamis, az egységvektor egyenesére eső merőleges vetületének hosszával egyenlő, *c)* igaz, *d)* hamis (asszociativitásról nem is lehet szó, mert a két szorzás művelet egyike skaláris szorzás, a másika skalárral való szorzás az $\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$ szorzatban), *e)* igaz, *f)* igaz.

1.20. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2$

1.21. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$

1.22. A Pihagorász-tétel következményeként $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőlegesek.

1.23. Nem, legyen pl. $\mathbf{a} = (1,0,0)$, $\mathbf{b} = (0,0,1)$, $\mathbf{c} = (1,0,-1)$.

1.24. Geometriai megoldás: a három egységvektor egy szabályos háromszög három oldalvektora azonos körüljárás szerint irányítva, mivel összegük $\mathbf{0}$. Így hajlásszögük $2\pi/3 = 120°$, tehát a vektorpárok skaláris szorzata $-\frac{1}{2}$, így az összeg $-\frac{3}{2}$.

Algebrai megoldás: $(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)\cdot(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = 0$, tehát $0 = \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3 + 2(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3)$. Kihasználva, hogy a vektorok egységvektorok, kapjuk hogy $\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3 = -\frac{3}{2}$.

1.25. $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\gamma = 1\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 1$.

1.26. $\mathbf{0}$, hisz párhuzamosak ($\sin\gamma = 0$, így abszolút értéke 0).

1.27. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{a}\times\mathbf{a} - \mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{b}\times\mathbf{a} - \mathbf{b}\times\mathbf{b} = -\mathbf{a}\times\mathbf{b} - \mathbf{a}\times\mathbf{b} = -2\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

1.28. $(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\times(\mathbf{i}+\mathbf{j}) = \mathbf{i}\times\mathbf{i} + \mathbf{i}\times\mathbf{j} + \mathbf{j}\times\mathbf{i} + \mathbf{j}\times\mathbf{j} + \mathbf{k}\times\mathbf{i} + \mathbf{k}\times\mathbf{j} = \mathbf{0} + \mathbf{i}\times\mathbf{j} - \mathbf{i}\times\mathbf{j} + \mathbf{0} + \mathbf{j} - \mathbf{i} = \mathbf{j} - \mathbf{i}$.

1.29. Jelölje P szomszédait Q, R és S.

a) Ekkor két lapátló-vektor például a $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}$ és a $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}$ vektorok. Ezek szorzata:

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}\right) &= \\ \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PS} &= \\ \overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PR} &= 1.\end{aligned}$$

Kihasználtuk, hogy merőleges vektorok skaláris szorzata 0.

b) Hasonlóan kapható meg egy lapátló-vektor és a testátló-vektor ($\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}$) szorzata:

$$\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}\right) = \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PR} = 2.$$

c) A Q, R és S csúcsok olyan sorrendben legyenek megválasztva, hogy $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ és $\overrightarrow{PS}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkosson. Ki fogjuk használni, hogy ekkor $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS}$. Egy élvektor és egy szomszédos lapátló-vektor vektori szorzata:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}\times\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}\right) &= \\ \overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} &= \\ \mathbf{0} + \overrightarrow{PS} &= \overrightarrow{PS},\end{aligned}$$

vagyis a szorzat a két vektor lapjára merőleges élvektor.

d) Legyen a lapvektor a $\overrightarrow{PR}$, a nem szomszédos lapátló-vektor $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}$. Ezek szorzata:

$$\overrightarrow{PQ} \times \left(\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}\right) =$$
$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PS} - \overrightarrow{PR},$$

ami a lapátló-vektor síkjának másik lapátló-vektora.

1.30. Ha $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ és $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}$, akkor $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ és $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$, így bármely $c, d \in \mathbb{R}$ számokra $\mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v} + d\mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) + \mathbf{u} \cdot (d\mathbf{w}) = c\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + d\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = c0 + d0 = 0$, tehát $\mathbf{u}$ merőleges a $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$ lineáris kombinációra.

1.31. Három különböző dolog (így három vektor is) hatféleképp rakható sorba. Ha az **a**, **b** és **c** vektorok jobbrendszert alkotnak, akkor ugyancsak jobbrendszert alkotnak a **b**, **c**, **a** és a **c**, **a**, **b** vektorhármasok is. A további három esetben, azaz a **c**, **b**, **a**, valamint a **b**, **a**, **c** és az **a**, **c**, **b** hármasok esetén balrendszert kapunk a vegyes szorzatról tanultak szerint.

1.33. Egyik lehetőség a megoldásra: $\big||\mathbf{b}|\mathbf{a}\big| = \big||\mathbf{a}|\mathbf{b}\big| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$, ezért a parallelogramma-módszert egy rombuszra kell alkalmazni. Egy másik lehetőség: az $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ és $\mathbf{b}/|\mathbf{b}|$ két egységvektor, így összegük szögfelező, mivel a parallelogramma-módszer rombuszt ad. E vektor $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$-szerese ugyanúgy szögfelező, és épp ez a feladatbeli vektor.

1.34. Használjuk az 1.13. példa eredményét!

1.35. Milyen irányokat cserél föl a tükör, és milyeneket nem? Nem cseréli föl a síkkal párhuzamos irányokat: minden, a tükör síkjával párhuzamos vektor tükörképe önmaga. Tehát, ha a tükör előtt állunk, és a tükör is függőleges, akkor a „fölfelé” irány a tükörképen sem változik. Viszont a tükör fölcseréli a tükörre merőleges irányokat. Mielőtt megnézzük, hogy hogy cserélődik fel a jobb és a bal, definiálnunk kell mi az, hogy jobb és bal? Egy lehetőség a definiálásra: ha értelmezve van egy viszonyítási rendszerben (pl. az emberi testhez képest, vagy a mozgó járműben,...) a *föl* és az *előre*, melyek egymásra merőleges irányok, akkor a *jobb* irány az *előre* × *föl* vektori szorzattal definiálható. Ennek képe a tükörben viszont $(-\textit{előre}) \times \textit{föl} = -\textit{jobb}$, ami épp a *bal*.

1.36. A feladat szerint $c \in R_a$ pontosan akkor teljesül, ha $a\ R\ c$. Tegyük fel, hogy R_a és R_b nem diszjunkt. Ha c egy közös elemük, akkor c az a-val és b-vel is relációban van, azaz $a\ R\ c$ és $b\ R\ c$, de a szimmetria miatt $c\ R\ b$, a tranzitivitás miatt pedig az $a\ R\ c$ és $c\ R\ b$ relációkból következik az $a\ R\ b$. Ekkor pedig a tranzitivitást használva bármely x elemere $b\ R\ x$-ből következik $a\ R\ x$, azaz $x \in \mathbb{R}_b$-ből következik $x \in R_a$, azaz $R_b \subseteq R_a$. Az a és b szerepét megfordítva kapjuk $R_a \subseteq R_b$, tehát $R_a = R_b$. Végül be kell még látnunk, hogy e halmazok uniója kiadja az egész X halmazt. Ez igaz, hisz minden a elemre $a\ R\ a$, azaz $a \in R_a$.

1.37. Tekintsünk egy $\overrightarrow{A}B$ és egy $\overrightarrow{C}D$ irányított szakaszt! Azt mondjuk, hogy ezek relációban vannak, ha van egy olyan eltolás, mely A-t C-be, B-t D-be viszi. E reláció ekvivalenciareláció (ellenőrizzük), így egy osztályozást definiál az irányított szakaszok halmazán. Egy ilyen osztályt nevezünk (szabad) vektornak.

1.38. A vektor iránya a félegyenesek, az állása az egyenesek halmazán – az előző feladathoz hasonlóan az eltolással – definiált ekvivalencia reláció egy ekvivalenciaosztálya.

1.39. ...

1.40. Minden olyan vektor, amelyben páros sok 1-es van, eleget tesz a feladatbeli feltételnek, a többi nem.

1.41. Ez a személyi szám érvényes, mert
$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) \cdot (2, 6, 0, 1, 2, 3, 1, 0, 0, 1) =$
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 9 \cdot 0 + 10 \cdot 1 \bmod 11 = 63 \bmod 11 = 8.$

Ez az EAN-kód nem érvényes, mert
$(1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1) \cdot (9, 9, 9, 8, 8, 8, 7, 7, 7, 6, 6, 6, 5) =$

$(9 + 3 \cdot 9 + 9 + 3 \cdot 8 + 8 + 3 \cdot 8 + 7 + 3 \cdot 7 + 7 + 3 \cdot 6 + 6 + 3 \cdot 6 + 5) \bmod 10 = 183 \bmod 10 = 3 \neq 0.$

1.42. Mivel $(10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1) \cdot (9, 6, 3, 0, 7, 6, 1, 9, 8, e) = 10 \cdot 9 + 9 \cdot 6 + 8 \cdot 3 + 6 \cdot 7 + 5 \cdot 6 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + e = 287 + e \bmod 11 = 1 + e = 0$, ezért $e = 10$, azaz a teljes kód 963076198X (a könyvre olvashatóbban írva 963-07-6198-X).

2

Lineáris egyenletrendszerek és megoldásuk

A lineáris egyenletrendszerek geometriai megközelítése után megismerjük a megoldás technikáit, végül a megoldások halmazának szerkezetét!

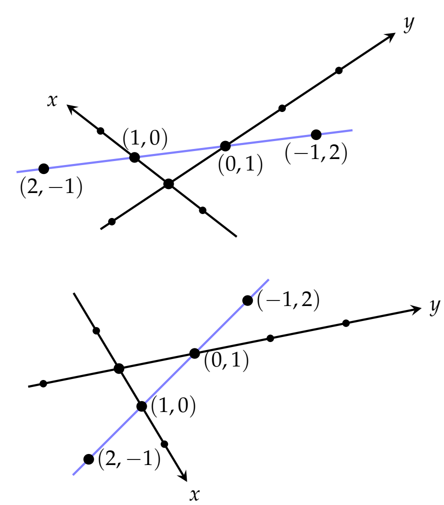
Egyenes és sík egyenletei

A sík és a tér pontjainak és vektorainak koordinátáit használva lehetővé válik geometriai alakzatok algebrai vizsgálata, vagy algebrai problémák jobb megértése geometriai szemléltetéssel.

Alakzatok és egyenletek

2.1. PÉLDA (Az $x + y = 1$ EGYENLET). *Egy tetszőleges síkbeli koordinátarendszerben ábrázoljunk néhány pontot, melynek koordinátái kielégítik az $x + y = 1$ egyenletet. Fogalmazzunk meg sejtést az egyenlet összes megoldásának megfelelő pontok halmazáról!*

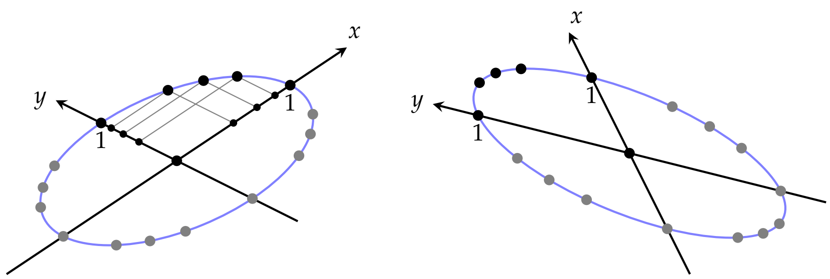
MEGOLDÁS. A 2.1 ábrán két különböző koordinátarendszert ábrázolunk, és azokban a fenti egyenletet kielégítő pontok közül néhányat. Ennek alapján azt sejthetjük, hogy az $x + y = 1$ egyenletet kielégítő pontok egy egyenesen vannak. Ezt az egyenest is berajzoltuk. A sejtést hamarosan bizonyítjuk. □



2.1. ábra: Az $x + y = 1$ egyenletet kielégítő néhány pont két különböző koordinátarendszerben.

2.2. PÉLDA (Az $x^2 + y^2 = 1$ EGYENLET). *Egy tetszőleges síkbeli koordinátarendszerben ábrázoljunk néhány pontot, melynek koordinátái kielégítik az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet. Fogalmazzunk meg sejtést az egyenlet összes megoldásának megfelelő pontok halmazáról!*

MEGOLDÁS. Az alábbi ábrán néhány koordinátarendszert ábrázoltunk, az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet kielégítő néhány ponttal. A ??? fejezetben visszatérünk e feladatra, és meg fogjuk mutatni, hogy az egyenletet kielégítő pontok egy ellipszisen vannak. □



2.2. ábra: Az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet kielégítő (x, y) pontok halmaza két koordinátarendszerben.

A latin eredetű *implicit* szó jelentése *nem kifejtett*, *rejtett*, ami az összeköt, összefügg, összekever, körülcsavar jelentésű *implico* (implicō) szó származéka. E szó a matematikában az implicit alak, implicit függvény, stb. kifejezésekben arra utal, hogy valamely fontosnak tekintett mennyiség, változó, stb. nincs kifejezve a képletből. Ugyanennek a szónak a származéka a magába foglal, maga után von jelentésű *implikál* szó is, mely a matematikai logika „ha. . . , akkor. . . " szerkezetű műveletével, az *implikációval* is kapcsolatban van.

2.3. DEFINÍCIÓ (ALAKZAT (IMPLICIT) EGYENLETRENDSZERE). *Egy geometriai alakzat egy adott koordinátarendszerre vonatkozó* (implicit) egyenletrendszerén *olyan egyenletrendszert értünk, melynek egyszerre minden egyenletét kielégítik a térnek az alakzathoz tartozó pontjai, de más pontok nem. Ha az egyenletrendszer egy egyenletből áll, az alakzat* egyenletéről *beszélünk. Az egyenletet* vektoregyenletnek *nevezzük, ha nem a pontok koordinátáira, hanem a pontokba mutató vektorokra írjuk fel. Egy alakzat m egyenletből álló egyenletrendszerének, illetve m vektoregyenletből álló egyenletrendszerének általános alakja*

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \qquad\vdots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad \textit{illetve} \quad \begin{cases} F_1(\mathbf{r}) = 0 \\ F_2(\mathbf{r}) = 0 \\ \quad\vdots \\ F_m(\mathbf{r}) = 0 \end{cases}$$

ahol $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *a tér egy pontja, és* $\mathbf{r}$ *az oda mutató vektor.*

Középiskolai tanulmányainkban több példát láttunk alakzat egyenletére, például tudjuk, hogy a síkban a koordinátatengelyek szögét felező egyenes egyenlete $y = x$, azaz $x - y = 0$. Ortonormált bázist választva az origó középű egységsugarú kör egyenlete $x^2 + y^2 = 1$. Az előző két egyenlet mindegyikéből *kifejezhető* a két koordináta egy paraméter bevezetésével. Az $y = x$ egyenlet ekvivalens az

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= t \end{aligned}$$

egyenletrendszerrel, míg az $x^2 + y^2 = 1$ egyenlet ekvivalens az

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{aligned}$$

egyenletrendszerrel. Mindkettő átírható vektoralakba is. Használjuk a oszlopvektoros jelölést:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}.$$

E két példa vezet a következő általános fogalomhoz.

2.4. definíció (Alakzat (explicit) egyenletrendszere). *Egy geometriai alakzat egy adott koordinátarendszerre vonatkozó* (explicit) egyenletrendszerén *olyan egyenletrendszert értünk, melyben az egyenletek bal oldalán a pontok koordinátáit megadó változók, jobb oldalán adott paraméterek függvényei szerepelnek. Általános alakja*

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(t_1, t_2, \ldots, t_k) \\ x_2 &= f_2(t_1, t_2, \ldots, t_k) \\ &\vdots \\ x_n &= f_n(t_1, t_2, \ldots, t_k) \end{aligned}$$

ahol $t_1 \in I_1$, $t_2 \in I_2, \ldots, t_n \in I_n$, és $I_1, \ldots, I_n \subseteq \mathbb{R}$. Az ilyen egyenletrendszer egyetlen vektoregyenletté fogható össze:

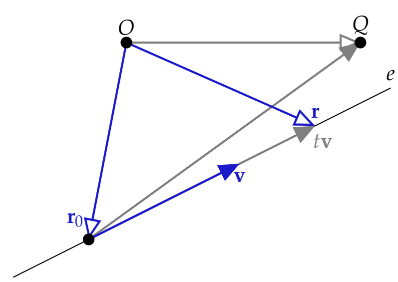
$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(t_1, t_2, \ldots, t_k),$$

ahol $\mathbf{f}$ egy $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ függvény. Az explicit egyenletrendszereket szokás paraméteres egyenletrendszernek *is nevezni.*

A latin eredetű *explicit* szó jelentése *kifejtett*, *világosan kimondott*, ami a kibont, szétterít, kiszabadít, átvitt értelemben tisztáz, kifejt, megfejt jelentésű *explico* (explicō) szó származéka. E szó a matematikában az explicit alak, explicit függvény, stb. kifejezésekben arra utal, hogy valamely fontosnak tekintett mennyiség, változó, stb. ki van fejezve a többi segítségével.

A következő paragrafusokban egyenes és sík különböző egyenleteit, egyenletrendszereit fogjuk áttekinteni példákat adva a fenti két általános definícióra.

Síkbeli egyenes egyenletei Tekintsük a sík egy tetszőleges e egyenesét, és jelöljük ki a síkban az O origót. Legyen a nemzérus $\mathbf{v}$ egy tetszőleges, az egyenessel párhuzamos vektor. Az ilyen vektorokat az egyenes *irányvektorának* nevezzük. Mutasson $\mathbf{r}_0$ az egyenes egy tetszőleges, kijelölt pontjába. Világos, hogy az e egyenes bármely pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor előáll $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban, ahol t valós szám. Másrészt ha Q a sík egy tetszőleges, nem az e egyenesre eső pontja, akkor az $\overrightarrow{OQ} - \mathbf{r}_0$ vektor nem párhuzamos $\mathbf{v}$-vel, tehát nem is konstansszorosa, azaz $\overrightarrow{OQ} - \mathbf{r}_0 \neq t\mathbf{v}$ semmilyen t-re sem, így $\overrightarrow{OQ}$ nem áll elő $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban. Tehát az e tetszőleges pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor felírható $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban, és ez csak e pontjaira igaz.



2.3. ábra: Egyenes explicit vektoregyenlete: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$.

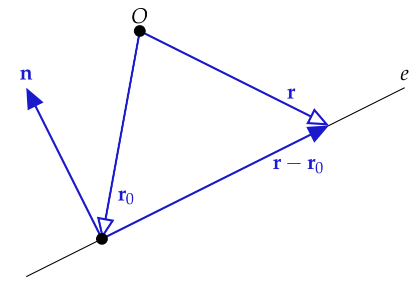
2.5. állítás (Síkbeli egyenes explicit vektoregyenlete). *A sík minden egyenesének van*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

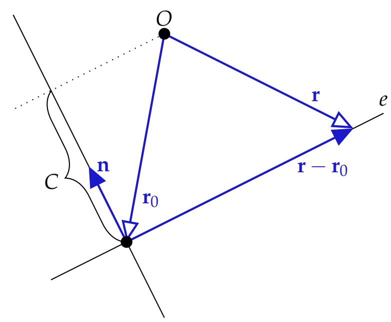
alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol $\mathbf{v}$ az egyenes egy irányvektora, és $\mathbf{r}_0$ az egyenes egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor.

A síkbeli egyenesre merőleges vektorokat az egyenes *normálvekto-*

rainak nevezzük. Legyen $\mathbf{n}$ egy tetszőleges, a $\mathbf{v}$-re merőleges vektor, azaz legyen $\mathbf{n}$ az e egy normálvektora. Azt, hogy $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ az e tetszőleges pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektorra párhuzamos $\mathbf{v}$-vel, úgy is kifejezhetjük, hogy $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ merőleges $\mathbf{n}$-re. A merőlegesség pedig kifejezhető a skaláris szorzattal. Így az egyenes egy implicit vektoregyenletéhez jutunk: $\mathbf{r}$ pontosan akkor mutat az e egy pontjába, ha $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0$. Ez az egyenlet átrendezés után $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0$ alakra, majd a $C=\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0$ jelölés bevezetésével $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=C$ alakra hozható.



2.4. ábra: Síkbeli egyenes implicit vektoregyenlete: $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0$.



2.5. ábra: Síkbeli egyenes (implicit) vektoregyenlete: $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=C$. Ha $\mathbf{n}$ *egységvektor*, akkor az $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=C$ geometriai jelentése az, hogy az egyenes bármely pontjába mutató vektornak az $\mathbf{n}$ egyenesére eső merőleges vetülete C. Ez az ábra is ezt az esetet szemlélteti.

2.6. ÁLLÍTÁS (SÍKBELI EGYENES IMPLICIT VEKTOREGYENLETE). *A sík minden egyenesének van*

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0, \tag{2.2}$$

és vele ekvivalens

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=C \tag{2.3}$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol $\mathbf{n}$ *az egyenes egy normálvektora,* $\mathbf{r}_0$ *az egyenes egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor és* C *konstans.*

A (2.2) alakú egyenlet könnyen átírható (2.3) alakúvá a $C=\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0$ jelöléssel. Az átalakítás fordított irányban is egyszerű, hisz ha $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=C$, akkor találunk olyan $\mathbf{r}_0$ vektort, melyre $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0=C$. Ez azért igaz, mert ha tetszőleges $\mathbf{n}$-re nem merőleges $\mathbf{v}$ vektorra $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}=D$, akkor $\mathbf{n}\cdot(\frac{C}{D}\mathbf{v})=C$, így az $\mathbf{r}_0=\frac{C}{D}\mathbf{v}$ megfelel.

Az $\mathbf{r}=(x,y)$, $\mathbf{r}_0=(x_0,y_0)$ és $\mathbf{v}=(a,b)$ jelöléseket használva az explicit vektoregyenlet azonnal egyenletrendszerré alakítható.

2.7. ÁLLÍTÁS (SÍKBELI EGYENES EXPLICIT EGYENLETRENDSZERE). *A sík minden egyenesének van*

$$\begin{aligned} x &= x_0+at \\ y &= y_0+bt \end{aligned} \tag{2.4}$$

alakú egyenletrendszere, ahol (a,b) *az egyenes egy irányvektora, és* (x_0,y_0) *az egyenes egy tetszőleges rögzített pontja.*

A következőkben megmutatjuk, hogy az explicit egyenletrendszerből a t paraméter kiküszöbölhető, és így egy implicit egyenletet kapunk.

2.8. ÁLLÍTÁS (SÍKBELI EGYENES (IMPLICIT) EGYENLETE). *A sík minden egyenesének van*

$$Ax+By=C \tag{2.5}$$

alakú egyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol A *és* B *közül nem mindkettő nulla, és* $(-B,A)$ *az egyenes egy irányvektora.*

► A bizonyítás előtt érdemes megjegyezni, hogy az egyenes fenti implicit egyenlete az egyenes $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ alakú vektoregyenletéből azonnal megkapható, de ezt egyelőre csak *ortonormált* koordinátarendszerben tudjuk könnyen igazolni. Legyen $(A, B) = (b, -a)$. Ez az egyenes egy normálvektora, hisz merőleges az (a, b) irányvektorra. Továbbá $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_0, y - y_0)$, ezért a vektoregyenlet

$$(A, B) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$$

alakú lesz, ami a skaláris szorzást elvégezve az $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ formulát adja. Ha a koordinátarendszer nem ortonormált, az (A, B) vektor nem szükségképpen normálvektor, és a skaláris szorzás képlete is más, de azért a (2.5) egyenletről mondott állítás igaz. Erre olyan bizonyítást adunk, mely az explicit egyenletrendszerre épül.

BIZONYÍTÁS. Ha a vagy b valamelyike 0, akkor a két egyenlet egyike felesleges, például ha $a = 0$, akkor az egyenletrendszer alakja

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 + bt \end{aligned}$$

ami ekvivalens az $x = x_0$ egyenlettel, hisz az $y = y_0 + bt$ semmi mást nem mond, mint hogy y egy valós szám. Mivel $(a, b) \neq (0, 0)$, ezért csak az az eset marad, amikor a és b egyike sem 0. Ekkor mindkét egyenletből kifejezhető t, és a két értéket egyenlővé téve kapjuk, hogy

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b},$$

azaz

$$bx - ay = bx_0 - ay_0, \text{ vagy } b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0.$$

Legyen a továbbiakban $A = b$ és $B = -a$. Ekkor a fenti egyenlet $Ax + By = Ax_0 + By_0$ lesz. Az egyenlet jobb oldalán lévő konstanst C-vel jelölve az egyenes egyenlete $Ax + By = C$ alakot ölt. Másrészt könnyen látható, hogy minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, mert ekvivalens egy egyenes paraméteres egyenletrendszerével. Nevezetesen az $Ax + By = C$ egyenlet visszaírható $Ax + By = Ax_0 + By_0$ alakba, hisz az $Ax_0 + By_0 = C$ egyenletben $A \neq 0$ esetén egy tetszőleges y_0-t választva, egyértelműen kifejezhető x_0. (A $B \neq 0$ eset analóg.) Ennek alapján felírható a (2.4) egyenletrendszer. □

2.9. PÉLDA (SÍKBELI EGYENES EGYENLETEI). *Írjuk fel annak az egyenesnek összes egyenletét vagy egyenletrendszerét, mely átmegy a* $(2, 3)$ *és az* $(1, 1)$ *koordinátájú pontokon.*

MEGOLDÁS. Ha egy egyenes átmegy e két ponton, akkor irányvektora a két pontba mutató vektorok különbsége, azaz $\mathbf{v} = (2, 3) - (1, 1) = (1, 2)$. Legyen $\mathbf{r}_0 = (1, 1)$, de az $\mathbf{r}_0 = (2, 3)$ választás is megfelelő.

Az irányvektor segítségével kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Explicit (paraméteres) egyenletrendszer alakban:

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 1 + 2t. \end{aligned}$$

Az irányvektorból $(A, B) = (2, -1)$, innen az egyenes egyenlete $2x - y = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1$, azaz

$$2x - y = 1.$$

Ortonormált koordináta-rendszerben a

$$(2, -1) \cdot (x - 1, y - 1) = 0$$

egyenletet kapjuk vektoregyenletként, mely kiszámolva az előző egyenletet adja. □

Síkbeli pont egyenletei Tekintsük a síkbeli (x_0, y_0) pontot. Ennek explicit egyenletrendszere, illetve vektoregyenlete:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 \end{aligned} \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Ez annyira nyilvánvaló, semmitmondó, hogy a gyakorlatban nem is szoktunk pont egyenleteiről beszélni, e könyvbe is csak didaktikai okokból került, ugyanis a matematikai fogalmak megértésében gyakran nagy segítségünkre van a szélső, extremális esetek megértése, vizsgálata.

Mivel itt az alakzat csak egyetlen pontból áll, nincs szükség paraméterre, így ez az alak egyúttal implicitnek is tekinthető. Ekkor úgy tekintünk ugyanerre az egyenletrendszerre, mint két egyenes egyenletére, melyek normálvektorai $(1, 0)$ illetve $(0, 1)$, és amelyek metszéspontja a keresett pont:

$$\begin{aligned} x \phantom{{}+y} &= x_0 \\ y &= y_0 \end{aligned} \quad \text{vagy minden együtthatót kiírva} \quad \begin{aligned} x + 0y &= x_0 \\ 0x + y &= y_0 \end{aligned}$$

Ez adja az ötletet, egy pont implicit egyenletrendszerének tekinthetnénk két egyenletet, melyek egymást az adott pontban metsző egy-egy egyenes egyenletei. Tehát mondhatjuk, hogy a pont implicit egyenletrendszerének általános alakja:

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y &= C_1 \\ A_2 x + B_2 y &= C_2 \end{aligned}$$

Az azonban nem igaz, hogy minden ilyen alakú egyenletrendszer egy pont egyenletrendszere, mert két egyenes metszheti egymást egyetlen pontban, de lehet, hogy nincs közös pontjuk, és lehet végtelen sok közös pontjuk is. Épp ennek a kérdésnek a részletes vizsgálata lesz a 2. fejezet témája.

A 3-dimenziós tér síkjainak egyenletei Tudjuk, hogy két lineárisan független $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektor bármely lineáris kombinációja a két vektor által meghatározott síkban van, továbbá hogy e sík bármely vektora előáll a megadott két vektor lineáris kombinációjaként (ld. 1.8.. és 1.11. tételek). Ebből azonnal adódik, hogy a sík egy rögzített pontjába mutató $\mathbf{r}_0$ vektor segítségével a sík bármelyik pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor felírható $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ alakban.

2.10. ÁLLÍTÁS (SÍK EXPLICIT VEKTOREGYENLETE). *Bármely síknak van*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v} \tag{2.6}$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy sík egyenlete, ahol $\mathbf{u}$ *és* $\mathbf{v}$ *a sík két lineárisan független vektora és* $\mathbf{r}_0$ *a sík egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor.*

Hasonlóan a síkbeli egyeneshez, a térbeli sík egyenletéből is kiküszöbölhető a paraméter a merőlegesség felhasználásával. Az 1.30. feladat állítása szerint, ha egy vektor merőleges két tetszőleges vektor mindegyikére, akkor merőleges azok lineáris kombinációjára is. Mivel az $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ merőleges $\mathbf{u}$-ra és $\mathbf{v}$-re is, ezért merőleges azok minden lineáris kombinációjára is, azaz az $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ vektorra is. Ez az észrevétel az alapja az alábbi tételnek.

2.11. ÁLLÍTÁS (SÍK IMPLICIT VEKTOREGYENLETE). *A háromdimenziós térben minden síknak van*

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0, \tag{2.7}$$

és a vele ekvivalens

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C \tag{2.8}$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy sík egyenlete, ahol $\mathbf{n}$ *a sík egy normálvektora,* $\mathbf{r}_0$ *a sík egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor és* C *konstans.*

Az állítás igazolása analóg a síkbeli egyenesnél leírtakkal (ld. 2.2. feladat).

Az $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ és $\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1)$ $\mathbf{v} = (a_2, b_2, c_2)$ jelöléseket használva az explicit vektoregyenlet azonnal egyenletrendszerré alakítható.

2.12. ÁLLÍTÁS (SÍK EXPLICIT EGYENLETRENDSZERE). *A háromdimenziós tér minden síkjának van*

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + a_1 s + a_2 t \\
y &= y_0 + b_1 s + b_2 t \\
z &= z_0 + c_1 s + c_2 t
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

alakú egyenletrendszere, ahol (a_1, b_1, c_1) és (a_2, b_2, c_2) a sík két lineárisan független vektora, és (x_0, y_0, z_0) a sík egy tetszőleges rögzített pontja.

Az explicit egyenletrendszerből kiküszöbölhető a két paraméter, ha például két egyenletből kifejezzük a paramétereket, és behelyettesítjük a harmadik egyenletbe. Így egy implicit egyenletet kapunk. A számításokat nem részletezzük, az eredmény

$$(b_1c_2 - b_2c_1)(x - x_0) + (c_1a_2 - c_2a_1)(y - y_0) + (a_1b_2 - a_2b_1)(z - z_0) = 0.$$

Az $(A, B, C) = (b_1c_2 - b_2c_1, c_1a_2 - c_2a_1, a_1b_2 - a_2b_1)$ jelöléssel a sík egyenlete $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ alakra hozható, vagy ami vele ekvivalens, $Ax + By + Cz = D$ alakra.

2.13. ÁLLÍTÁS (SÍK IMPLICIT EGYENLETE). *A háromdimenziós térben minden síknak van*

$$Ax + By + Cz = D \tag{2.10}$$

alakú egyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy sík egyenlete, ha A, B és C legalább egyike nem nulla, és $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$, ahol (x_0, y_0, z_0) a sík valamely pontja.

A sík fenti egyenlete a sík $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ alakú vektoregyenletéből is megkapható, de ezt egyelőre csak *ortonormált* koordinátarendszerben tudjuk könnyen igazolni. Mivel

$$(A, B, C) = (b_1c_2 - b_2c_1, c_1a_2 - c_2a_1, a_1b_2 - a_2b_1), \tag{2.11}$$

ami épp az $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ vektorral egyenlő, ezért (A, B, C) merőleges a sík minden vektorára, vagyis a sík egy normálvektora. Az $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ egyenletet koordinátás alakba átírva kapjuk, hogy

$$(A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

2.14. PÉLDA (SÍK EGYENLETEI). *Írjuk fel annak a síknak az egyenleteit, mely átmegy a $(0, -1, 2)$, a $(-1, 0, 7)$ és a $(2, 1, 4)$ pontokon.*

MEGOLDÁS. A három pontba mutató vektorok különbségei a síkkal párhuzamos vektorok, így azokkal felírható a sík mindegyik egyenlete. Két vektor a lehetséges háromból:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} &= (2, 1, 4) - (0, -1, 2) = (2, 2, 2), \text{ és} \\
\mathbf{v} &= (-1, 0, 7) - (0, -1, 2) = (-1, 1, 5).
\end{aligned}
$$

Ezek alapján például az $\mathbf{r}_0 = (0, -1, 2)$ választás mellett a sík explicit vektoregyenlete

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix},$$

explicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= \phantom{-1+{}} 2s - t \\ y &= -1 + 2s + t \\ z &= 2 + 2s + 5t. \end{aligned}$$

Mivel a (2.11) képlet szerint $(A, B, C) = (8, -12, 4)$, ezért a sík implicit egyenlete $8(x - 0) - 12(y - (-1)) + 4(z - 2) = 0$, azaz 4-gyel való osztás és átrendezés után

$$2x - 3y + z = 5.$$

Így ortonormált koordinátarendszerben a

$$(2, -3, 1) \cdot (x, y, z) = 5, \text{ vagy } (2, -3, 1) \cdot (x, y + 1, z - 2) = 0$$

a sík implicit vektoregyenlete. □

Térbeli egyenes egyenletei Mindaz, amit a síkbeli egyenes explicit vektoregyenletéről mondtunk a 67. oldalon, lényegében változtatás nélkül megismételhető. Jelöljük ki a térben az origót, és tekintsük azt az e egyenest, melynek irányvektora $\mathbf{v}$, és amely átmegy azon a ponton, melybe az $\mathbf{r}_0$ vektor mutat. Világos, hogy az e egyenes bármely pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor előáll $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban, ahol t valós szám, és az e-re nem illeszkedő pontokra ez nem áll. Így igaz a következő állítás:

2.15. ÁLLÍTÁS (TÉRBELI EGYENES EXPLICIT VEKTOREGYENLETE). *A háromdimenziós tér minden egyenesének van*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \tag{2.12}$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol $\mathbf{v}$ az egyenes egy irányvektora, és $\mathbf{r}_0$ egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor.

Itt nem tudjuk a paramétert egyetlen vektoregyenletben kiküszöbölni, de az explicit egyenletrendszerré való átírás megy, ha felveszünk egy koordinátarendszert, melyben $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ és $\mathbf{v} = (a, b, c)$:

2.16. ÁLLÍTÁS (TÉRBELI EGYENES EXPLICIT EGYENLETRENDSZERE). *A tér minden egyenesének van*

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned} \tag{2.13}$$

alakú egyenletrendszere, ahol (a, b, c) *az egyenes egy irányvektora, és* (x_0, y_0, z_0) *az egyenes egy tetszőleges rögzített pontja.*

A fenti explicit (paraméteres) egyenletrendszerből a paraméter kiküszöbölhető. Ha az a, b és c számok valamelyike 0, akkor a neki megfelelő fenti egyenletben már nem szerepel t, akkor nincs is mit tennünk. Ha legalább két egyenletben szerepel t, akkor mindegyikből kifejezve t-t, majd egyenlővé téve őket paraméter nélküli egyenleteket kapunk. Például ha a, b és c egyike sem 0, akkor

$$t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

A t-t elhagyva valójában három egyenletet kaptunk:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, \qquad \frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c}, \qquad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Annak az egyenletnek nincs értelme, amelyikben a nevező 0, de a nevezőkkel való bővítés után kapott

$$b(x - x_0) = a(y - y_0), \quad c(x - x_0) = a(z - z_0), \quad c(y - y_0) = b(z - z_0)$$

egyenletek mindegyike korrekt akkor is, ha 0 valamelyik együttható. E három egyenlet három sík egyenlete, melyek metszésvonala az adott egyenes. Kivétel az az eset, amikor az egyik egyenlet $0 = 0$ alakú, ilyenkor a másik két egyenlet egy-egy sík egyenlete. Egy egyenes azonban megadható két sík metszésvonalaként, így adódik a következő tétel, melynek bizonyítását feladatként tűzzük ki (ld. 2.3. feladat):

2.17. ÁLLÍTÁS (TÉRBELI EGYENES IMPLICIT EGYENLETRENDSZERE). *A tér minden egyenesének van két egyenletből álló egyenletrendszere. Ha az egyenes egy irányvektora* (a, b, c)*, akkor a két egyenlet az alábbi három közül bármelyik kettő, amelyik nem* $0 = 0$ *alakú:*

$$\begin{aligned} b(x - x_0) &= a(y - y_0) \\ c(x - x_0) &= a(z - z_0) \\ c(y - y_0) &= b(z - z_0) \end{aligned} \tag{2.14}$$

► A (2.14) egyenletrendszer a következő alakba is átírható:

$$\begin{aligned} bx - ay &= bx_0 - ay_0 \\ cx - az &= cx_0 - az_0 \\ cy - bz &= \phantom{cx_0 -{}} cy_0 - bz_0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Erről könnyen leolvasható, hogy ha pl. $a \neq 0$, akkor a második egyenlet b-szereséből kivonva az első egyenlet c-szeresét, a harmadik egyenlet a-szorosát kapjuk. Hamarosan látni fogjuk, hogy eszerint a harmadik egyenlet elhagyható, anélkül, hogy az egyenletrendszert kielégítő pontok halmaza megváltozna.

2.18. PÉLDA (TÉRBELI EGYENES EGYENLETRENDSZEREI). *Írjuk fel annak az egyenesnek az explicit és implicit egyenletrendszerét, mely átmegy az $A(1,3,4)$ és a) a $B(3,3,1)$, illetve b) a $C(5,5,-2)$ ponton.*

MEGOLDÁS. *a)* Az A és B pontot összekötő vektor $= (2,0,-3)$. Innen az egyenes explicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= 3 \\ z &= 4 - 3t, \end{aligned}$$

melynek második egyenlete, $y = 3$, egy xz-síkkal párhuzamos sík egyenlete. A másik két egyenletből kiküszöbölve t-t, egy másik sík egyenletét kapjuk. Az egyenes ennek a két síknak a metszésvonala. Az első egyenletből $t = \frac{1}{2}(x-1)$, a harmadikból $t = -\frac{1}{3}(z-4)$ ezért $3x + 2z = 11$. Így az előző egyeneshez a következő implicit (paraméter nélküli) egyenletrendszer tartozik, mely két sík egyenletéből áll:

$$\begin{aligned} 3x + 2z &= 11 \\ y &= 3. \end{aligned}$$

b) Az A és C pontot összekötő vektor itt $= (4,2,-6)$. Innen az egyenes explicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= 1 + 4t \\ y &= 3 + 2t \\ z &= 4 - 6t. \end{aligned}$$

Mindegyik egyenletből kifejezve t-t kapjuk, hogy

$$t = \frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{-6}.$$

Ez a következő három sík egyenletét adja:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2}, \quad \frac{z-4}{-6} = \frac{x-1}{4}, \quad \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{-6}.$$

Átrendezve

$$\begin{aligned} x - 2y \quad\;\; &= -5 \\ 3x \qquad + 2z &= \;\; 11 \\ 3y + \;\; z &= \;\; 13. \end{aligned}$$

E három sík közül bármely kettő meghatározza az adott egyenest, így e három egyenlet közül bármely kettő az egyenes (implicit) egyenletrendszere. □

Térbeli pont egyenletei Csak a teljesség és az analógiák megértése céljából vizsgáljuk meg a tér egy pontjának lehetséges egyenleteit. A térbeli (x_0, y_0, z_0) pont explicit egyenletrendszere, illetve vektoregyenlete:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0, \\ z &= z_0 \end{aligned} \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

Az explicit egyenletrendszert implicit alaknak is tekinthetjük, ekkor három – a koordinátasíkokkal párhuzamos – sík egyenletét látjuk, melyek egyetlen közös pontban metszik egymást.

$$\begin{aligned} x \qquad\quad &= x_0 \\ y \quad\; &= y_0, \\ z &= z_0 \end{aligned} \quad \text{vagy minden együtthatót kiírva} \quad \begin{aligned} x + 0y + 0z &= x_0 \\ 0x + \;\; y + 0z &= y_0. \\ 0x + 0y + \;\; z &= z_0 \end{aligned}$$

A síkbeli esethez hasonlóan egy pont implicit egyenletrendszerének tekinthetnénk három egyenletet, melyek egymást az adott pontban metsző egy-egy sík egyenletei. Tehát mondhatjuk, hogy a pont implicit egyenletrendszerének általános alakja:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z &= D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z &= D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z &= D_3. \end{aligned}$$

Itt is óvatosnak kell lennünk, mert nem minden ilyen alakú egyenletrendszer egy pont egyenletrendszere. Például három sík metszheti egymást egy egyenesben, de párhuzamos síkok esetén az is előfordulhat, hogy nincs közös pontjuk. E kérdés vizsgálatára visszatérünk a 2. fejezetben.

Egyenletek $\mathbb{R}^n$-ben Az egyenes és a sík explicit vektoregyenlete $\mathbb{R}^n$-ben is ugyanolyan alakú, mint $\mathbb{R}^3$-ben, azaz az egyenes explicit vektoregyenlete $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, a síké $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ alakú.

2.19. példa (Egyenes és sík explicit vektoregyenlete). *Írjuk fel az $A(1,1,1,1)$, $B(2,3,2,4)$ pontokon átmenő egyenes, valamint az A, B és $C(3,2,1,0)$ pontokon átmenő sík explicit vektoregyenletét!*

Megoldás. Az $\overrightarrow{AB} = (1,2,1,3)$ és az $\overrightarrow{AC} = (2,1,0,-1)$ vektorok segítségével azonnal fölírható az egyenes és a sík egyenlete is:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ illetve } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

□

A síkbeli egyenes és a térbeli sík vektoregyenlete $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = c$ alakú. E két esetben ez az egyenlet az n-dimenziós tér egy $n-1$-dimenziós alakzatának egyenlete ($n = 2, 3$). A későbbiekben látni fogjuk, hogy ez általában is igaz, de e pillanatban még a dimenzió fogalmát sem definiáltuk, ezért egyelőre csak nevet adunk ennek az alakzatnak. Az $\mathbb{R}^n$ térben $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ esetén az $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = c$ egyenletet kielégítő $\mathbf{r}$ vektorok végpontjainak halmazát *hipersíknak* nevezzük. Koordinátás alakban

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c,$$

ahol $\mathbf{n} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a hipersík *normálvektora* (ld. 2.1. feladat), $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a hipersík egy tetszőleges pontjába mutató vektor.

A következő táblázat összefoglalja geometriai alakzatoknak a továbbiak szempontjából legfontosabb egyenleteit.

		Explicit vektoregyenlet	Implicit egyenlet(rendszer)
Síkban	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$Ax + By = C$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y = C_1$ $A_2x + B_2y = C_2$
Térben	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	$Ax + By + Cz = D$
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ $A_3x + B_3y + C_3z = D_3$
$\mathbb{R}^n$-ben	hipersík	???	$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$
	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	???
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	???
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	???

2.1. táblázat: Geometriai alakzatok egyenletei: az $\mathbb{R}^n$-beli egyenletek közül többet még nem ismerünk, ezeket három kérdőjel jelzi, de arra bíztatjuk az Olvasót, hogy az analógia fonalán haladva fogalmazza meg sejtéseit.

Feladatok

2.1. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^n$ egy tetszőleges $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = c$ egyenletű hipersíkjának bármely két pontját összekötő vektor merőleges $\mathbf{n}$-re.

2.2. Igazoljuk a sík implicit vektoregyenletére vonatkozó 2.11. állítást.

2.3. Igazoljuk a térbeli egyenes implicit egyenletrendszerére vonatkozó 2.17. állítást!

A lineáris egyenletrendszer és két modellje

E szakasz témája a lineáris egyenletrendszerek fogalma és a lineáris egyenletrendszer megoldásának két geometriai interpretációja: hipersíkok metszetének meghatározása és egy vektor lineáris kombinációként való előállítása. A számítások kényelmes könyvelésére bevezetjük a mátrix fogalmát.

Lineáris egyenlet és egyenletrendszer Az előző rész végén láttuk, hogy a síkbeli egyenes egyenletének általános alakja $Ax + By = C$, ahol A, B és C konstansok. Ennek általánosításaként jutunk a lineáris egyenlet fogalmához.[1]

[1] *Lineáris:* a *vonalas* jelentésű latin lineāris szóból ered, mely a *lenfonal*, *horgászzsinór*, átvitt értelemben *vonal*, *határvonal* jelentésű linea (līnea) szó származéka. A matematikában *egyenessel kapcsolatba hozható*, illetve *elsőfokú* értelemben szokás használni.

2.20. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS EGYENLET). *Az*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{2.16}$$

alakra hozható egyenletet az x_1, $x_2 \dots x_n$ ismeretlenekben lineáris egyenletnek *nevezzük, ahol a_1, a_2,… és a_n, valamint b konstansok. Az a_1, a_2,… és a_n konstansokat az egyenlet* együtthatóinak, *b-t az egyenlet* konstans tagjának *nevezzük.*

► Például az alábbi egyenletek lineárisak:

$$x - 2y = 1, \quad \frac{1}{2}x_1 - \sqrt{2}x_2 + (5-\pi)x_3 = 0, \quad a\cos 0.87 - 0.15c = 0.23.$$

► A következő egyenletek nem lineárisak az x, y és z ismeretlenekben:

$$xz - y = 0, \quad x + 2y = 3^z, \quad x\sin z + y\cos z + y = z^2,$$

viszont mindegyikük lineáris az x és y ismeretlenekben, hisz ekkor z paraméter, melynek bármely értéke mellett lineárisak az egyenletek.

► Az

$$x = y, \quad x = 3 - y + 2z$$

egyenletek az x, y és z ismeretlenekben lineárisak, mert azonos átalakítással a definícióbeli alakra hozhatók:

$$x - y + 0z = 0, \quad x + y - 2z = 3.$$

► Másrészt az

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 2 = 0$$

egyenlet nem lineáris, mert a z-vel való beszorzás nem azonos átalakítás, tehát a lineáris $x + y + 2z = 0$ egyenlettel nem ekvivalens.

Lineáris egyenletek egy véges halmazát *lineáris egyenletrendszernek* nevezzük. Az egyenletrendszer ismeretlenei mindazok az ismeretlenek, amelyek legalább egy egyenletben szerepelnek. Ha egy ismeretlen egy egyenletben nem szerepel, akkor úgy tekintjük, hogy 0 az együtthatója. A jobb áttekinthetőség kedvéért az egyenletrendszereket úgy írjuk fel, hogy az ismeretlenek mindegyik egyenletben ugyanabban a sorrendben szerepeljenek. Egy egyenletrendszer egy egyenletből is állhat.

► Lineáris egyenletrendszerek például a következők:

$$\begin{aligned} 3x - y &= 2 \\ -x + 2y &= 6 \\ x + y &= 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad 2x - 3y + z - w = 6. \tag{2.17}$$

► Elképzelhető, hogy egy egyenletrendszer azonos átalakítása közben olyan egyenletet kapunk, melyben minden együttható 0, azaz amely $0 = b$ alakú. Az is lehet, hogy egy egyenletrendszerben egyes együtthatók paraméterek. Ilyenkor tudnunk kell, mely változók az ismeretlenek, melyek a paraméterek. Így a következő egyenletrendszerek is lineárisak az x és y ismeretlenekben:

$$\begin{aligned} ax + \phantom{\frac{1}{a}}y &= 2a \\ x - \frac{1}{a}y &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 1 \\ 0 &= 2. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Mindezek után fölírjuk az egyenletrendszer általános alakját:

2.21. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER). Lineáris egyenletrendszer*en ugyanazokban a változókban lineáris egyenletek egy véges halmazát értjük. Általános alakja m egyenlet és n ismeretlen esetén*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{2.19}$$

ahol x_1, x_2,... x_n az ismeretlenek, a_{ij} az i-edik egyenletben az x_j ismeretlen együtthatóját jelöli, és b_i az i-edik egyenlet konstans tagja. Ha mindegyik egyenlet konstans tagja 0, *a lineáris egyenletrendszer* homogén, *ha csak egy is különbözik* 0*-tól,* inhomogén.

► A (2.17) egyenletrendszerei mind inhomogének, míg a (2.18) középső egyenletrendszere homogén.

A *konzisztes* szó jelentése: belső ellentmondástól mentes. Egyéb jelentései: szilárd, sűrű, tömött, tömör, tartalmas, egységes, következetes. A latin consistens szóból ered, melynek jelentése helytálló.

2.22. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA). *Azt mondjuk, hogy a rendezett* $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *szám-n-es* megoldása *a* (2.19) *egyenletrendszernek, ha megoldása minden egyenletnek, azaz ha minden egyenletet kielégít az* $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2, \ldots, x_n = u_n$ *helyettesítéssel. Ha e szám-n-est vektornak tekintjük,* megoldásvektorról *beszélünk. Az összes megoldás halmazát az egyenletrendszer* megoldáshalmaz*ának nevezzük. Egy egyenletrendszert* konzisztensnek *(vagy* megoldhatónak*) nevezünk, ha megoldáshalmaza nem üres. Ellenkező esetben az egyenletrendszer* inkonzisztens *(*nem megoldható*).*

Ha egy egyenletrendszer több egyenletből áll, mint ahány ismeretlene van, *túlhatározottnak* nevezzük, míg ha kevesebb egyenletből áll, *alulhatározottnak*. E fogalmak időnként félrevezető megfogalmazásokhoz és téves következtetésekre vezetnek, ha az az elképzelés alakul ki, hogy a túlhatározottság azt jelenti: az egyenletek (a feltételek) már „túl sokan" vannak ahhoz, hogy akár csak egy szám-n-es is kielégítse. Később látni fogjuk, hogy ezzel ellentétben nem a „túl sok" egyenlet, hanem az egymásnak ellentmondó egyenletek okozzák az inkonzisztenciát. Hasonlóképp az alulhatározottság nem jelenti azt, hogy szükségképpen több megoldás is van. Alulhatározott egyenletrendszer is lehet inkonzisztens. Egyedül annyi mondható: alulhatározott egyenletrendszernek nem lehet csak egyetlen megoldása.

► A (2.17) egyenletrendszereinek egy-egy megoldása: $(x, y) = (2, 4)$, $(x_1, x_2, x_3) = (3, 1, 4)$, $(x, y, z, w) = (2, 0, 2, 0)$. A harmadik egyenletrendszernek több megoldása is van, például egy másik megoldás az $(x, y, z, w) = (3, 0, 0, 0)$.

► A (2.18) első egyenletrendszerének megoldása $(x, y) = (1, a)$, a másodiké $(x, y) = (0, 0)$. A harmadik egyenletrendszernek nincs megoldása, hisz nincs olyan x és y érték, melyre fönnállna a $0x + 0y = 2$ egyenlőség.

► Általában, a

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$$

egyenletnek minden szám-n-es megoldása, míg a

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b, \quad (b \neq 0)$$

egyenletnek egyetlen megoldása sincs.

Ekvivalens lineáris egyenletrendszerek Tekintsük az alábbi három egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Mindháromnak $(x, y) = (2, 1)$ az egyetlen megoldása.

2.23. DEFINÍCIÓ (EKVIVALENS EGYENLETRENDSZEREK). *Azonos ismeretlenekkel felírt két egyenletrendszert* ekvivalensnek *nevezünk, ha megoldásaik halmaza azonos.*

2.24. TÉTEL (EKVIVALENS ÁTALAKÍTÁSOK). *Az alábbi transzformációk minden egyenletrendszert ekvivalens egyenletrendszerbe visznek át:*

1. *két egyenlet felcserélése;*
2. *egy egyenlet nem nulla számmal való szorzása;*
3. *egy egyenlet konstansszorosának egy másikhoz adása.*

Ezen kívül

4. *egy* $0 = 0$ *alakú egyenlet elhagyása*

is ekvivalens átalakítás, de ez eggyel csökkenti az egyenletek számát.

BIZONYÍTÁS. Az első kettő és a negyedik átalakítás nyilvánvalóan nem változtatja meg a megoldások halmazát (a negyedikkel kapcsolatban lásd a 2.11. feladatot). Nézzük a harmadik átalakítást. Tekintsük az *eredeti* egyenletrendszer egy megoldását, és azt az *új* egyenletrendszert, melyet az i-edik egyenlet c-szeresének a j-edikhez adásával kapunk. Világos, az átalakítás előtt is elvégezhetjük a behelyettesítést, akkor viszont egy kielégített egyenlőség konstansszorosát adjuk egy másikhoz, ami így ugyancsak ki lesz elégítve. Tehát az eredeti egyenletrendszer minden megoldása az újnak is megoldása. Másrészt viszont az új egyenletrendszer minden megoldása az eredetinek is megoldása, hisz az visszakapható az újból az i-edik egyenlet $-c$-szeresének a j-edikhez adásával. Vagyis a két megoldáshalmaz megegyezik. Tehát ez az átalakítás is ekvivalens. □

Mátrixok Az egyenletrendszer megoldásában az ekvivalens átalakítások során a műveleteket csak az egyenletrendszer együtthatóival és konstans tagjaival végezzük, ezért az egyenletrendszer megoldásainak lépéseit elég csak egy olyan táblázaton elvégezni, mely az együtthatókat és a konstansokat tartalmazza. Az ilyen számtáblázatokat *mátrixoknak* nevezzük, ezekkel később külön fejezetben foglalkozunk. A mátrixba írt számokat a *mátrix elemeinek* nevezzük.

Mátrix: a latin mater (māter) (*anya*, *szülőanya*, *forrás*) szó származéka a matrix (mātrīx), melynek jelentése az európai nyelvekben a következő változásokon ment át: *anyaállat*, *vemhes állat*, *anyaméh*, *bezárt hely*, *ahonnan valami kifejlődik*, *bezárt*, *körülzárt dolgok sokasága*, *tömbje*. Jelentése az élettanban méh, a geológiában finomszemcsés kő, melybe fossziliák, kristályok, drágakövek vannak zárva, az anatómiában a körmöt, fogat kialakító szövet.

A mátrix méretének jellemzéséhez mindig előbb a sorok, majd az oszlopok számát adjuk meg, tehát egy $m \times n$-es mátrixnak m sora és n oszlopa van. Egy ilyen mátrix általános alakja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

A mátrixokat[2] általában nagy betűvel jelöljük, e könyvben – követve a műszaki nyelv szokásait – félkövér nagy betűvel. A matematikában elterjedt az a szokás, hogy a mátrixot jelölő nagy betűvel azonos kis betűk jelölik a mátrix elemeit, tehát $\mathbf{A}$ elemei a_{11}, a_{12}.... A fenti mátrixra szokás még a tömörebb

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n} \quad \text{vagy egyszerűen az} \quad \mathbf{A} = [a_{ij}]$$

jelölést használni. Sokan használnak szögletes helyett kerek zárójelet a mátrixok jelölésére.

Mindig az első index jelöli a sor, a második az oszlop számát, tehát a_{23} a 2-dik sor 3-adik oszlop kereszteződésében álló elemet jelöli. Időnként, a félreérthetőség elkerülésére a_{ij} helyett $a_{i,j}$-t írunk (pl. $a_{n,n-1}$).

A mátrix *főátlójába* azok az elemek tartoznak, amelyek ugyanannyiadik sorban vannak, mint ahányadik oszlopban, azaz a például a fenti mátrixban a főátló elemei a_{11}, a_{22},....

[2] A programnyelvekben – ellentétben a matematikával – a kisbetűvel/nagybetűvel való jelölésnek nincs a mátrixot az elemétől való megkülönböztető szerepe. A legtöbb magasszintű nyelvben az `A`-val jelölt mátrix (informatikai szóhasználattal *tömb*) i-edik sorának j-edik elemét `A[i,j]` vagy `A(i,j)` jelöli. Az alacsonyabb szintű C-típusú nyelvekben nincs 2-dimenziós tömb, a mátrixot egy olyan 1-dimenziós tömb reprezentálja, melynek minden eleme 1-dimenziós tömb, így `A[i]` az i-edik sort, `A[i][j]` az i-edik sor j-edik elemét jelöli. A mátrix alapú nyelvekben egy mátrix egy sorvektora vagy oszlopvektora könnyen kiemelhető, pl. az `A` mátrix 2. sorát az `A(2,:)`, 3. oszlopát a `A(:,3)` kóddal érhetjük el. Sok programnyelvben a tömbök elemeit nem 1-től, hanem 0-tól indexelik, ilyen például a C és a Python is.

A vektorokat is szokás *mátrix jelöléssel*, *mátrix alakban*, azaz egy 1-soros vagy 1-oszlopos mátrixszal leírni – ahogy azt az első fejezetben mi is tettük. Az $n \times 1$-es mátrixot *oszlopvektornak* vagy *oszlopmátrixnak*, az $1 \times n$-es mátrixot *sorvektornak* vagy *sormátrixnak* is szokás nevezni. Annak a kérdésnek az eldöntése, hogy egy n-dimenziós vektort sor- vagy oszlopvektorral reprezentáljunk, döntés (szokás, ízlés) kérdése. Manapság jobban el van terjedve a vektorok oszlopvektoros jelölése, ezért e könyvben alapértelmezésként mi is ezt a jelölést fogjuk használni, de egyes témáknál a másik használatát is bemutatjuk. Így tehát az $(1, 2)$ vektornak megfelelő sorvektor és oszlopvektor alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ illetve } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

amelyek közül, ha mást nem mondunk, az utóbbit fogjuk a vektor mátrixos jelöléseként használni.

VEKTOROK MAGYAR IRODAI és általános iskolában használt jelölése – a tizedes vessző használata miatt – pontosvesszőt tesz a *vektor koordinátái* közé *elválasztójelként*. Magyar nyelvű felsőbb matematika szövegekben ez nem szokás, mi is elkerüljük, és tizedespontot, vektor koordinátái közt vesszőt használunk. Vegyük észre, hogy vektorok sorvektorral (sormátrixszal) való megadásnál írásjelet nem használunk, csak szóközzel választjuk el a koordinátákat!

Általában $\mathbf{a}_j$ jelöli az $\mathbf{A}$ mátrixból kiválasztható j-edik oszlopvektort, ha csak oszlopvektorokkal dolgozunk. Ha sor- és oszlopvektorok is együtt szerepelnek, az i-edik sorvektort $\mathbf{a}_{i*}$, a j-edik oszlopvektort $\mathbf{a}_{*j}$ jelöli összhangban az elemek indexelésével. Ehhez hasonló jelölést használnak a mátrix alapú nyelvek is (ld. a széljegyzetet). Az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorára az $(\mathbf{A})_{i*}$, j-edik oszlopára az $(\mathbf{A})_{*j}$, elemére az $(\mathbf{A})_{ij}$ jelölés is használatos.

2.25. PÉLDA (MÁTRIXOK ÉS ELEMEIK). *Ha*

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \textit{ akkor } c_{23} = 7,\ \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_{*2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix},\ \mathbf{c}_{2*} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Egyenletrendszer mátrixa és bővített mátrixa Az egyenletrendszer *együtthatómátrixa* az egyenletek együtthatóit, míg *bővített* mátrixa, vagy egyszerűen csak *mátrixa* az egyenletek együtthatóit és konstans tagjait tartalmazza. Az áttekinthetőség érdekében a bővített mátrixban egy függőleges vonallal választhatjuk el az együtthatókat a konstans tagoktól. A 2.21. definícióbeli általános alak együttható- és bővített mátrixa:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

A gyakorlatban nagy méretű egyenletrendszereket, s így nagy méretű mátrixokat is kezelni kell. Ha elemeik nagy része 0, *ritka mátrixoknak* nevezzük. A nem ritka mátrixokat *sűrűnek* nevezzük. Előbb a kis méretű sűrű mátrixokra hatékony módszerekkel ismerkedünk meg.

2.26. PÉLDA (MÁTRIX HASZNÁLATA A MEGOLDÁSHOZ). *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!*

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z &= 7 \\ x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y + 3z &= 6 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Két lehetséges megoldást mutatunk. A (2.20) egyenletrendszereinél látott utolsó két egyszerűbb alak elérése a cél. Először írjuk fel az egyenletrendszer bővített mátrixát!

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z &= 7 \\ x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y + 3z &= 6 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

Kicseréljük az első két egyenletet:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + 3y + 2z &= 7 \\ 2x + 2y + 3z &= 6 \end{aligned}$$

Kicseréljük az első két sort:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

Az első egyenlet 2-szeresét kivonjuk a második, majd a harmadik egyenletből (azaz -2-szeresét hozzáadjuk a második majd a harmadik egyenlethez).

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ y &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Az első sor kétszeresét kivonjuk a második és harmadik sorból (azaz az első sor -2-szeresét hozzáadjuk a második majd a harmadik sorhoz).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Az egyenletrendszerről azonnal leolvasható y és z értéke. Ezeket az első egyenletbe helyettesítve megkapjuk x értékét is, nevezetesen $x + y + z = 3$, azaz $y = 1$ és $z = 0$ behelyettesítése után: $x + 1 + 0 = 3$, vagyis $x = 2$. Másik megoldási módszerhez jutunk, ha a visszahelyettesítés helyett folytathatjuk az ekvivalens átalakítások sorozatát:

Kivonjuk a második, majd a harmadik egyenletet az elsőből:

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Kivonjuk a második, majd a harmadik sort az elsőből:

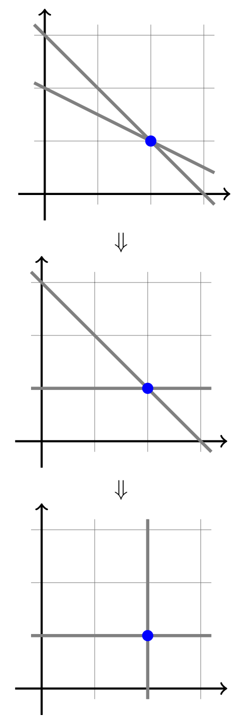
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Így olyan alakra hoztuk az egyenletrendszert, illetve a bővített mátrixot, amiből azonnal leolvasható a megoldás: $(x, y, z) = (2, 1, 0)$. □

Sormodell: hipersíkok metszete A lineáris egyenletrendszerek szemléltetésére két geometriai modellt mutatunk, melyek segíteni fognak az általánosabb fogalmak megértésében, szemléltetésében.

Tudjuk, hogy a kétváltozós lineáris $ax + by = c$ egyenletet kielégítő pontok halmaza egyenest alkot, ha a és b legalább egyike nem 0. (Ha $a = b = c = 0$, akkor az egyenlet alakja $0x + 0y = 0$, azaz $0 = 0$, ami minden (x, y) számpárra fennáll, tehát a megoldások halmaza a sík összes pontjának halmazával azonos. Ha $a = b = 0$, de $c \neq 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása, a megoldáshalmaz üres.)

Egyenletrendszer megoldásának szemléltetése a sormodellben jól nyomon követhető a SagePlayer sormodell című demonstrációján. Ott saját bővített mátrixokkal is lehet kísérletezni.



2.6. ábra: Egyenletrendszer megoldásának szemléltetése

2.27. PÉLDA (SORMODELL KÉT KÉTISMERETLENES EGYENLETTEL). *Ábrázoljuk az alábbi egyenletrendszereket és megoldásukat a sormodellben!*

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \quad \textit{az} \quad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 7 \end{aligned} \quad \textit{és az} \quad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 6 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Az első egyenletrendszer szerinti ábra egy metsző egyenespárt tartalmaz. Metszéspontjuk a megoldás. Ezt a 2.6 ábra felső rajza mutatja. Oldjuk meg az egyenletrendszert! A megoldás közben két újabb egyenletrendszert kapunk:

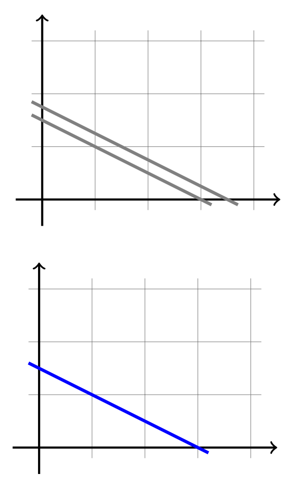
$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

A 2.6 ábrán az így kapott egyenletrendszerek sormodell szerinti ábráit is megrajzoltuk.

A második egyenletrendszerben két párhuzamos egyenes egyenlete szerepel. Ezeknek nincs közös pontjuk, így az egyenletrendszer nem oldható meg. Ha az első egyenlet kétszeresét kivonjuk a másodikból, az ellentmondó $0 = 1$ egyenletet kapjuk, vagyis így is arra jutottunk, hogy az egyenletrendszer nem oldható meg. Valóban, a $0x + 0y = 1$ egyenletet kielégítő pontok üres halmazt adnak.

A harmadik egyenletrendszer egyenleteihez két egybeeső egyenes tartozik. Az egyenletrendszer megoldáshalmaza tehát ennek az egyenesnek a pontjaiból áll.

Ha az első egyenlet kétszeresét kivonjuk a másodikból, itt egy a $0 = 0$ egyenletet kapjuk, amely így elhagyható. A megmaradó $x + 2y = 3$ egyenlet összes megoldása paraméteres alakba írva például $(x, y) = (3 - 2t, t)$. □



2.7. ábra: A megoldás szemléltetése, ha a két egyenlet egyikének bal oldala nullává tehető

▶ Hasonlóan szemléltethető a 3-dimenziós térben a háromismeretlenes egyenletrendszerek megoldása. Fölsoroljuk a három háromismeretlenes egyenletből álló egyenletrendszerre vonatkozó lehetőségeket:

- Ha a három egyenlettel meghatározott három sík általános helyzetű, akkor az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van (ld. 2.8.

(a) ábra). Például a 2.26. példában szereplő egyenletrendszernek egyetlen megoldása van: $(x, y, z) = (2, 1, 0)$.

- Lehet, hogy a három sík metszete egy egyenes. Ilyen például a

$$\begin{aligned} 2x + y + 2z &= 5 \\ x + y + z &= 3 \\ 3x + 2y + 3z &= 8 \end{aligned} \tag{2.21}$$

egyenletrendszer. Ekkor a három normálvektor egy síkba (de nem egy egyenesbe) esik. Itt például a normálvektorok közt fennáll a

$$(2, 1, 2) + (1, 1, 1) - (3, 2, 3) = \mathbf{0}$$

összefüggés. Ugyanez a lineáris kapcsolat áll fönn az egyenletek közt is, vagyis a harmadik egyenlet az első kettő összege, ami azt jelenti, hogy a harmadik egyenlet el is hagyható.

- Változtassuk meg a fenti egyenletrendszer harmadik egyenletének konstans tagját:

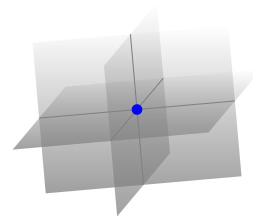
$$\begin{aligned} 2x + y + 2z &= 5 \\ x + y + z &= 3 \\ 3x + 2y + 3z &= 9 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Ennek sormodell szerinti ábrája három olyan síkot tartalmaz, melyek párhuzamosak egy egyenessel, de nincs közös pontjuk, mint az a 2.9. *(b)* ábrán látható. Ha kivonjuk az első és második egyenletet a harmadikból, akkor az ellentmondó $0 = 1$ egyenletre jutunk, míg az imént a 2.21 egyenletrendszer esetén az elhagyható $0 = 0$ egyenletet kaptuk. Ennek oka, hogy bár a normálvektorok közt ugyanaz a lineáris kapcsolat van mint az imént (egy síkba esnek), az egyenletek lineárisan függetlenek! Általában is igaz, nincs megoldása az olyan egyenletrendszereknek, ahol bizonyos normálvektorok lineárisan összefüggők, de a hozzájuk tartozó egyenletek már nem. Gondoljuk meg, ilyen eseteket mutat a 2.9. *(a)* ábra is.

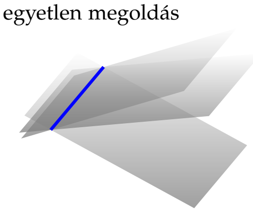
- Végül tekintsük az

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y + 2z &= 6 \\ 3x + 3y + 3z &= 9 \end{aligned} \tag{2.23}$$

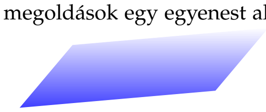
egyenletrendszert! Látható, hogy a második és a harmadik egyenlet az első konstansszorosa, azaz ugyanannak a síknak az egyenletei, az egyenletrendszer tehát ekvivalens az egyetlen $x + y + z = 3$ egyenletből álló egyenletrendszerrel. Az y-nak és z-nek tetszőleges értéket választunk, például legyen $y = s$, $z = t$, akkor $x = 3 - y - z$, azaz $x = 3 - s - t$. Így az összes megoldás: $(x, y, z) = (3 - s - t, s, t)$. Ezt



(a) Három általános helyzetű sík: egyetlen megoldás

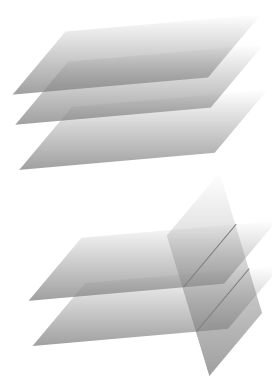


(b) Egy egyenesen átmenő, de nem csupa azonos sík: végtelen sok megoldás, a megoldások egy egyenest alkotnak



(c) Azonos síkok: végtelen sok megoldás, a megoldások egy síkot alkotnak

2.8. ábra: Konzisztens (megoldható) egyenletrendszerek ábrázolása (a megoldáshalmazt kék szín jelzi)



(a) A síkok közül legalább kettő párhuzamos, de nem azonos.

(b) Egy egyenessel párhuzamos, de egymással nem párhuzamos és közös egyenest sem tartalmazó három sík.

2.9. ábra: Nem megoldható egyenletrendszerek szemléltetése oszlopvektorokkal fölírva kapjuk, hogy a megoldás

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ez a 2.8. *(c)* ábra szerint eset.

► A 2- és 3-dimenziós esetek analógiájára kialakíthatunk egy elképzelést az n-dimenziós esetre is. Itt minden egyenlet megoldáshalmaza a tér egy hipersíkja, kivéve a $0 = 0$ egyenletet, mert annak megoldáshalmaza az egész tér, és a $0 = 1$ egyenletet, mert annak megoldáshalmaza az üreshalmaz.

2.28. Állítás (Sormodell). *Ha egy n-ismeretlenes egyenlet bal oldalán nem minden együttható 0, akkor az egyenletet kielégítő pontok (azaz az egyenlet megoldásai) egy hipersíkot alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben. Ha egy n-ismeretlenes egyenletrendszer m ilyen egyenletből áll, akkor az egyenletrendszer megoldása a nekik megfelelő m hipersík közös része $\mathbb{R}^n$-ben.*

Az m egyenlet a skaláris szorzás segítségével tömörebb alakban is fölírható. Az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszer i-edik egyenletének alakja

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

Ha $\mathbf{a}_{i*}$ jelöli az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorvektorát, és $\mathbf{x}$ az ismeretlenek vektorát, akkor az előző egyenlet a következő alakot ölti:

$$\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = b_i. \tag{2.24}$$

Ez különösen akkor lesz érdekes, ha homogén lineáris egyenletrendszereket fogunk vizsgálni, mert ott mindegyik egyenlet $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = 0$ alakot ölt, ami azt jelenti, hogy olyan $\mathbf{x}$ vektort keresünk, mely merőleges az $\mathbf{a}_{i*}$ vektorok mindegyikére.

Oszlopmodell: vektor előállítása lineáris kombinációként E modellben az egyenletrendszerre úgy tekintünk, mint egy olyan vektoregyenletre, amelyben egy vektort kell előállítani adott vektorok lineáris kombinációjaként. Például a 2.27. példabeli

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszer ekvivalens az

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Az oszlopmodell lépései jól nyomon követhetők a SagePlayer oszlopmodell című demonstrációján. Ott saját bővített mátrixokkal is lehet kísérletezni.

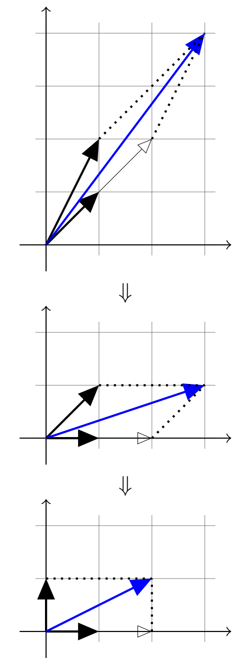
vektoregyenlettel. Itt az a feladat, hogy megkeressük az $(1,1)$ és $(1,2)$ vektoroknak azt a lineáris kombinációját, amely egyenlő a $(3,4)$ vektorral.

2.29. PÉLDA (OSZLOPMODELL). *Ábrázoljuk a 2.27. példában megadott*

$$\begin{aligned} x+\ \ y&=3\\ x+2y&=4\end{aligned}\qquad \begin{aligned} x+2y&=3\\ 2x+4y&=7\end{aligned}\quad \textit{és}\quad \begin{aligned} x+2y&=3\\ 2x+4y&=6\end{aligned}$$

egyenletrendszereket az oszlopmodellben!

MEGOLDÁS. Az első egyenletrendszer esetén két lineárisan független vektor lineáris kombinációjaként kell előállítani egy harmadik vektort. Ezt szemlélteti a 2.10 ábra. Érdekességként itt is megmutatjuk, hogy az egyenletrendszer megoldásának lépései hogy mutatnak e modellben. Az ekvivalens átalakítások lépései:



2.10. ábra: A megoldás lépései a oszlopmodellben.

$$\begin{aligned} x+\ \ y&=3\\ x+2y&=4\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x+y&=3\\ y&=1\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x\ \ \ &=2\\ y&=1\end{aligned}$$

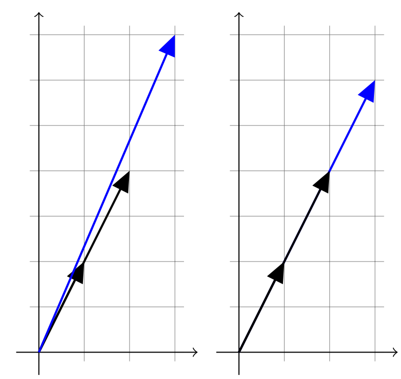
Vektoros alakban:

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}.$$

A második és harmadik egyenletrendszer vektoros alakja

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix},\quad\text{illetve}\quad \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}.$$

A 2.11 ábráról szemléletesen is látható, hogy az egyik vektoregyenletnek nincs megoldása, míg a másiknak végtelen sok is van. □



2.11. ábra: Oszlopmodell lineárisan összefüggő vektorok esetén.

Általánosan kimondható a következő:

2.30. ÁLLÍTÁS (OSZLOPMODELL). *A 2.21. definícióban megadott (2.19) egyenletrendszer a következő vektoregyenlettel ekvivalens:*

$$\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix}x_1+\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix}x_2+\dots+\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix}x_n=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása ekvivalens egy vektoregyenlet megoldásával, ahol az egyenletrendszer konstans tagjaiból álló vektort kell az együtthatómátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként előállítani.

E modell szerint egy egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha az együtthatómátrix oszlopvektorainak összes lineáris kombinációjából álló halmazban a konstans tagokból álló vektor is szerepel (ld. 2.13. feladat).

Feladatok

2.4.• Melyek lineáris egyenletek az x, y és z változókban az alábbiak közül?

a) $3x-(\ln 2)y+e^3z=0.4$ *b)* $a^2x-b^2y=0$

c) $xy-yz-zx=0$ *d)* $(\sin 1)x+y-\pi z=0$

e) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ *f)* $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$

Igazoljuk, hogy az alábbi egyenletrendszerek ekvivalensek!

2.5. $\left.\begin{aligned}x+3y&=5\\ y&=1\end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned}x+y&=3\\ x\quad&=2\end{aligned}\right\}$

2.6. $\left.\begin{aligned}2x+3y&=2\\ 0x+0y&=3\end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned}x+y&=2\\ x+y&=7\end{aligned}\right\}$

Oldjuk meg (fejben számolva) az alábbi lineáris egyenletrendszereket az $a=1$, $b=2$, $c=3$ paraméterválasztás esetén!

2.7. $\left.\begin{aligned}(2a-b)x+(3a-c)y&=0\\ (3b-2c)x+(b-2a)y&=0\end{aligned}\right\}$

2.8. $\left.\begin{aligned}(b-a)x+(3a-c)y&=1\\ (3b-2c)x+(b-2a)y&=0\end{aligned}\right\}$

2.9. $\left.\begin{aligned}(b-a)x+(3a-c)y&=1\\ (3b-2c)x+(b-2a)y&=1\end{aligned}\right\}$

2.10. $\left.\begin{aligned}(b-a)x+(3a-c)y&=1\\ (3b-2c)x+\ (c-b)y&=2\end{aligned}\right\}$

2.11. EGYENLETRENDSZEREK KÖZÖS MEGOLDÁSA Tekintsük az azonos ismeretleneket tartalmazó $\mathcal{E}_1$ és $\mathcal{E}_2$ egyenletrendszereket. Legyen ezek megoldáshalmaza $\mathcal{M}_1$, illetve $\mathcal{M}_2$. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{E}$ az $\mathcal{E}_1$ és $\mathcal{E}_2$ egyenletrendszerek egyesítése, azaz $\mathcal{E}=\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2$, és $\mathcal{M}$ az $\mathcal{E}$ megoldáshalmaza, akkor $\mathcal{M}$ az $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ közös része, azaz $\mathcal{M}=\mathcal{M}_1\cap\mathcal{M}_2$.

Vizsgáljuk meg ezt az állítást az alábbi esetekben:

a) $\mathcal{E}_1=\{\,x+y=2\}$, $\mathcal{E}_2=\{\,x-y=0\,\}$;

b) $\mathcal{E}_1=\{\,x+y=2,\ x-y=0\}$, $\mathcal{E}_2=\{\,x-y=0\,\}$;

c) $\mathcal{E}_1=\{\,x+y=2,\ x-y=0\}$, $\mathcal{E}_2=\{\,x-y=1\,\}$;

d) $\mathcal{E}_1=\{\,x+y=2,\ x-y=0\}$, $\mathcal{E}_2=\{\,0x+0y=0\,\}$;

e) $\mathcal{E}_1$ tetszőleges egyenletrendszer, $\mathcal{E}_2=\{\,0=0\,\}$.

2.12.• SOR ÉS OSZLOPMODELL Rajzoljuk fel a következő két egyenletrendszerhez tartozó sormodell és oszlopmodell szerinti ábrát!

a) $\begin{aligned}2x+3y&=7\\ 3x-2y&=4\end{aligned}$ *b)* $\begin{aligned}2x+4y&=3\\ 3x+6y&=4\end{aligned}$

2.13. SOR- ÉS AZ OSZLOPMODELL 3D-BEN Vizsgáljuk meg az alábbi két – azonos együtthatómátrixú – egyenletrendszer megoldhatóságát a sor- és az oszlopmodellben:

$$\begin{aligned}x+\ \ y+2z&=3\\ x+2y+4z&=3\\ 3x+4y+8z&=9\end{aligned}\qquad\qquad\begin{aligned}x+\ \ y+2z&=3\\ x+2y+4z&=3\\ 3x+4y+8z&=1\end{aligned}$$

2.14. SOR ÉS OSZLOPMODELL $m\neq n$ ESETÉN Vizsgáljuk meg az alábbi három egyenletrendszer megoldhatóságát a sor- és az oszlopmodellben:

$$a)\ \begin{aligned}x+\ \ y&=3\\ x+\ \ y&=4\\ x+3y&=5\end{aligned}\qquad b)\ \begin{aligned}x+\ \ y&=3\\ x+2y&=4\\ x+3y&=5\end{aligned}\qquad c)\ \begin{aligned}x+\ \ y&=3\\ x+2y&=3\\ x+3y&=5\end{aligned}$$

2.15.• IGAZ – HAMIS Mely állítások igazak, melyek hamisak az alábbiak közül?

a) Ha egy n-ismeretlenes egyenletrendszer olyan hipersíkok egyenleteiből áll, melyek közt van két párhuzamos, akkor az egyenletrendszer nem oldható meg.

b) Ha egy n-ismeretlenes egyenletrendszer nem oldható meg, akkor az egyenletek olyan hipersíkok egyenletei, melyek közt van két párhuzamos, de nem azonos hipersík.

c) Ha egy n-ismeretlenes egyenletrendszer csak két egyenletből áll, akkor az oszlopmodell szerint pontosan akkor oldható meg tetszőleges jobb oldal esetén, ha a vektoregyenlet bal oldalán szereplő vektorok közt van kettő lineárisan független.

2.16.• Egészítsük ki az alábbi állításokat úgy, hogy igazak legyenek!

a) Egy két egyenletből álló háromismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra a(z) ..-dimenziós térben .. darab ......ból/ből áll, melyek ha ...., akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása, egyébként megoldásainak száma .... Oszlopmodellje a(z) ..-dimenziós térben .. darab ....ból/ből áll.

b) Egy három egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra a(z) ..-dimenziós térben .. darab ....ból/ből áll, míg az oszlopmodellje a ..-dimenziós térben .. darab ......ból/ből.

c) Egy négy egyenletből álló ötismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra a(z) ..-dimenziós térben .. darab ....ból/ből áll. Oszlopmodellje a(z) ..-dimenziós térben .. darab ....-ból/ből áll.

Megoldás kiküszöböléssel

Elemi sorműveletek A lineáris egyenletrendszerek egyik megoldási módszerének lényege, hogy ekvivalens átalakításokkal olyan alakra hozzuk az egyenletrendszert, melyből visszahelyettesítések után, vagy azok nélkül azonnal leolvasható az eredmény. Az átalakításokat a bővített mátrixon hajtjuk végre úgy, hogy a nekik megfelelő átalakítások az egyenletrendszeren ekvivalens átalakítások legyenek. A 2.24. tételben felsorolt első három ekvivalens átalakítás nem változtatja meg az egyenletrendszer egyenleteinek számát sem. Az egyenletrendszer bővített mátrixán az ezeknek megfelelő átalakításokat elemi sorműveleteknek nevezzük.[3]

2.31. DEFINÍCIÓ (ELEMI SORMŰVELETEK). *Egy mátrix sorain végzett alábbi műveleteket* elemi sorműveleteknek *nevezzük:*

1. Sorcsere: *két sor cseréje.*
2. Beszorzás: *egy sor beszorzása egy nemnulla számmal.*
3. Hozzáadás: *egy sorhoz egy másik sor konstansszorosának hozzáadása.*

Természetesen egy sort el is oszthatunk egy nemnulla c számmal, hisz az az $1/c$-vel való beszorzással egyenértékű. Hasonlóképp levonhatjuk egy sorból egy másik sor c-szeresét, hisz az a $-c$-szeresének hozzáadásával ekvivalens.

Az elemi átalakításokra a következő jelöléseket fogjuk használni:

1. $S_i \leftrightarrow S_j$: az i-edik és a j-edik sorok cseréje.
2. cS_i: az i-edik sor beszorzása c-vel.
3. $S_i + cS_j$: a j-edik sor c-szeresének az i-edik sorhoz adása.

Az elemi sorműveletek mintájára elemi oszlopműveletek is definiálhatók, de azokat ritkán használjuk. Jelölésükre értelemszerűen az $O_i \leftrightarrow O_j$, cO_i, $O_i + cO_j$ formulákat használjuk.

Lépcsős alak Az eddig megoldott egyenletrendszerekben igyekeztünk átlós, vagy legalább átló alatt kinullázott alakra hozni az egyenletrendszert, mint azt például a 2.26. példában tettük. Ez nem mindig sikerül, mert néha megtartani kívánt elemek is kinullázódnak, de a következőkben definiált lépcsős alakhoz mindig el tudunk jutni.

2.32. DEFINÍCIÓ (LÉPCSŐS ALAK). *Egy mátrix* lépcsős, *vagy* sorlépcsős alakú, *ha kielégíti a következő két feltételt:*

1. *a csupa* 0*-ból álló sorok (ha egyáltalán vannak) a mátrix utolsó sorai;*
2. *bármely két egymás után következő nem-*0 *sorban az alsó sor elején (legalább eggyel) több* 0 *van, mint a fölötte lévő sor elején.*

A nemnulla sorok első zérustól különböző elemét főelemnek, vezérelemnek *vagy* pivotelemnek *hívjuk. Egy főelem oszlopának* főoszlop *vagy* bázisoszlop *a neve.*

[3] Lineáris egyenletrendszerek felírása és megoldása már időszámításunk előtt 300 körül babiloni iratokban szerepelt. Az első századra teszik a kínai Jiǔzhāng Suànshù (tradicionális jelekkel: 九章算術, egyszerűsített jelekkel: 九章算术) című mű megjelenését, mely az előző ezer évben összegyűlt matematikai tudást foglalja össze (címének magyar fordítása „A matematikai művészet kilenc fejezete" vagy „Kilenc fejezet a matematikai eljárásokról" lehet). E műben már a kiküszöbölés (azaz a Gauss-elimináció) néven ismert technikát alkalmazzák lineáris egyenletrendszer megoldására. A két fenti műben szereplő egyenletrendszerek, és további történeti részletek olvashatók a The MacTutor History of Mathematics archive című weboldalon.

2.33. PÉLDA (Lépcsős alak). *A következő mátrixok lépcsős alakúak:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gauss-módszer A *Gauss-módszer*, más néven *Gauss-kiküszöbölés* vagy *Gauss-elimináció* a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy módszere. Lényege, hogy a lineáris egyenletrendszer bővített mátrixát elemi sorműveletekkel lépcsős alakra hozzuk, és abból visszahelyettesítéssel meghatározzuk a megoldás általános alakját. A Gauss-módszer könnyen algoritmizálható, ha sorban haladunk az oszlopokon. A módszerre láttunk már példát, ilyen volt a 2.26. példa első megoldása. Most lássunk két további példát.

2.34. PÉLDA (Gauss-módszer, egy megoldás). *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-módszerrel:*

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2x + 2y + 3z &= 2 \\ x + 3y + 3z &= 4 \\ x + 2y + z &= 5 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Írjuk fel az egyenletrendszer bővített mátrixát, és oszloponként haladva küszöböljük ki – nullázzuk ki – a főelemek alatti elemeket!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{S_2-2S_1\\ S_3-S_1\\ S_4-S_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{S_4-\frac{1}{2}S_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{S_4-\frac{3}{2}S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2y + z &= 4 \\ -z &= 2 \end{aligned}$$

A harmadik egyenletből $z = -2$, ezt a másodikba helyettesítve $y = 3$, ezeket az elsőbe helyettesítve kapjuk, hogy $x = 1$, azaz az egyetlen megoldás $(x, y, z) = (1, 3, -2)$. □

Mit csinálunk akkor, ha a lépcsős alak szerint kevesebb a főelemek, mint az oszlopok száma? Egyelőre bevezetünk két elnevezést, melyek jelentése hamarosan világos lesz: az egyenletrendszer azon változó-it, melyek főelemek oszlopaihoz tartoznak, *kötött változóknak*, míg az összes többi változót *szabad változónak* nevezzük.

2.35. PÉLDA (GAUSS-MÓDSZER, VÉGTELEN SOK MEGOLDÁS). *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-módszerrel:*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 &= 1 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Írjuk fel az egyenletrendszer bővített mátrixát, és oszloponként haladva küszöböljük ki a főelemek alatti elemeket!

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[S_3-3S_1]{S_2-S_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{S_3-2S_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 1 \\ 2x_3 + x_4 &= -1 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer kötött változói a lépcsős alak főoszlopaihoz tartozó változók, azaz x_1 és x_3. A szabad változók: x_2, x_4, x_5. A szabad változóknak tetszőleges értékeket adhatunk, a kötöttek értéke kifejezhető velük. Legyen például a szabad változók értéke $x_2 = s$, $x_4 = t$, $x_5 = u$. Ezek behelyettesítése után a fenti egyenletek közül először a másodikból kifejezzük x_3-at, majd azt behelyettesítjük az elsőbe, ahonnan kifejezzük az x_1-et, azaz a fenti egyenletekből kifejezzük a kötött változókat:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\ x_3 &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \end{aligned}$$

Innen az egyenletrendszer megoldása:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, t, u),$$

vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Később különösen ez utóbbi felírásmód lesz hasznos, melyben vektorok lineáris kombinációja szerepel. □

Világos, hogy ha a szabad változóknak tetszőleges értéket adhatunk, melyből a kötött változók egyértelműen kifejezhetők, akkor a fenti példában mutatott módszerrel az egyenletrendszer összes megoldását leírtuk. Az ilyen módon megadott megoldást az egyenletrendszer *általános megoldásának*, a konkrét paraméterértékekhez tartozó megoldásokat *partikuláris megoldásoknak* nevezzük. Például az előző példabeli egyenletrendszer egy partikuláris megoldása az $s = 0$, $t = 1$, $u = 2$ értékekhez tartozó

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2, 0, -1, 1, 2).$$

Lényeges e megoldási módban, hogy a bővített mátrixot lépcsős alakra tudtuk hozni. Vajon ez mindig sikerül?

2.36. TÉTEL (LÉPCSŐS ALAKRA HOZÁS). *Bármely mátrix elemi sorműveletekkel* lépcsős *alakra hozható.*

BIZONYÍTÁS. Tekintsünk egy tetszőleges $m \times n$-es mátrixot. A következő eljárás egyes lépéseiben e mátrixnak le fogjuk takarni egy-egy sorát vagy oszlopát. Az egyszerűség kedvéért a letakarás után keletkezett mátrix sorainak és oszlopainak számát ismét m és n fogja jelölni, a_{ij} pedig a letakarások után maradt mátrix i-edik sorának j-edik elemét.

1. Ha az első oszlopban csak 0 elemek állnak, takarjuk le ezt az oszlopot, és tekintsük a maradék mátrixot. Ha ennek első oszlopában ismét csak 0 elemek vannak, azt is takarjuk le, és ezt addig folytassuk, míg egy olyan oszlopot nem találunk, amelyben van nem 0 elem. Ha ilyen oszlopot nem találunk, az eljárásnak vége, a mátrix lépcsős alakú.
2. Ha az első oszlop első sorában álló elem 0, akkor cseréljük ki e sort egy olyannal, melynek első eleme nem 0. Így olyan mátrixot kaptunk, amelyben $a_{11} \neq 0$.
3. Tekintsük az i-edik sort $i = 2$-től $i = m$-ig. Ha az i-edik sor első eleme $a_{i1} \neq 0$, akkor az első sor $-a_{i1}/a_{11}$-szeresét adjuk hozzá, azaz hajtsuk végre az $S_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} S_1$ elemi átalakítást. Mivel $a_{i1} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{11} = 0$, ezért e lépés után az a_{11} alatti elemek mind 0-k lesznek.
4. A fenti átalakítás után takarjuk le az első sort és az első oszlopot. Ha ekkor nem marad a mátrixban több sor, vége az eljárásnak, a korábban letakart sorokat feltárva megkaptuk a lépcsős alakot. Egyébként ugorjunk vissza az 1. lépéshez, és folytassuk az eljárást.

Világos, hogy ez az eljárás véges sok lépésben véget ér, melynek eredményeként eljutunk az eredeti mátrix egy lépcsős alakjához. □

Egy *inhomogén lineáris egyenletrendszerhez tartozó homogén lineáris egyenletrendszeren* azt a homogén egyenletrendszert értjük, melyet az inhomogénből a konstans tagok 0-ra változtatásával kapunk.

2.37. PÉLDA (HOMOGÉN LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA). *Oldjuk meg a 2.35. példabeli egyenletrendszerhez tartozó*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszert.

MEGOLDÁS. Mivel homogén lineáris egyenletrendszerről van szó, a megoldáshoz szükségtelen a bővített mátrixot használni, hisz annak utolsó oszlopa csak nullákból áll, így az elemi sorműveletek közben nem változik. Az együtthatómátrix lépcsős alakja ugyanazokkal a sorműveletekkel megkapható, mint a 2.35. példa megoldásában, azaz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Innen a megoldás is ugyanúgy kapható meg, sőt, ugyanaz a lineáris kombináció szerepel benne a konstans tagok nélkül:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2}t, t, u),$$

vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A homogén és inhomogén egyenletrendszerek e példából sejthető kapcsolatára még visszatérünk a 3.17. tételben. □

Végül egy alkalmazás:

2.38. PÉLDA (SÍKOK METSZÉSVONALÁNAK MEGHATÁROZÁSA). *Határozzuk meg az alábbi két sík metszésvonalának explicit (paraméteres) alakját!*

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 3x + 4y &= 2 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. A fenti egyenletekkel megadott két sík metszésvonalának meghatározásához, pontosabban a metszésvonal explicit, paraméteres egyenletrendszerének felírásához egyszerűen meg kell oldani a két egyenletből álló egyenletrendszert:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\3&4&0&2\end{array}\right]\xrightarrow{S_2-3S_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&-3&-1\end{array}\right]\longrightarrow\begin{aligned}x+y+\ z&=\ \ 1\\ y-3z&=-1\end{aligned}$$

Ebből $z=t$ paraméterválasztással $y=-1+3t$ és $x=2-4t$, azaz

$$(x,y,z)=(-4t+2,3t-1,t)=(2,-1,0)+t(-4,3,1),$$

vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-4\\3\\1\end{bmatrix}.$$ □

Redukált lépcsős alak A 2.26. példa második megoldási módszerében átlós alakra hoztuk az együtthatómátrixot, azaz nem elégedtünk meg azzal, hogy a főelemek alatt kinulláztunk minden együtthatót, hanem a főelemeket 1-re változtattuk a sor beszorzásával, és a főelemek fölött is kinulláztunk (elimináltunk) minden elemet.

2.39. definíció (Redukált lépcsős alak). *Egy mátrix* redukált lépcsős, *vagy* redukált sorlépcsős alakú, *ha kielégíti a következő feltételeket:*

1. *lépcsős alakú;*
2. *minden főelem egyenlő* 1*-gyel;*
3. *a főelemek oszlopaiban a főelemeken kívül minden elem* 0*;*

A főelemet itt vezéregyesnek *vagy* vezető egyesnek *is szokás nevezni.*

2.40. példa (Redukált lépcsős alak). *A következő mátrixok redukált lépcsős alakúak:*

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&-2&0&-4\\0&0&1&6\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Minden valós, vagy racionális elemű mátrix redukált lépcsős alakra hozható, azonban az egészegyütthatós mátrixok általában nem, ha az egészeken belül akarunk maradni. Azonban az egészegyütthatós mátrixok is redukált lépcsős alakra hozhatók a racionálisok számkörében. A kiküszöbölés lépéseinek követésére használható a SagePlayer redukált lépcsős alak című szemléltető munkalapja.

2.41. PÉLDA (REDUKÁLT LÉPCSŐS ALAKRA HOZÁS). *Hozzuk redukált lépcsős alakra az*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixot!

MEGOLDÁS. Egy lehetséges megoldás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_3-2S_1]{S_2-S_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}S_2}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3+4S_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1-3S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Egy másik lehetséges megoldás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1\leftrightarrow S_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_3-2S_1]{S_2-S_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}S_2}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1-S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bár különböző úton, de mindkétszer azonos eredményre jutottunk. Valóban, hamarosan be fogjuk látni, hogy a redukált lépcsős alak egyértelmű, míg e példából is látjuk, hogy a lépcsős alak nem: a megadott mátrixnak a megoldás során négy különböző lépcsős alakját is előállítottuk (az első megoldás utolsó két mátrixa és a második megoldás utolsó három mátrixa lépcsős alakú). □

Gauss – Jordan-módszer A *Gauss – Jordan-módszer* (*Gauss – Jordan-kiküszöbölés*, *Gauss – Jordan-elimináció*) a lineáris egyenletrendszerek egy megoldási módszere. Lényege, hogy a lineáris egyenletrendszer bővített mátrixát elemi sorműveletekkel *redukált* lépcsős alakra hozzuk. Ebből az alakból azonnal leolvasható a megoldás. Adjunk új megoldást a Gauss-módszernél bemutatott egyenletrendszerekre.

2.42. PÉLDA (GAUSS – JORDAN-MÓDSZER, EGY MEGOLDÁS). *Oldjuk meg a 2.34. példában felírt egyenletrendszert Gauss – Jordan-módszerrel!*

MEGOLDÁS. Felírjuk az egyenletrendszer bővített mátrixát, és a 2.34. példában látott módon eljutunk a lépcsős alakhoz, majd folytatjuk, először beszorozzuk a sorokat a főátlóbeli elem reciprokával, majd a harmadik oszlopot, végül a másodikat kinullázzuk:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\cdots} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-S_3]{1/2S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[S_1-2S_3]{S_2-\frac{1}{2}S_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{S_1-S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 3 \\ z & = & -2 \end{array}$$

Tehát az egyenletrendszer egyetlen megoldása $(x, y, z) = (1, 3, -2)$. □

2.43. PÉLDA (GAUSS–JORDAN-MÓDSZER, VÉGTELEN SOK MEGOLDÁS). *Oldjuk meg a 2.35. példabeli*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszert Gauss–Jordan-módszerrel!

MEGOLDÁS. A 2.35. példában eljutottunk egy lépcsős alakig. Az eljárást folytatjuk, míg a redukált lépcsős alakra nem jutunk.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\cdots} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[S_1-S_2]{1/2S_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_4 + x_5 &= \frac{3}{2} \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Végezzük el az $x_2 = s$, $x_4 = t$, $x_5 = u$ helyettesítést, az x_1 és x_3 változók azonnal kifejezhetők. Így a megoldás:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, t, u),$$

vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Természetesen ugyanazt a megoldást kaptuk, mint a 2.35. példában. □

A redukált lépcsős alak egyértelműsége Fontos következményei vannak a következő tételnek:

2.44. TÉTEL (A REDUKÁLT LÉPCSŐS ALAK EGYÉRTELMŰ). *Minden mátrix redukált lépcsős alakra hozható, amely egyértelmű.*

BIZONYÍTÁS. A redukált lépcsős alak létezését már beláttuk, az egyértelműségre indirekt bizonyítást adunk. Tegyük fel, hogy van egy olyan mátrix, mely elemi sorműveletekkel két különböző redukált lépcsős alakra hozható. Jelölje ezeket $\mathbf{R}$ és $\mathbf{S}$. Mivel mindketten ugyanazzal a mátrixszal ekvivalensek, elemi sorműveletekkel egymásba alakíthatóak, vagyis egymással is ekvivalensek. Válasszuk ki oszlopaik közül azt a balról első oszlopot, melyben különböznek, valamint az összes előttük álló vezéroszlopot. Az így kapott mátrixokat jelölje $\hat{\mathbf{R}}$ és $\hat{\mathbf{S}}$. Tehát $\hat{\mathbf{R}} \neq \hat{\mathbf{S}}$, mert különböznek az utolsó oszlopukban. Például, ha

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{9} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

akkor

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & \boxed{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ez az oszlop, melyben különböznek, nem lehet az első oszlop, mert ha az a zérusvektor az egyik mátrixban, akkor a sorekvivalencia miatt a másikban is az lenne, egyébként pedig ez az oszlop mindenképp az első helyen 1-est, alatta 0-kat tartalmaz.

Tekintsük az így kapott $\hat{\mathbf{R}}$, $\hat{\mathbf{S}}$ mátrixokat egy-egy egyenletrendszer bővített együtthatómátrixának. Ezek általános alakja tehát a következő:

$$\hat{\mathbf{R}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & r_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{vagy} \quad \hat{\mathbf{R}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

és

$$\hat{\mathbf{S}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{vagy} \quad \hat{\mathbf{S}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Mivel oszlopok kihagyása nem változtat a sorekvivalencián – hisz elemi sorműveletekben műveletet csak egy oszlopon belül végzünk –, ezért az $\hat{\mathbf{R}}$ és $\hat{\mathbf{S}}$ mátrixok ekvivalensek, azaz a hozzájuk tartozó két egyenletrendszernek ugyanaz a megoldása. Ez csak úgy lehet, ha vagy minden $i = 1, \dots, k$ indexre $r_i = s_i$, vagy egyik egyenletrendszer sem oldható meg, azaz mindkét esetben azt kaptuk, hogy $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{S}}$, ami ellentmondás. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy a kiinduló $\mathbf{R} \neq \mathbf{S}$ feltevés helytelen volt, tehát $\mathbf{R} = \mathbf{S}$. (E bizonyítás Holzmann[4] interneten publikált cikkén alapul). □

[4] Wolf Holzmann. Uniqueness of reduced row echelon form. `http://www.cs.uleth.ca/~holzmann/notes/reduceduniq.pdf`, 2002

Mivel a redukált lépcsős alak egyértelmű, definiálhatunk egy függvényt, mely minden mátrixhoz annak ezt az alakját rendeli. Az $\operatorname{rref}(\mathbf{A})$ jelölést mi arra a függvényre fogjuk alkalmazni, mely egy $m \times n$-es mátrixhoz a redukált lépcsős alakjának a zérussorok elhagyásával kapott alakját rendeli. Például

$$\operatorname{rref}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Szimultán egyenletrendszerek Gyakori feladat az alkalmazásokban, hogy sok olyan egyenletrendszert kell megoldani, amelyek csak a konstans tagokban térnek el egymástól. A kiküszöböléses módszerekkel ezek egyszerre is megoldhatók alig több erőforrás felhasználásával, mint ami egyetlen egyenletrendszer megoldásához szükséges.

2.45. DEFINÍCIÓ (SZIMULTÁN EGYENLETRENDSZEREK). *Több egyenletrendszer halmazát* szimultán egyenletrendszernek *nevezünk, ha együtthatómátrixaik azonosak.*

2.46. PÉLDA (SZIMULTÁN EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA). *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!*

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + 3y + 2z &= 7 \\ 2x + 2y + 3z &= 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u + v + w &= 3 \\ 2u + 3v + 2w &= 7 \\ 2u + 2v + 3w &= 7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} r + s + t &= 0 \\ 2r + 3s + 2t &= 0 \\ 2r + 2s + 3t &= 1 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Mivel e három egyenletrendszer együtthatómátrixa azonos, a bal oldal átalakítását elég egyszer elvégezni, a jobb oldalak átalakítását pedig vele együtt. Ehhez a szimultán egyenletrendszerre a következő bővített mátrixot érdemes képezni:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 7 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 7 & 1 \end{array}\right]$$

A megoldáshoz használjuk a Gauss – Jordan-módszert:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 7 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 7 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{S_2 - 2S_1 \\ S_3 - 2S_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{S_1 - S_2 \\ S_1 - S_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Ebből leolvasható mindhárom egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$ □

Ha tudjuk, hogy több egyenletrendszerből álló szimultán egyenletrendszerről van szó, mindegyik egyenletrendszerben használhatjuk ugyanazokat a változókat.

2.47. PÉLDA (SZIMULTÁN EGYENLETRENDSZER BŐVÍTETT MÁTRIXA). *Oldjuk meg azt a szimultán egyenletrendszert, melynek bővített mátrixa*

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Megoldás. A Gauss – Jordan-módszer lépései:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{S_2-\frac{5}{2}S_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{2S_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{S_1-S_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}S_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right]. \qquad \square$$

*Kiküszöbölés $\mathbb{Z}_p$-ben** Ha p prím, akkor a modulo p maradékosztályok közti műveletek rendelkeznek minden olyan tulajdonsággal, melyet a kiküszöbölés során a valós számok körében használtunk. Ennek következtében a Gauss- és Gauss – Jordan-módszerek minden további nélkül használhatók $\mathbb{Z}_p$ fölötti egyenletrendszerekre is. (Lásd még az 515. oldalon az algebrai testről írtakat.)

2.48. példa (Egyenletrendszer $\mathbb{Z}_2$ fölött). *4-bites kódszavakat küldünk, bitjeit jelölje a, b, c és d. Hibajavító kódot készítünk úgy, hogy minden kódszó végére három paritásbitet teszünk, nevezetesen a $b+c+d$, $a+c+d$ és $a+b+d$ bitet. Az összeadás itt természetesen $\mathbb{Z}_2$ fölött értendő. Például a* 0110 *kódszó helyett a* 0110011 *kódszót küldjük. Egy üzenetben az egyik ilyen 7-bites kódszó első 4 bitjét a vevő szerkezet bizonytalanul érzékeli, amit kapunk, az a $(?,?,?,?,1,0,1)$ kódvektor. Mi lehetett az eredeti üzenet, ha az utolsó 3 bit biztosan jó?*

Megoldás. Az a, b, c és d bitek ismeretlenek, csak annyit tudunk, hogy

$$\begin{aligned} b+c+d &= 1 \\ a+\phantom{b+{}} c+d &= 0 \\ a+b+\phantom{c+{}} d &= 1 \end{aligned}$$

Oldjuk meg ezt az egyenletrendszert Gauss – Jordan kiküszöböléssel $\mathbb{Z}_2$ fölött. Ne felejtsük, hogy $\mathbb{Z}_2$-ben $1+1=0$, így $1=-1$, azaz a kivonás nem különbözik az összeadástól.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{S_3+S_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{S_3+S_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[S_1+S_3]{S_2+S_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{aligned} a + c &= 0 \\ b + c &= 1 \\ d &= 0 \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből $d=0$. A szabad változó c, legyen $c=s$. Így a második egyenletből $b=1+c$, azaz $b=1+s$ és az elsőből $a=c$, azaz $a=s$. A megoldás általános alakban $(a,b,c,d)=(s,1+s,s,0)$, azaz

$(a, b, c, d) = (0, 1, 0, 0) + s(1, 1, 1, 0)$. Az $s = 0$ és az $s = 1$ értékekhez tartozó megoldások tehát: $(0, 1, 0, 0)$ és $(1, 0, 1, 0)$.

Ha az egyenletrendszert vektoregyenletnek tekintjük, akkor az első megoldás azt mutatja, hogy az együtthatómátrix második oszlopa megegyezik a jobb oldallal (és valóban), a második megoldás pedig azt, hogy az első és a harmadik oszlop összege a jobb oldalt adja.

Megjegyezzük e kódról, melyet $[7, 4, 3]_2$ bináris *Hamming-kódnak* neveznek, hogy a kód 16 szóból áll, bármely szavának bármely 4 bitje egyértelműen meghatározza a maradék hármat. Így ha legföljebb 3 bit megváltozik egy szóban, akkor az kimutatható, és ha csak egy bit változik meg, az kijavítható. □

2.49. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER $\mathbb{Z}_5$ FÖLÖTT). *Oldjuk meg az alábbi két egyenletrendszert $\mathbb{Z}_5$ fölött.*

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \qquad & 2x + 3y &= 1 \\ 3x + 2y &= 4 \qquad & 3x + 4y &= 3 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. A számolás megkönnyítésére vagy készítsünk osztási táblát, vagy használjuk az 515. oldalon található A.8. ábra szorzástábláját.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{3S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{S_2 - 3S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

azaz az egyenletrendszernek több megoldása van. Itt ez nem azt jelenti, hogy végtelen sok, hanem azt, hogy legalább egy paraméter végigfut $\mathbb{Z}_5$ összes elemén. Szabad változó az y, legyen $y = s$, így $x = 3 - 4s = 3 + s$, tehát $(x, y) = (3 + s, s)$, azaz a vektorok mátrixjelölésével:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{Z}_5$$

Mivel $\mathbb{Z}_5$-nek öt eleme van, ezért s-nek is ennyi értéke lehet, azaz az első egyenletrendszer összes megoldása $(3, 0)$, $(4, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 4)$. A másik egyenletrendszer megoldása:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{3S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{S_2 - 3S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{3S_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Így a megoldás $(x, y) = (0, 2)$. □

Feladatok

2.17.• LÉPCSŐS ALAK: IGAZ – HAMIS Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

a) Egy mátrix minden lépcsős alakjában ugyanannyi nemzérus sor van.
b) Egy mátrix minden lépcsős alakjában ugyanannyi főoszlop (bázisoszlop) van.
c) Minden valós mátrixnak van lépcsős alakja, ami egyértelmű.
d) Különböző mátrixoknak különböző a redukált lépcsős alakjuk.
e) Ha egy mátrix elemi sorműveletekkel egy másikba vihető, akkor redukált lépcsős alakjuk megegyezik.

2.18.• EGYENLETRENDSZEREK: IGAZ – HAMIS Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

a) A bővített mátrixon végrehajtott elemi sorműveletek közben az egyenletrendszer megoldáshalmaza nem változik.
b) Egy lineáris egyenletrendszer nem konzisztens, ha több egyenletből áll, mint ahány ismeretlenes.
c) Ha egy valósegyütthatós lineáris egyenletrendszernek van két különböző megoldása, akkor végtelen sok is van.
d) Egy homogén lineáris egyenletrendszer mindig konzisztens.

Határozzuk meg valamely lépcsős alakját, majd a redukált lépcsős alakját az alábbi mátrixoknak!

2.19. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

2.20. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Ekvivalensek-e az alábbi egyenletrendszerek?

2.21. $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 1 \\ 2x + 3y - 3z = -1 \\ 4x + 2y \phantom{{}-3z} = 8 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ 3x + 3y - 2z = 3 \\ 5x - 3y + 2z = 5 \end{cases}$

2.22. $\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 3 \\ 5x \phantom{{}+2y} - 4z = 9 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x - y - 3z = 3 \\ 5x + 5y + 7z = 3 \end{cases}$

2.23. Csak egész számokkal számolva megoldható-e az az egyenletrendszer, melynek bővített mátrixa a következő:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 3 & 7 \\ 11 & 7 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad$ *b)* $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 3 & 7 \\ 11 & 7 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

2.24.• A három elemi sorművelet egyike elvégezhető a másik kettő segítségével is. Melyik és hogyan?

Megoldás a gyakorlatban

Bár e szakasz tartalma elsősorban nem a lineáris algebra, hanem a numerikus analízis témakörébe tartozik, ismerete elengedhetetlen annak, aki a gyakorlatban lineáris algebrai eszközöket alkalmaz. Először a Gauss- és Gauss–Jordan-kiküszöbölés műveletigényét, majd numerikus megbízhatóságának kérdését vizsgáljuk. Ezután az iterációs módszerek lényegét vázoljuk, melyek alkalmazásakor az együtthatómátrix nem változik, így a számítási hibák sem halmozódnak. Ráadásul e módszerek a ritka mátrixokat sem „rontják el”, mint a Gauss-módszer, mely sok zérust ír fölül.

A kiküszöbölés műveletigénye Ahhoz, hogy a lineáris egyenletrendszerek különböző megoldási módszereit össze tudjuk hasonlítani, azt is tudnunk kell, mennyi a műveletigényük. A flop mértékegységről részletesen a függelékben írunk az 511. oldalon.

2.50. TÉTEL (A KIKÜSZÖBÖLÉS MŰVELETIGÉNYE). *A Gauss- és a Gauss–Jordan-módszer műveletigénye egy n-ismeretlenes, n egyenletből álló egyenletrendszer esetén egyaránt*

$$\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5n}{6}\ \text{összeadás/kivonás},\quad \frac{n^3}{3}+n^2-\frac{n}{3}\ \text{szorzás/osztás.}$$

azaz összesen

$$\frac{2}{3}n^3+\frac{3}{2}n^2-\frac{7}{6}n\,\text{flop},$$

azaz jó közelítéssel $2n^3/3$ *flop.*

BIZONYÍTÁS. Először felelevenítünk két elemi összefüggést, amire a bizonyításban szükség van:

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},\quad 1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

A továbbiakban feltételezzük, hogy a kiküszöbölés során a főátlóba kerülő elemek egyike sem 0. A Gauss-módszernél a főátló alatti elemek eliminálásához $\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{3}n$ összeadás és $\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2-\frac{5}{6}n$ szorzás szükséges. A visszahelyettesítés $\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$ összeadásból és $\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$ szorzásból áll. Ha a Gauss–Jordan-módszernél a főátló alatti elemek kiküszöbölése mellett a főátló elemeit is 1-re változtatjuk, az $\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{3}n$ összeadás mellett $\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$ szorzás szükséges. A főátló feletti elemek eliminálásához $\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$ összeadás és ugyanennyi szorzás kell. A számítások részletezését az olvasóra hagyjuk. □

Numerikusan instabil egyenletrendszerek A gyakorlati feladatokban gyakran mérési eredményekkel, így nem pontos adatokkal dolgozunk.

2.51. PÉLDA (INSTABIL EGYENLETRENDSZER). *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!*

$$\begin{aligned} 6.73x - 8.97y &= 5.61 \\ 4.79x - 6.39y &= 3.99 \end{aligned}$$

Mutassuk meg, hogy az együtthatók 0.01*-dal való megváltoztatása a megoldások nagy megváltozását okozhatja, sőt az is elérhető, hogy az egyenletrendszernek ne legyen, vagy épp végtelen sok megoldása legyen!*

MEGOLDÁS. Az egyenletrendszer megoldása: $x = 1.5$, $y = 0.5$. Az első egyenletben az x együtthatóját újra mérjük, és másodszorra egy századdal kevesebbnek, 6.72-nek adódik. Oldjuk meg ezt az egyenletrendszert is! Az eredmény meglepő módon nagyon messze van az előzőtől: $x \approx -2.26$, $y \approx -2.32$. Újabb mérés az y együtthatóját -8.96-nak mutatja. E két együttható egy századdal való megváltozása után a megoldás messze van mindkét előző eredménytől: $x \approx 4.35$, $y \approx 2.64$. Ha végül az első egyenlet konstans tagját is megváltoztatjuk egy századdal 5.62-re, akkor $x \approx 7.21$, $y \approx 4.78$ lesz az eredmény, ha pedig 5.60-ra, akkor – csemegeként – ismét a kerek $x = 1.5$, $y = 0.5$ értékeket kapjuk.

A fenti egyenletrendszeren tovább változtatva az együtthatókat az is elérhető, hogy végtelen sok megoldása legyen:

$$\begin{aligned} 6.72x - 8.96y &= 5.60 \\ 4.80x - 6.40y &= 4.00 \end{aligned}$$

ugyanis itt a két egyenlet egymás konstansszorosa. Ha pedig a második egyenlet konstans tagját visszaírjuk 3.99-re, egy ellentmondó egyenletrendszert kapunk. □

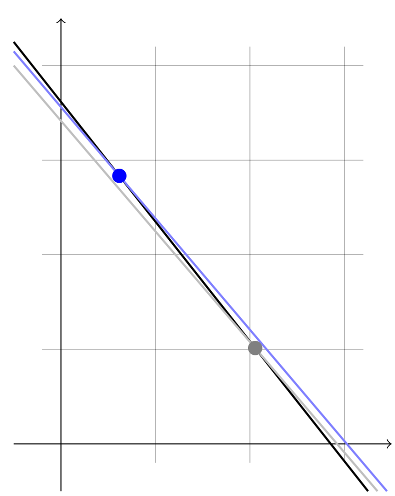
Ilyen megbízhatatlan eredményekkel a gyakorlatban semmit nem lehet kezdeni!

Az olyan egyenletrendszert, melyben az együtthatók vagy a konstans tagok kis változása a megoldásban nagy változást okoz, *numerikusan instabilnak* vagy *rosszul kondicionáltnak* nevezzük. Egyébként *numerikusan stabil*, illetve *jól kondicionált* egyenletrendszerről beszélünk.

Világos, hogy a fentiek nem precíz matematikai fogalmak. Később precízen definiálva számmal fogjuk mérni a kondicionáltság fokát, de azt, hogy egy adott egyenletrendszer megoldásai elfogadhatóak-e vagy nem, csak a feladat döntheti el.

A numerikus instabilitás okát szemlélteti a 2.12. ábra. Kétváltozós egyenletrendszerek esetén, ha a két egyenes grafikonja „közel" van egymáshoz, azaz majdnem egybe esnek, akkor kis változások az egyeneseken messze vihetik a metszéspontot, de párhuzamossá is tehetik a két egyenest.

Ha a gyakorlatban numerikusan instabil egyenletrendszerrel találkozunk, vizsgáljuk meg, hogy az egyenleteink közti „majdnem" lineá-



2.12. ábra: Instabil egyenletrendszer, melyben az egyenletek együtthatóinak kis megváltoztatása a megoldás nagy megváltozását okozza.

ris összefüggőség mögött nem valódi lineáris összefüggőség van-e kis mérési hibával.

Részleges főelemkiválasztás A következő példákban lebegőpontos aritmetikát használunk. A számításokat úgy kell elvégezni, hogy az adott pontosságnak megfelelően minden részeredményt p értékes jegyre kerekítünk.

2.52. PÉLDA (GAUSS-MÓDSZER LEBEGŐPONTOS SZÁMOKKAL). *Oldjuk meg az alábbi – numerikusan stabil – egyenletrendszert pontosan, majd 3 értékes jegy pontossággal számolva.*

$$\begin{aligned} 10^{-4}x + y &= 2 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Pontosan számolva

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{S_2 - 10^4 S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & -1-10^4 & -2\cdot 10^4 \end{array}\right]$$

amiből az eredmény $x = y = \frac{2\cdot 10^4}{1+10^4}$. Igazolható, hogy az egyenletrendszer numerikusan stabil, ami azt jelenti, hogy például 10^{-4} helyébe 0-t helyettesítve, vagyis kicsit változtatva egy együtthatót, a kapott

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

egyenletrendszer megoldása csak kicsit különbözik az előzőtől: $x = y = 2$. Végezzük most el a Gauss-kiküszöbölést 3 értékes jeggyel számolva:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{S_2 - 10^4 S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & -1-10^4 & -2\cdot 10^4 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & -10^4 & -2\cdot 10^4 \end{array}\right],$$

ahol a közelítésnél a $\mathrm{fl}(-1-10^4) = -10^4$ összefüggést használtuk. Az így kapott egyenletrendszernek viszont $x = 0$, $y = 2$ a megoldása, ami nagyon messze van az eredeti egyenletrendszer megoldásától! Most végezzünk egy apró változtatást: először cseréljük fel a két egyenletet!

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 10^{-4} & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{S_2 - 10^{-4} S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1+10^{-4} & 2 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

amelynek megoldása $x = y = 2$, ami nagyon közel van a pontos megoldáshoz! □

Mi az oka a két megoldás közti különbségnek, és fel tudnánk-e használni minél jobb megoldás megtalálásában?

Mindkét megoldásban az első egyenlet konstansszorosát hozzáadtuk a második egyenlethez, de az első esetben a kisebb, a másodikban az első oszlop nagyobb elemét választottuk főelemnek. Amikor a kisebbet választottuk, akkor az első sort egy kis számmal osztottuk, vagyis repciprokával – egy nagy számmal – szoroztuk, és ezt adtuk a második sorhoz. A nagy számmal való beszorzás következtében a második egyenlet együtthatóit „elnyomták” e nagy számok, nagyon megváltoztatva az egyenletet, aminek következtében a megoldások is nagyon megváltoztak! A $\mathrm{fl}(-1-10^4) = -10^4$ kerekítés hatása, vagyis a -1 „eltüntetése”, ekvivalens azzal, mintha az eredeti egyenletrendszer helyett a következőt kéne megoldani:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

És ennek valóban $x = 0$, $y = 2$ a megoldása! Amikor viszont az első oszlop nagyobbik elemét választottuk főelemnek, a sort egy kis számmal kellett beszorozni, és ezt hozzáadni a másik sorhoz, vagyis kerekítéskor az eredeti egyenlet együtthatói megmaradtak, az egyenletrendszer kevésbé torzult. Ennek alapján megfogalmazható egy széles körben elterjedt szabály: a Gauss-féle kiküszöbölési eljárás során, lebegőpontos adatokkal dolgozva minden oszlopban a szóbajöhető elemek közül – sorcserék segítségével – mindig a legnagyobb abszolút értékűt válasszuk főelemnek! E módszert *részleges főelemkiválasztásnak*, illetve *részleges pivotálásnak* nevezik.

Bizonyos – a gyakorlatban ritkán előforduló – esetekben jobb eredmény kapható a *teljes főelemkiválasztás* módszerével. Ekkor főelemnek az összes még hátralévő elem abszolút értékben legnagyobbikát választjuk. Itt oszlopcserékre is szükség van, és műveletigényesebb is ez az eljárás, ezért ritkán alkalmazzák.

2.53. PÉLDA (RÉSZLEGES FŐELEMKIVÁLASZTÁS). *Részleges főelemkiválasztással hozzuk lépcsős alakra az alábbi mátrixot!*

$$\begin{bmatrix} 1.8 & 3.0 & 3.0 & 3.7 & 7.5 \\ 3.6 & 3.2 & 3.6 & 6.2 & 7.8 \\ 7.2 & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 2.4 & 5.4 & 5.2 & 2.6 & 5.2 \end{bmatrix}$$

MEGOLDÁS. Az első oszlop legnagyobb eleme a harmadik sorban van, így az első és a harmadik sor cseréjével kezdünk:

$$\xrightarrow{S_1\leftrightarrow S_3}\begin{bmatrix}\mathbf{7.2}&3.6&4.8&2.4&1.2\\3.6&3.2&3.6&6.2&7.8\\1.8&3.0&3.0&3.7&7.5\\2.4&5.4&5.2&2.6&5.2\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{S_2-S_1/2\\S_3-S_1/4\\S_4-S_1/3}}\begin{bmatrix}\mathbf{7.2}&3.6&4.8&2.4&1.2\\0.0&1.4&1.2&5.0&7.2\\0.0&2.1&1.8&3.1&7.2\\0.0&\mathbf{4.2}&3.6&1.8&4.8\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_2\leftrightarrow S_4}\begin{bmatrix}\mathbf{7.2}&3.6&4.8&2.4&1.2\\0.0&\mathbf{4.2}&3.6&1.8&4.8\\0.0&2.1&1.8&3.1&7.2\\0.0&1.4&1.2&5.0&7.2\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{S_3-S_2/2\\S_4-S_2/3}}\begin{bmatrix}\mathbf{7.2}&3.6&4.8&2.4&1.2\\0.0&\mathbf{4.2}&3.6&1.8&4.8\\0.0&0.0&0.0&2.2&4.8\\0.0&0.0&0.0&\mathbf{4.4}&5.6\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_3\leftrightarrow S_4}\begin{bmatrix}\mathbf{7.2}&3.6&4.8&2.4&1.2\\0.0&\mathbf{4.2}&3.6&1.8&4.8\\0.0&0.0&0.0&\mathbf{4.4}&5.6\\0.0&0.0&0.0&2.2&4.8\end{bmatrix}\xrightarrow{S_4-S_3/2}\begin{bmatrix}\mathbf{7.2}&3.6&4.8&2.4&1.2\\0.0&\mathbf{4.2}&3.6&1.8&4.8\\0.0&0.0&0.0&\mathbf{4.4}&5.6\\0.0&0.0&0.0&0.0&\mathbf{2.0}\end{bmatrix}\quad\square$$

Skálázás A részleges főelemkiválasztásban mindig az oszlop legnagyobb elemét választottuk. Nem lehet egy elemet nagyobbá tenni, és ezzel az egész módszert elrontani úgy, hogy egy sorát egyszerűen beszorozzuk?

2.54. PÉLDA (SOR SZORZÁSA). *A 2.52. példában szorozzuk meg az első egyenletet* 10^5*-nel, azaz a kisebb elemből csináljunk nagyot, és ezt az egyenletrendszert is oldjuk meg részleges főelemkiválasztással.*

$$\begin{aligned}10x+10^5y&=2\cdot10^5\\x-\quad y&=\quad 0\end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Egy egyenlet beszorzása egy nemzérus számmal ekvivalens átalakítás, így ennek az egyenletrendszernek is $x = y = \frac{2\cdot10^4}{1+10^4}$ a pontos megoldása. Ha 3 értékes jegyre számolunk, és alkalmazzuk a részleges főelemkiválasztás módszerét, akkor ismét rossz eredményt kapunk:

$$\left[\begin{array}{cc|c}10&10^5&2\cdot10^5\\1&-1&0\end{array}\right]\xrightarrow{S_2-\frac{1}{10}S_1}\left[\begin{array}{cc|c}10&10^5&2\cdot10^5\\0&-1-10^4&-2\cdot10^4\end{array}\right]\approx\left[\begin{array}{cc|c}10&10^5&2\cdot10^5\\0&-10^4&-2\cdot10^4\end{array}\right],$$

amiből $x=0$ és $y=2$. □

Hasonlóképp zavart okozhat az együtthatómátrix egy oszlopának beszorzása is, ami az egyenletrendszeren például úgy valósítható meg, ha egyik változó mértékegységét megváltoztatjuk. (Ha például a korábban kilométerben meghatározott ismeretlent milliméterben keressük, együtthatóját minden egyenletben 10^6-nal kell osztani.)

Az együtthatók ilyen „egyenetlenségeiből” származó számítási hibák csökkentésére a *skálázás* nevű gyakorlati módszer ajánlható. Ez a következő két skálázási szabály követéséből áll, mely a tapasztalatok szerint a gyakorlati feladatok nagy részében nagyon jó eredményt ad a részleges főelemkiválasztással együtt alkalmazva:

1. *Oszlopok skálázása:* Válasszunk a feladatban szereplő mennyiségeknek természetes mértékegységet, ezzel általában elkerülhetők az együtthatók közti tetemes nagyságrendi különbségek. Ezen kívül nincs szükség az oszlopok elemeinek beszorzására.
2. *Sorok skálázása:* Az egyenletrendszer $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ bővített mátrixának minden sorát osszuk el az $\mathbf{A}$ együtthatómátrix adott sorbeli legnagyobb abszolút értékű elemével. Így $\mathbf{A}$ minden sorának 1 a legnagyobb eleme.

Nem ismeretes olyan módszer, mely a lebegőpontos ábrázolás korlátai mellett hatékonyan megtalálná a lehető legpontosabb eredményt. Az elmélet és a tapasztalatok alapján sűrű, nem túlzottan nagy méretű egyenletrendszerekre a skálázott főelem kiválasztásos Gauss-módszer ajánlható. A ritka egyenletrendszerekre a következőkben ismertetendő iteratív módszerek általában jobb eredményt adnak.

Iteratív módszerek A továbbiakban is csak olyan egyenletrendszerekkel foglalkozunk, melyek n-ismeretlenesek és n egyenletből állnak, tehát melyek együtthatómátrixa négyzetes.

Az iteratív módszerek lényege, hogy olyan

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \dots$$

vektorsorozatot generálunk, mely az adott egyenletrendszer megoldásvektorához konvergál. Első pillanatra meglepőnek tűnhet egy végtelen sorozat generálásával keresni a megoldást, de mivel számításaink eleve csak véges pontosságúak, gyakran igen kevés lépésben elérhetjük a megkívánt pontosságot. Ráadásul a kerekítési hibák még növelhetik is a konvergencia sebességét.

A kiindulási pont – a matematika több más területén is gyümölcsöző módszer – a fixpontkeresés. Ennek lényegét egy egyváltozós függvény példáján mutatjuk be. Legyen f egy minden valós helyen értelmezett függvény, mely bármely két a és b pontot két olyan pontba visz, melyek távolsága a és b távolságának legföljebb a fele. Képletben:

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b - a|, \text{ azaz } \frac{|f(b) - f(a)|}{|b - a|} \leq \frac{1}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy f összes különbségi hányadosa legfeljebb $1/2$. A sokkal általánosabban megfogalmazható Banach-féle fixpont tétel szerint ekkor egyetlen olyan $\bar{x}$ pont létezik, hogy $\bar{x} = f(\bar{x})$, és ez megkapható úgy, hogy egy tetszőleges x_0 pontból kiindulva képezzük az

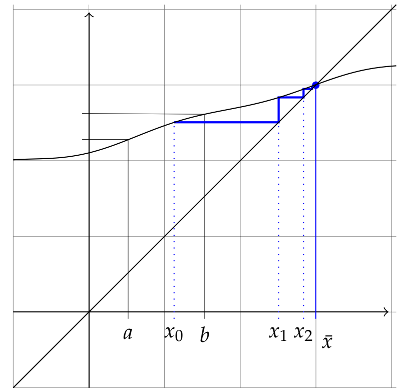
$$x_0,\ x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1), \dots,\ x_{k+1} = f(x_k), \dots$$

sorozatot, és vesszük a határértékét. Ekkor

$$\bar{x} = \lim_{k\to\infty} x_k.$$

A 2.13. ábra szemlélteti a fenti állítást. Az $1/2$-es szorzó kicserélhető tetszőleges 0 és 1 közé eső konstansra.

A Banach fixponttétel könnyen szemléltethető hétköznapi módon: képzeljük el, hogy egy nagyobb gumilapot néhányan körbeállva egy kerek asztal tetején széthúznak az asztal széléig, majd (most jön a leképezés!) visszaengedik eredeti állapotába. Ekkor igaz az, hogy az asztalon pontosan egy olyan pont van, mely fölött a gumilap helyben marad. E pont megkapható, ha kiválasztunk az asztalon egy tetszőleges P_0 pontot, és megnézzük, hogy a kinyújtott gumilap e fölötti pontja összehúzódáskor hová ugrik, legyen ez a P_1 pont az asztalon. A kinyújtott gumilap P_1 fölötti pontja összehúzódáskor az P_2 pont fölé ugrik, stb. Az így kapott pontsorozat a fixponthoz konvergál.



2.13. ábra: Egy függvény, mely bármely a és b pontot két olyan pontba visz, melyek távolsága a és b távolságának legföljebb a fele, így a függvény minden különbségi hányadosa abszolút értékben legföljebb $1/2$. E függvénynek pontosan egy fixpontja van, mely megkapható egy tetszőleges x_0 pontból induló $x_k = f(x_{k-1})$ sorozat határértékeként.

Jacobi-iteráció Az előző paragrafusban leírtakat követve megpróbáljuk az egyenletrendszert átrendezni úgy, hogy az $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$ alakú legyen, ahol $\mathbf{x}$ jelöli az ismeretlenek vektorát.

2.55. PÉLDA (JACOBI-ITERÁCIÓ). *Oldjuk meg a*

$$\begin{aligned} 4x - \ \ y &= \ \ 2 \\ 2x - 5y &= -8 \end{aligned}$$

egyenletrendszert, majd hozzuk $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$ alakra, és egy tetszőleges $\mathbf{x}_0$ vektorból indulva végezzünk az $\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k)$ formulával iterációt. Számoljunk 3 tizedes pontossággal. Hová tart az így kapott vektorsorozat?

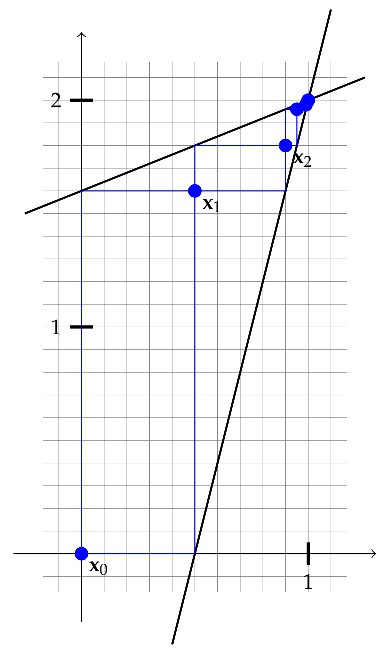
MEGOLDÁS. Az egyenletrendszert kiküszöböléssel megoldva kapjuk, hogy $\mathbf{x} = (1, 2)$ az egyetlen megoldás.

Hozzuk az egyenletrendszert $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$, azaz $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] = f\left(\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]\right)$ alakra. Erre több lehetőség is adódik. Ezek közül talán az a legkézenfekvőbb, hogy az első egyenletből az x-et, a másodikból y-t kifejezzük:

$$\begin{aligned} x &= \frac{y+2}{4} \\ y &= \frac{2x+8}{5} \end{aligned}$$

Válasszunk egy $\mathbf{x}_0$ vektort tetszőlegesen, legyen pl. $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$, azaz $x = y = 0$. A fenti képletekbe helyettesítve kapjuk, hogy $\mathbf{x}_1 = (\frac{0+2}{4}, \frac{0+8}{5}) = (0.5, 1.6)$. A további értékeket egy táblázatban adjuk meg:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$	$\mathbf{x}_6$	$\mathbf{x}_7$	$\mathbf{x}_8$
x	0	0.5	0.9	0.95	0.99	0.995	0.999	1.000	1.000
y	0	1.6	1.8	1.96	1.98	1.996	1.998	2.000	2.000



2.14. ábra: A Jacobi-iteráció szemléltetése

E példa esetén tehát a végtelen sorozat konvergensnek mutatkozott, de a kerekítési hiba folytán véges sok lépés után megtalálta a konvergenciapontot. □

Az általános eset hasonlóan írható le. Tegyük fel, hogy az

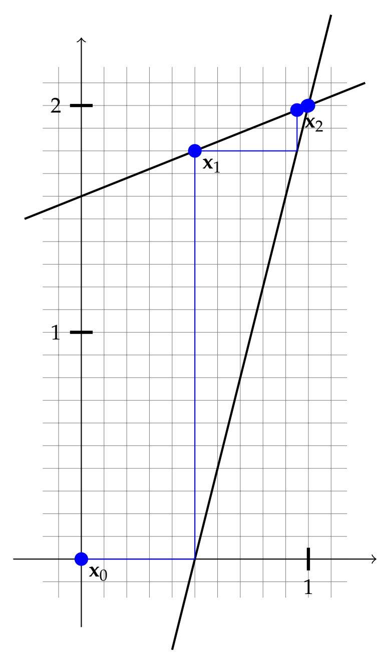
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

egyenletrendszer egyértelműen megoldható, és főátlójának minden eleme különbözik 0-tól. A *Jacobi-iteráció* menete tehát a következő. A k-adik egyenletből fejezzük ki az x_k változót:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 \qquad\quad - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1,n-1}x_{n-1} - a_{1n}x_n) \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 \qquad - \ldots - a_{2,n-1}x_{n-1} - a_{2n}x_n) \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1} \qquad). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Válasszunk az ismeretlenek $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektorának egy $\mathbf{x}_0$ kezdőértéket, pl. legyen $\mathbf{x}_0 = (0, 0, \ldots, 0)$. A (2.25) egyenletrendszer jobb oldalába helyettesítsük be $\mathbf{x}_0$ koordinátáinak értékét, a bal oldal adja $\mathbf{x}_1$ koordinátáit. Ezt a lépést ismételjük meg, generálva az $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$,... vektorokat addig, míg el nem érjük a megfelelő pontosságot.

Gauss – Seidel-iteráció A Jacobi-iteráció gyorsaságán könnyen javíthatunk, ha a (2.25) egy egyenletének jobb oldalába való behelyettesítés után a bal oldalon kapott változó értékét azonnal fölhasználjuk, nem várunk vele a ciklus végéig. Ezt a módosított algoritmust nevezzük *Gauss – Seidel-iterációnak.*



2.15. ábra: A Gauss – Seidel-iteráció szemléltetése

2.56. PÉLDA (GAUSS – SEIDEL-ITERÁCIÓ). *Oldjuk meg a*

$$\begin{aligned} 4x - y &= 2 \\ 2x - 5y &= -8 \end{aligned}$$

egyenletrendszert Gauss – Seidel-iterációval.

MEGOLDÁS. Itt is, mint a Jacobi-iterációnál az

$$\begin{aligned} x &= \frac{y+2}{4} \\ y &= \frac{2x+8}{5} \end{aligned}$$

egyenleteket használjuk, de míg a Jacobi-iterációnál $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ kezdőérték után az $x = \frac{0+2}{4} = \frac{1}{2}$, $y = \frac{0+8}{5} = \frac{8}{5}$ értékek következtek, a Gauss – Seidel-iterációnál a második egyenletben 0 helyett már az első egyenletben kiszámolt $x = \frac{1}{2}$ értéket helyettesítjük, azaz $y = \frac{2\frac{1}{2}+8}{5} = \frac{9}{5}$. A további értékeket egy táblázatban adjuk meg de úgy, hogy jelezzük a kiszámítás sorrendjét:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$
x	0	0.5	0.95	0.995	1.000
y	0	1.8	1.98	1.998	2.000

Hasonlítsuk össze az eredményt a Jacobi iterációnál készített táblázattal. □

Mindkét iteráció jól szemléltethető a 2-ismeretlenes esetben. A 2.14. és a 2.15. ábrák ezt mutatják. Ha pontosan számolunk, végtelen sok pontot kapunk, az ábrák csak néhány pontot mutatnak.

Az iterációk konvergenciája A fenti példákból nem látszik, hogy vajon a Jacobi- és a Gauss – Seidel-iterációk mindig konvergálnak-e.

2.57. PÉLDA (DIVERGENS ITERÁCIÓ). *Oldjuk meg Jacobi- és Gauss – Seidel-iterációval a következő egyenletrendszert:*

$$
\begin{aligned}
x - y &= 2 \\
2x - y &= 5
\end{aligned}
$$

MEGOLDÁS. Alakítsuk át az egyenletrendszert:

$$
\begin{aligned}
x &= \phantom{2x - {}} y + 2 \\
y &= 2x - 5
\end{aligned}
$$

Először próbálkozzunk Jacobi-iterációval:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$	$\mathbf{x}_6$	$\mathbf{x}_7$	$\mathbf{x}_8$
x	0	2	-3	1	-9	-1	-21	-5	-45
y	0	-5	-1	-11	-3	-23	-7	-47	-15

Úgy tűnik, nem konvergens a vektorsorozat, mint ahogy nem tűnik annak a Gauss – Seidel-iterációnál sem:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	
x	0	2	1	-1	-5	-13
y	0	-1	-3	-7	-15	-31

A divergencia leolvasható az iterációkat szemléltető ábrákról is! □

2.58. definíció (Soronként domináns főátlójú mátrix). *Azt mondjuk, hogy az $n \times n$-es* $\mathbf{A}$ *mátrix* soronként (szigorúan) domináns főátlóval rendelkezik, *vagy* soronként (szigorúan) domináns főátlójú, *ha a főátló minden eleme abszolút értékben nagyobb a sorában lévő többi elem abszolút értékeinek összegénél, azaz képletben*

$$\begin{aligned}
|a_{11}| &> & |a_{12}| + \ldots + |a_{1,n-1}| + |a_{1n}| \\
|a_{22}| &> |a_{21}| & + \ldots + |a_{2,n-1}| + |a_{2n}| \\
&\vdots & \ddots \qquad \vdots \\
|a_{n-1,n-1}| &> |a_{n-1,1}| + |a_{n-1,2}| + \ldots & + |a_{n-1,n}| \\
|a_{nn}| &> |a_{n1}| + |a_{n2}| + \ldots + |a_{n,n-1}|
\end{aligned}$$

Hasonlóan definiálható az oszloponként domináns főátlójú mátrix is.

Világos, hogy az alábbi mátrixok soronként domináns főátlójúak:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -10 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -1 & -2 & 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & .25 & .25 & .25 \\ .25 & 1 & .25 & .25 \\ .25 & .25 & 1 & .25 \\ .25 & .25 & .25 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az alábbi mátrixok nem soronként domináns főátlójúak, de sorcserékkel azzá tehetők:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 & 10 \\ -10 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} .25 & .25 & .25 & 1 \\ 1 & .25 & .25 & .25 \\ .25 & .25 & 1 & .25 \\ .25 & 1 & .25 & .25 \end{bmatrix}.$$

Az alábbi egyenletrendszer együtthatómátrixa soronként domináns főátlójú:

$$\begin{aligned} 4x - y &= 11 \\ 2x - 5y &= -17 \end{aligned}$$

2.59. tétel (Elégséges feltétel az iterációk konvergenciájára). *Ha az n egyenletből álló n-ismeretlenes egyenletrendszer együtthatómátrixa soronként domináns főátlójú, akkor bármely indulóvektor esetén a Jacobi- és a Gauss–Seidel-iteráció is konvergens.*

E tételt nem bizonyítjuk. Megjegyezzük, hogy a tételbeli feltétel nem szükséges, csak elégséges, azaz olyan egyenletrendszeren is konvergens lehet valamelyik iteráció, melynek nem domináns főátlójú az együtthatómátrixa. Hasonló tétel igaz oszloponként domináns főátlójú együtthatómátrixok esetén is.

A domináns főátlójú mátrixokon a Gauss–Seidel-iteráció sosem lassabb, mint a Jacobi-iteráció, sőt, gyakran érezhetően gyorsabb. Az viszont előfordulhat, hogy a Gauss–Seidel-iteráció divergens, míg a Jacobi-iteráció konvergens (ld. 2.26. feladat).

A gyakorlatban ezeknek az iterációknak különböző, hatékonyabb javításait használják. E témában az olvasó figyelmébe ajánljuk a „numerikus módszerek" témában írt könyveket, web-oldalakat.

Feladatok

Jacobi-iteráció

2.25. Oldjuk meg a

$$\begin{aligned} 4x - y &= 8 \\ 2x - 5y &= -5 \end{aligned}$$

egyenletrendszert Jacobi-iterációval! Számoljunk 3, majd 4 értékes jegyre!

Vegyes feladatok

2.26. **Jacobi-iteráció konvergál, Gauss–Seidel-iteráció nem** Írjunk programot annak az állításnak az ellenőrzésére, hogy a

$$\begin{aligned} x \phantom{{}+5/6y} + z &= 0 \\ -x + 5/6y \phantom{{}+z} &= 0 \\ x + 2y - 3z &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszeren a Jacobi-iteráció konvergál, a Gauss–Seidel-iteráció nem.

2.27. **Gauss-elimináció domináns főátlójú mátrixon** Bizonyítsuk be, hogy ha az $\mathbf{A}$ mátrix főátlója soronként domináns, akkor végrehajtható rajta a főelemkiválasztásos Gauss-elimináció sorcsere nélkül!

2.28. **Az iterációk szemléltetése** Az A városból elindul egy A jelű vonat a B város felé, vele egy időben a B városból egy B jelű A felé. A B vonat indulásával egy időben a B vonat orráról elindul egy légy is A felé, de amint találkozik az A vonattal megfordul, és addig repül, míg a B vonattal nem találkozik, amikor ismét megfordul, stb. Mindhármuk sebessége konstans, de a légy sebessége nagyobb mindkét vonaténál.

1. Egy táblázatban megadjuk mindkét vonat távolságát az indulási helyüktől km-ben mérve azokban a pillanatokban, amikor a légy épp a B vonattal találkozik.

	(x_0, y_0)	(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	(x_3, y_3)
x: távolság A-tól	0	40	48	49.6
y: távolság B-től	0	80	96	99.2

   Számítsuk ki a táblázat egy-két további oszlopát! Milyen messze van A város B-től?

2. Most egy másik táblázatban megadjuk annak a vonatnak a távolságát az indulási helyétől, amelyik épp találkozik a léggyel:

	y_0	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
x: távolság A-tól		30		46		49.2	
y: távolság B-től	0		80		96		99.2

   Számítsuk ki a táblázat egy-két további oszlopát! Milyen messze van A város B-től?

3. Mi köze van e feladatnak a Jacobi- és a Gauss–Seidel-iterációhoz?

Megoldások

2.4. *a)* igen, *b)* igen, *c)* nem, *d)* igen, *e)* igen, *f)* nem.

2.5. Könnyen látható, hogy mindkét egyenletrendszer egyetlen megoldása: $x = 2$, $y = 1$, tehát a két egyenletrendszer ekvivalens.

2.6. Az első egyenletrendszer nem oldható meg a $0 = 3$ alakú egyenlet miatt, de a második sem, hisz nincs olyan x és y, melyre $x + y = 2$ és $x + y = 7$ lenne, hisz $2 \neq 7$.

2.7. Behelyettesítés után mindkét egyenlet $0 = 0$ alakú, amit tetszőleges x és y kielégít, így az összes (x, y) számpár megoldása az egyenletrendszernek.

2.8. $x = 1$, y tetszőleges, azaz az összes $(1, y)$ alakú számpár megoldás.

2.9. A második egyenlet behelyettesítés után $0 = 1$ alakú, így az egyenletrendszernek nincs megoldása.

2.10. $x = 1$, $y = 2$, azaz $(x, y) = (1, 2)$ az egyetlen megoldás.

2.12. *a)* A sormodellben két metsző egyenest kell megrajzolni ($y = 7/3x - 2/3x$, $y = -2 + 3/2x$), melyek a $(2, 1)$ pontban metszik egymást, míg az oszlopmodellben a $(2, 3)$, a $(3, -2)$ vektorokat és azok lineáris kombinációjaként előállított $(7, 4) = 2(2, 3) + (3, -2)$ vektort!

b) A sormodellben két párhuzamos egyenest kell megrajzolni, míg az oszlopmodellben a $(2, 3)$ és a $(4, 6)$ vektorokat, melyek egy egyenesbe esnek, és semmilyen lineáris kombinációjuk sem adja ki a $(3, 4)$ vektort!

2.13. A három sík közül semelyik kettő nem párhuzamos, másrészt a normálvektorai egy síkba esnek, ugyanis $2(1, 1, 2) + (1, 2, 4) = (3, 4, 8)$. Ez azt jelenti, hogy van olyan vektor, mely mindhárom síkkal párhuzamos. Az első esetben a három sík egy egyenesen megy át, mivel van a síkoknak közös pontjuk, pl. a $(3, 0, 0)$ pont, így végtelen sok megoldása is van, míg a második esetben a síkoknak nincs közös pontjuk.

Az egyenletrendszerek ekvivalensek a következő vektoregyenletekkel:

$$\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix} y + \begin{bmatrix}2\\4\\8\end{bmatrix} z = \begin{bmatrix}3\\3\\9\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix} y + \begin{bmatrix}2\\4\\8\end{bmatrix} z = \begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}.$$

Itt a közös együtthatómátrix minden oszlopvektora benne van a

$$2x + y - z = 0$$

egyenletű síkban, (ez könnyen ellenőrizhető a vektorok koordinátáinak a sík egyenletébe való helyettesítésével), és ki is feszítik a síkot, mert a három vektor nem kollineáris. Másrészt a $(3, 3, 9)$ vektor is benne van e síkban, a $(3, 3, 1)$ vektor viszont nem. Tehát az első egyenletrendszer megoldható, a második nem.

2.14. A sormodell szerinti ábra az *a)* esetben 3 síkbeli egyenest tartalmaz, melyek közt van két párhuzamos, így az egyenletrendszer nem oldható meg. A *b)* esetben a három egyenes egy ponton megy át, ez a megoldás: $x = 2$, $y = 1$. A *c)* esetben ugyan nincsenek párhuzamos egyenesek, de nincs közös pontjuk sem, így az egyenletrendszer nem oldható meg. Az oszlopmodell szerint az *a)*

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + y &= 4 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszer ekvivalens a következővel:

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} y = \begin{bmatrix}3\\4\\4\end{bmatrix}.$$

Az $(1, 1, 1)$ és az $(1, 1, 2)$ vektorok benne fekszenek az $x = y$ egyenletű síkban, mivel első két koordinátájuk megegyezik, ezért minden lineáris kombinációjuk is ebbe a síkba esik. A $(3, 4, 4)$ vektor viszont nem esik e síkba, így *független* az előbbi kettőtől, tehát nem áll elő azok lineáris kombinációjaként. Vagyis ez az egyenletrendszer nem oldható meg. A *b)* és *c)* egyenletrendszerekben a bal oldali két vektor, az $(1, 1, 1)$ és az $(1, 2, 3)$ az $x - 2y + z = 0$ egyenletű síkban van, melyben a $(3, 4, 5)$ vektor benne van, míg a $(3, 3, 5)$ vektor nincs benne, tehát *b)* megoldható, *c)* nem.

2.15. *a)* hamis, az állítás csak úgy igaz, ha a párhuzamos hipersíkok különbözőek is (két azonos hipersíkot párhuzamosnak tekintünk), *b)* hamis, például a 2.9. *(a)* ábrán látható esetben nincsenek párhuzamos síkok, és mégsincs megoldás, *c)* igaz, mert akkor a jobb oldalon álló bármely vektor kifejezhető e két kétdimenziós vektor lineáris kombinációjaként, tehát az egyenletrendszer megoldható.

2.16.

a) Egy két egyenletből álló háromismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra a **három**dimenziós térben **két** darab **síkból** áll, melyek ha **párhuzamosak, de nem azonosak**, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása, egyébként megoldásainak száma **végtelen**. Oszlopmodellje a **két**dimenziós térben **négy** darab **vektorból** áll (három lineáris kombinációja a negyedik).

b) Egy három egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra a **két**dimenziós térben **három egyenesből** áll, míg az oszlopmodellje a **három**dimenziós térben **három** darab **vektorból**.

c) Egy négy egyenletből álló ötismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra az **öt**dimenziós térben **négy** darab **hipersíkból** áll. Oszlopmodellje a **négy**dimenziós térben **hat** darab **vektorból** áll.

2.17. *a)* Igaz, ez a szám megegyezik a főelemek számával. *b)* Igaz, ez a szám megegyezik a főelemek számával. *c)* Hamis, van lépcsős alakja minden mátrixnak, de csak a redukált lépcsős alak egyértelmű. *d)* Hamis. *e)* Igaz.

2.18. *a)* Igaz. *b)* Hamis, az egyenletrendszer megoldhatósága nem függ az egyenletek számától. Az ismeretlenek számánál akár kevesebb, akár több egyenletből álló rendszer akár konzisztens, akár inkonzisztens is lehet. *c)* Igaz. *d)* Igaz, a nullvektor mindig megoldás.

2.19. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2.20. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

2.21. Igen, mindkettőnek $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ az egyetlen megoldása, azaz megoldáshalmazaik megegyeznek.

2.22. Igen, mindkettő bővített együtthatómátrixának redukált lépcsős alakja a zérussor nélkül

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.8 & 1.8 \\ 0 & 1 & 2.2 & -1.2 \end{bmatrix}$$

2.23. *a)*Igen. *b)*Nem.

2.24. A sorcsere előállítható a beszorzás és a hozzáadás segítségével, nevezetesen az $S_i \leftrightarrow S_j$ sorcsere ekvivalens az

$$S_i + S_j,\ S_j - S_i,\ S_i + S_j,\ -S_j,$$

elemi sorműveletekkel. Ellenőrzésül a mátrixokon való hatásukat is megadjuk:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{s}_i \\ \vdots \\ \mathbf{s}_j \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow{S_i+S_j} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{s}_i+\mathbf{s}_j \\ \vdots \\ \mathbf{s}_j \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow{S_j-S_i} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{s}_i+\mathbf{s}_j \\ \vdots \\ -\mathbf{s}_i \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow{S_i+S_j} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{s}_j \\ \vdots \\ -\mathbf{s}_i \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow{-S_j} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{s}_j \\ \vdots \\ \mathbf{s}_i \\ \vdots \end{bmatrix}$$

2.25. Legyen $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$. Az iteráció képletei:

$$x = \frac{y+8}{4}, \quad y = \frac{2x+5}{5}.$$

Az iteráció lépéseinek táblázata 3 értékes jeggyel számolva:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$	$\mathbf{x}_6$
x	0	2	2.25	2.45	2.48	2.50	2.50
y	0	1	1.80	1.90	1.98	1.99	2.00

Az iteráció lépéseinek táblázata 4 értékes jeggyel számolva:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$	$\mathbf{x}_6$	$\mathbf{x}_7$	$\mathbf{x}_8$
x	0	2	2.25	2.45	2.475	2.495	2.498	2.500	2.5
y	0	1	1.80	1.90	1.980	1.990	1.998	1.999	2.0

2.27.

2.28. A Jacobi-iteráció szerinti módon, a vonatok valamelyikének és a légynek a k-adik találkozásából kiszámítva a $k+1$-edik találkozásra jellemző távolságokat, az $x_{k+1} = ay_k + b$, $y_{k+1} = cx_k + d$ egyenletekre jutunk. Az első táblázat adatait behelyettesítve, és a, b, c és d értékre megoldva az $a = 1/10$, $b = 40$, $c = 2/5$, $d = 80$ értékeket kapjuk, amiből a táblázat további értékei számolhatók, és az eredeti egyenletrendszer is fölírható:

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{10}y &= 40 \\ -\frac{2}{5}x + \quad y &= 80. \end{aligned}$$

Ennek megoldása $(x, y) = (50, 100)$, vagyis a vonatok találkozásáig az A vonat 50 km-t, a B vonat 100 km-t tesz meg. Eszerint a két város 150 km-re van egymástól.

A Gauss–Seidel-iteráció szerinti $x_{k+1} = ay_k + b$, $y_{k+1} = cx_{k+1} + d$ egyenletek épp illeszkednek a feladat második táblázatához az $a = 1/5$, $b = 30$, $c = 1$, $d = 50$ értékekkel. Ez az

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{5}y &= 30 \\ -x + \quad y &= 50 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez tartozik, melynek megoldása ismét $(x, y) = (50, 100)$.

3
Megoldhatóság és a megoldások tere

E fejezetet az egyenletrendszer megoldásainak jellemzésére szánjuk. Ennek során megismerkedünk az altér fogalmával és a velük végezhető legegyszerűbb műveletekkel. Végül megmutatjuk, hogy minden konzisztens lineáris egyenletrendszer origóhoz legközelebbi megoldása az egyetlen, mely a sortérbe esik, és bármely két megoldásának különbsége merőleges rá.

Homogén és inhomogén egyenletrendszerek megoldásai

Az előzőekben a megoldások megtalálásának módszereit tanulmányoztuk. E szakaszban a megoldhatóság kérdését és a megoldások halmazának legfontosabb tulajdonságait vizsgáljuk. A vizsgálatokban a lineáris egyenletrendszerek mindkét geometriai interpretációja fontos szerepet kap.

Kötött változók száma, mátrix rangja A redukált lépcsős alak egyértelműségének egy nyilvánvaló, de fontos folyománya az alábbi eredmény:

3.1. következmény (Főelemek oszlopai). *Egy valós mátrix bármely lépcsős alakjában a főelemek ugyanazokban az oszlopokban vannak, tehát ezek száma is független a lépcsős alaktól.*

A bizonyítás azonnal adódik abból, hogy bármely lépcsős alak főelemeiből kapjuk a redukált lépcsős alak vezéregyeseit, így bármely lépcsős alak főelemei ugyanott vannak, ahol a vezéregyesek, a redukált lépcsős alak pedig egyértelmű.

Ebből az is következik, hogy bármely valós mátrix esetén

bármely lépcsős alak főelemeinek száma	=	bármely lépcsős alak nemzérus sorainak száma	=	a redukált lépcsős alak vezéregyeseinek száma.

Ez a következő definícióhoz vezet.

3.2. DEFINÍCIÓ (MÁTRIX RANGJA). *Egy mátrix valamely lépcsős alakjában a nemnulla sorok számát a mátrix* rangjának *nevezzük. Az* $\mathbf{A}$ *mátrix rangját* $\mathrm{r}(\mathbf{A})$ *jelöli.*

3.3. PÉLDA (MÁTRIX RANGJÁNAK KISZÁMÍTÁSA). *Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját!*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

MEGOLDÁS. Az első és második mátrix lépcsős alakú, rangjuk azonnal leolvasható: 1 és 2. A harmadik és negyedik mátrix elemi sorműveletekkel

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \text{ illetve } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

alakra hozható, tehát a rang 4, illetve 2. □

3.4. ÁLLÍTÁS (KÖTÖTT ÉS SZABAD VÁLTOZÓK SZÁMA). *Ha egy* n*-ismeretlenes egyenletrendszer megoldható, és együtthatómátrixának rangja* r*, akkor a Gauss- vagy a Gauss–Jordan-módszerrel kapott megoldásában a kötött változók száma* r*, a szabad változók száma* $n-r$*.*

► Megjegyezzük, hogy egyelőre csak annyit látunk, hogy ha az együtthatómátrix és a bővített mátrix rangja r, akkor az egyenletrendszernek *van olyan megoldása*, amelyben a kötött változók száma r, a szabad változóké $n-r$, és egy ilyen megoldás megkapható a Gauss- vagy a Gauss–Jordan-módszerrel. Arról még nem tudunk semmit, hogy a változók sorrendjének felcserélésével, vagy más megoldási módszerrel nem kaphatunk-e más megoldást. A következő fejezetben be fogjuk látni, hogy a kötött és szabad változók száma független a változók sorrendjétől, sőt a megoldás módszerétől is.

► Például a

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

kibővített mátrixhoz tartozó egyenletrendszerben 3 a kötött és 4 a szabad változók száma.

Egyenletrendszer megoldhatóságának feltétele Tudjuk, hogy egy lineáris egyenletrendszer pontosan akkor *nem* oldható meg, ha a bővített mátrix lépcsős alakjának van olyan sora, melyben csak a legutolsó elem nem nulla. Ez ugyanis egyenletté visszaírva $0 = c$ alakú, ahol $c \neq 0$, és ennek az egyenletnek nincs megoldása. Ez viszont azt jelenti, hogy ilyenkor a bővített mátrix rangja nagyobb az együtthatómátrix rangjánál. E megállapítás azonnali következménye a következő tétel.

3.5. TÉTEL (A MEGOLDHATÓSÁG MÁTRIXRANGOS FELTÉTELE). *Legyen egy n-ismeretlenes lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa* $\mathbf{A}$, *a konstans tagokból álló vektora* $\mathbf{b}$.

1. *Ez az egyenletrendszer* pontosan akkor oldható meg, *ha együtthatómátrixának és bővített mátrixának rangja megegyezik, azaz*

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}).$$

2. *Ez az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg* egyértelműen, *ha együtthatómátrixának és bővített mátrixának rangja megegyezik az ismeretlenek számával, azaz*

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n.$$

BIZONYÍTÁS. Az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha bővített mátrixának lépcsős alakjában nincs olyan sor, melynek csak az utolsó eleme nem 0. Ez épp azt jelenti, hogy $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.

A második állítás abból következik, hogy az egyenletrendszer akkor oldható meg egyértelműen, ha megoldható, és nincs szabad változója, vagyis az együtthatómátrix rangja megegyezik az ismeretlenek számával. □

Az előzőekből az is adódik, hogy egy lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van egynél több megoldása, ha

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) < n.$$

(Miért nem lehet $\mathrm{r}(\mathbf{A}) > n$?)

Egy valós együtthatós egyenletrendszernek csak úgy lehet egynél több megoldása, ha van szabad változója. Viszont, annak minden értékéhez egy-egy másik megoldás tartozik, vagyis ekkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Így, ha $\mathbf{A}$ valós mátrix, akkor a megoldások száma, a két rang és az ismeretlenek száma közt a következő a kapcsolat:

Feltétel	Megoldások száma
$\mathrm{r}(\mathbf{A}) < \mathrm{r}(\mathbf{A}\|\mathbf{b})$	0
$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}\|\mathbf{b}) = n$	1
$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}\|\mathbf{b}) < n$	∞

Ha az egyenletrendszer homogén lineáris, azaz mindegyik konstans tag 0, akkor az elemi sorműveletek közben a bővített mátrix utolsó oszlopában minden elem 0 marad, így ebben az oszlopban biztosan nem lesz főelem. Eszerint a homogén lineáris egyenletrendszerek mindig megoldhatók, hisz ekkor a $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ összefüggés mindig fönnáll. A megoldhatóság persze e feltétel ellenőrzése nélkül is látszik, hisz az $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ mindig megoldás! Mivel $\mathrm{r}(\mathbf{A})$ megegyezik a redukált lépcsős alak főelemeinek számával, ezért $\mathrm{r}(\mathbf{A}) \leq m$ és $\mathrm{r}(\mathbf{A}) \leq n$ is fönnáll, ahol m az egyenletek, n az ismeretlenek száma. Így viszont $m < n$ esetén $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$ nem állhat fönn, tehát a homogén lineáris egyenletrendszernek van az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ vektoron kívül is megoldása. Ezzel bizonyítottuk az alábbi tételt:

3.6. TÉTEL (HOMOGÉN LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDHATÓSÁGA). *Az* $\mathbf{A}$ *együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer mindig megoldható, mert a nullvektor – az ún.* triviális megoldás *– mindig megoldás. Pontosan akkor van* nemtriviális*, vagyis a* $\mathbf{0}$*-vektortól különböző megoldása is, ha*

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) < n,$$

ahol n az ismeretlenek – azaz $\mathbf{A}$ *oszlopainak – számát jelöli. Speciálisan, az m egyenletből álló homogén lineáris egyenletrendszernek $m < n$ esetén mindig van nemtriviális megoldása.*

Valós együtthatós homogén lineáris egyenletrendszerekre az előző táblázat a következő alakot ölti:

Feltétel	Megoldások száma
$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$	1
$\mathrm{r}(\mathbf{A}) < n$	∞

3.7. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSAINAK SZÁMA). *Az a paraméter mely értékei mellett van az alábbi egyenletrendszernek* 0, 1*, illetve* ∞ *sok megoldása?*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + ax_3 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= a \\ ax_1 + x_2 + x_3 &= a^2 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Hozzuk a bővített mátrixot lépcsős alakra:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & a^2 \end{array}\right] \overset{\substack{S_2-S_1 \\ S_3-aS_1}}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & a^2-a \end{array}\right] \overset{S_3+S_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) & (a+1)(a-1) \end{array}\right]$$

Látható, hogy $a = 1$ esetén az utolsó két sorban minden elem 0, tehát az együtthatómátrix és a bővített mátrix rangja is 1, így az egyenletrendszer az $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ egyenlettel ekvivalens. Ennek megoldása: $(x_1, x_2, x_3) = (1 - s - t, s, t)$, azaz oszlopvektor alakba írva:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ha $a = -2$, akkor az együtthatómátrix rangja 2, a bővített mátrix rangja 3, tehát az egyenletrendszer nem oldható meg (az utolsó sor egyenletté visszaírva $0 = 3$ alakú). Minden egyéb esetben, azaz ha $a \neq 1$ és $a \neq -2$, akkor a két rang 3, ami megegyezik az ismeretlenek számával, tehát egyetlen megoldás van. Ez ki is fejezhető:

$$x_1 = \frac{(a+1)^2}{a+2}, \quad x_2 = \frac{1}{a+2}, \quad x_3 = -\frac{a+1}{a+2}.$$

□

Homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai Tekintsünk egy tetszőleges homogén lineáris egyenletrendszert. Mint a 3.6. tételben láttuk, ez biztosan megoldható, és a megoldások halmazában a nullvektor benne van. Mit mondhatunk a megoldások halmazáról, ha több megoldása is van a homogén egyenletrendszernek?

3.8. ÁLLÍTÁS (MEGOLDÁSOK LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA). *Egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak bármely lineáris kombinációja is megoldás.*

BIZONYÍTÁS. Elég az állítást két megoldásra bizonyítani. Jelölje $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,...,$\mathbf{a}_n$ az egyenletrendszer együtthatómátrixának oszlopvektorait. Legyen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ két tetszőleges megoldás, azaz

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_n x_n &= \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_1 y_1 + \mathbf{a}_2 y_2 + \ldots + \mathbf{a}_n y_n &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

és c, d legyen két tetszőleges skalár. Megmutatjuk, hogy ekkor $c\mathbf{x} + d\mathbf{y}$ is megoldás, ugyanis

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}_1(cx_1 + dy_1) + \mathbf{a}_2(cx_2 + dy_2) + \ldots + \mathbf{a}_n(cx_n + dy_n) \\ =&(c\mathbf{a}_1 x_1 + d\mathbf{a}_1 y_1) + (c\mathbf{a}_2 x_2 + d\mathbf{a}_2 y_2) + \ldots + (c\mathbf{a}_n x_n + d\mathbf{a}_n y_n) \\ =&c(\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_n x_n) + d(\mathbf{a}_1 y_1 + \mathbf{a}_2 y_2 + \ldots + \mathbf{a}_n y_n) \\ =&\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

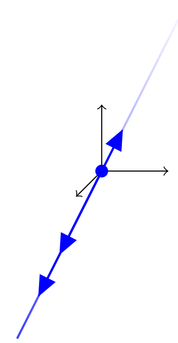
azaz $c\mathbf{x} + d\mathbf{y}$ is megoldás. Ez bizonyítja állításunkat.

E bizonyítás az oszlopmodellre épült, de hasonlóan egyszerű bizonyítás adható a sormodellben is (ld. 3.9. feladat). □

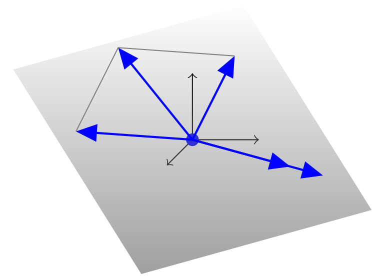
Altér A vektortér fogalmát kiterjesztjük minden olyan vektorhalmazra, melyből a vektorok összeadása és skalárral szorzása nem vezet ki.

3.9. DEFINÍCIÓ (ALTÉR). *Az $\mathbb{R}^n$ tér vektorainak olyan nem üres részhalmazát, mely zárt a vektorok skalárral való szorzásának és a vektorok összeadásának műveletére, az $\mathbb{R}^n$* alterének *nevezzük.*

► $\mathcal{A}$ pontosan akkor altér, ha az $\mathcal{A}$-beli vektorokból képzett lineáris kombinációk is mind $\mathcal{A}$-ban vannak (ld. a 7.12. feladatot).
► A síkban egy origón átmenő egyenes vektorai (az egyenes pontjaiba mutató helyvektorok) alteret alkotnak.
► A térben bármely origón átmenő sík vagy egyenes vektorai alteret alkotnak (ld. a 3.1. ábrát).



a)



b)

3.1. ábra: *a)* Egy origón átmenő egyenes bármely vektorának konstansszorosa és bármely két vektorának összege az egyenesbe esik, *b)* egy origón átmenő sík bármely vektorának konstansszorosa és bármely két vektorának összege a síkba esik.

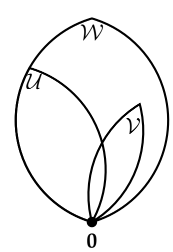
Az $\mathbb{R}^3$ imént felsorolt alterei – az origón átmenő egyenes és sík – „olyanok”, mint az $\mathbb{R}$ és az $\mathbb{R}^2$. E ködös megfogalmazást a vektortér absztrakt definíciója és a vektorterek izomorfizmusának fogalma fogja tisztázni (ld. a 13 fejezetet). Akkor fogjuk igazolni, hogy $\mathbb{R}^n$ alterei valóban mind „olyanok”, mint $\mathbb{R}^k$, ahol $k \leqslant n$. Addig vektortéren a következőt fogjuk érteni:

3.10. DEFINÍCIÓ (VEKTORTÉR ÉS ALTÉR). *Vektorok olyan halmazát, mely zárt a vektorok összeadásának és skalárral szorzásának műveletére vektortérnek nevezzük. Ha VT egy vektortér, és $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ ugyancsak zárt e két műveletre, azaz képletben*
1. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U}$ *esetén* $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{U}$,
2. $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, *és* $c \in \mathbb{R}$ *esetén* $c\mathbf{u} \in \mathcal{U}$,
akkor azt mondjuk, hogy az $\mathcal{U}$ vektortér a $\mathcal{V}$ vektortér altere. *Jelölése: $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$.*

► A könyv következő két részében az egyszerűbb követhetőség érdekében – ha mást nem mondunk – vektortéren valós (véges dimenziós) vektorteret értünk, azaz a skalárral való szorzás valós számmal való szorzást jelent.

Alterek tulajdonságai és szemléltetésük A halmazok szemléltetésére használt Venn-diagramok példáját követve a vektortereket olyan formában fogjuk ábrázolni, mely nem „hasonlít” a vektorterekre, de annak néhány tulajdonságát egyszerűen szemlélteti.

A *levéldiagram* egy egyszerű levélformával szemlélteti a vektorteret, melynek a levél száránál lévő csúcsa (töve) jelzi a nullvektort. Az altereket olyan kisebb levelek szemléltetik, melyek töve – azaz a nullvektor – közös (ld. 3.2. ábra). A levelek felső csúcsába a tér nevét, esetleg dimenzióját írhatjuk.



3.2. ábra: Egy $\mathcal{W}$ vektortér és annak $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ alterei, valamint a mindannyiukban közös nullvektor

Felsoroljuk az alterek néhány egyszerűen belátható tulajdonságát, néhányukat e diagrammal szemléltetve:

▶ Minden altérnek eleme a nullvektor, hisz bármely altérbeli vektorral együtt annak 0-szorosa is, vagyis a $\mathbf{0}$-vektor is eleme az altérnek.

▶ Minden altérbeli $\mathbf{x}$ vektorral együtt annak ellentettje (-1-szerese), a $-\mathbf{x}$ vektor is eleme az altérnek.

▶ Minden vektortér maga is altér (saját maga altere), hisz bármely két vektorának összes lineáris kombinációját is tartalmazza.

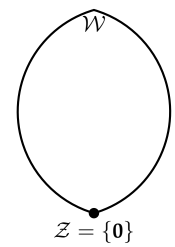
▶ A nullvektor önmagában alteret alkot, ez a *zérustér*, amit $\mathcal{Z}$ jelöl. A nulltér kifejezést másra használjuk, ne keverjük össze. A zérusteret és a teljes teret szokás triviális altereknek nevezni (ld. 3.3. ábra).

▶ Altér altere altér, azaz ha $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$, és $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{U}$, akkor $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$. (ld. 3.4. ábra).

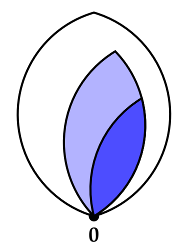
▶ Két altér metszete is altér. Ha $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ egy vektortér két altere, és $\mathcal{W}$ a közös részük, akkor $\mathcal{W}$ nem üres, hisz a nullvektor benne van. Másrészt bármely két $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{W}$ vektor összes lineáris kombinációja benne van $\mathcal{U}$-ban és $\mathcal{V}$-ben is, így metszetükben is. Alterek metszetére is a $\cap$ jelet használjuk, tehát az előbbi alterekre $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{W}$ (ld. 3.5. ábra).

▶ Az előző gondolat tetszőleges számú altérre is megismételhető, tehát egy vektortér tetszőleges számú alterének közös része is altér. Az alterek száma végtelen is lehet.

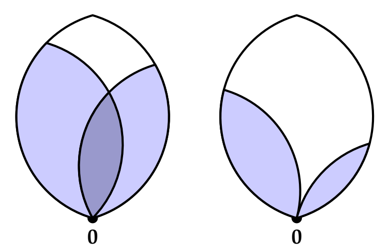
▶ Két altér egyesítése csak akkor altér, ha egyik altere a másiknak. Például a térben egy origón átmenő egyenes vektorait és egy origón átmenő sík vektorait egyesítve csak akkor kapunk alteret, ha az egyenes a síkba esik.



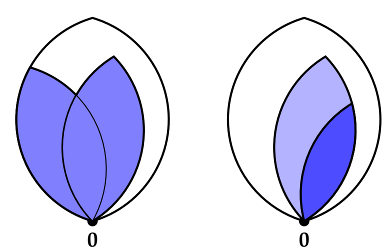
3.3. ábra: Egy $\mathcal{W}$ vektortér két triviális alterével: az egyik maga $\mathcal{W}$, a másik a nullvektort tartalmazó $\mathcal{Z}$ tér



3.4. ábra: Altér altere is altér



3.5. ábra: Alterek metszete is altér, de az megeshet, hogy ez a metszet csak az egyetlen nullvektorból álló zérustér.



3.6. ábra: Két altér egyesítése csak akkor altér, ha egyik a másik altere

3.11. PÉLDA (ALTÉR). *Alteret alkotnak-e az alábbi vektorhalmazok $\mathbb{R}^3$-ben?*

1. $\{\, (x, y, z) \mid x = y,\ z = xy \,\}$,
2. $\{\, (s + 2t, s - 1, 2s + t) \mid s, t \in \mathbb{R} \,\}$.

MEGOLDÁS. Az első halmaz nem altér, mert nem elégíti ki a definícióbeli feltételeket. Például az $(1, 1, 1)$ vektor benne van e halmazban, azonban kétszerese nem, mert nem elégíti ki a $z = xy$ egyenlőséget!

A második feladatban szereplő halmazban nincs benne a nullvektor, ugyanis az $s + 2t = 0$, $s - 1 = 0$, $2s + t = 0$ egyenletrendszernek nincs megoldása, így ez a halmaz sem alkot alteret! □

Könnyen belátható, hogy $\mathbb{R}^2$ alterei az alábbiak:

1. a zérusvektorból álló egyelemű halmaz, azaz a zérustér,
2. egy origón átmenő egyenes összes vektora,
3. a sík összes vektora.

Hasonlóképp $\mathbb{R}^3$ alterei:

1. a zérusvektorból álló egyelemű halmaz,
2. egy origón átmenő egyenes összes vektora,
3. egy origón átmenő sík összes vektora,
4. a tér összes vektora.

Mivel egy egyetlen n-ismeretlenes egyenletből álló homogén egyenletrendszer megoldáshalmaza egy $\mathbb{R}^n$-beli hipersík, ezért az origón átmenő hipersíkok is alterek. Ennek általánosításaként a 3.8. állítás az altér fogalmát használva a következő alakot ölti:

3.12. ÁLLÍTÁS (MEGOLDÁSOK ALTERE). *Egy n-ismeretlenes* homogén *lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza alteret alkot $\mathbb{R}^n$-ben.*

3.13. DEFINÍCIÓ (NULLTÉR). *Az $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak alterét az $\mathbf{A}$ mátrix* nullterének *nevezzük és $\mathcal{N}(\mathbf{A})$-val jelöljük.*

Kérdés: általában hogyan adhatjuk meg $\mathbb{R}^n$ egy tetszőleges alterét?

Kifeszített altér A homogén lineáris egyenletrendszer összes megoldását néhány vektor lineáris kombinációjaként állítottuk elő. A megoldások alterét tehát „generálja” vagy geometrikusabb szóhasználattal „kifeszíti” néhány megoldásvektor.

3.14. DEFINÍCIÓ (KIFESZÍTETT ALTÉR). *Adva van egy $\mathcal{V}$ vektortér. A $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathcal{V}$ vektorok*

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k$$

alakú lineáris kombinációinak halmazát a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok által kifeszített altérnek *nevezzük, és* $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$*-val jelöljük.*

Megmutatjuk, hogy a „kifeszített altér” elnevezésben az altér szó használata jogos:

3.15. ÁLLÍTÁS (A KIFESZÍTETT ALTÉR ALTÉR). *A $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathcal{V}$ vektorok által kifeszített* $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ *vektorhalmaz $\mathcal{V}$ egy altere.*

BIZONYÍTÁS. Be kell látni, hogy $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ bármely vektorának skalárszorosa és bármely két vektorának összege is ide tartozik. Legyen

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k, \quad \text{és} \quad \mathbf{v} = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \ldots + d_k\mathbf{v}_k$$

a $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ két tetszőleges vektora, és legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós. Ekkor

$$x\mathbf{u} = (xc_1)\mathbf{v}_1 + (xc_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (xc_k)\mathbf{v}_k \in \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k),$$

és

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (c_1 + d_1)\mathbf{v}_1 + \ldots + (c_k + d_k)\mathbf{v}_k \in \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k). \qquad \square$$

3.16. példa (Nulltér). *Határozzuk meg az*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix nullterét. Keressünk véges sok olyan vektort, melyek kifeszítik e teret!

Megoldás. Az adott mátrix a 2.37. példabeli homogén lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa. A homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza épp a nulltér vektoraiból álló halmaz. A nulltér vektorai tehát

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

alakba írhatók, amiből leolvasható, hogy e teret a megoldásban megadott három vektor feszíti ki. □

Az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai Az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai nem alkotnak alteret. Legegyszerűbben ez onnan látszik, hogy a zérusvektor minden altérnek eleme, viszont egyetlen inhomogén egyenletrendszernek sem megoldása! Ugyanakkor az inhomogén lineáris egyenletrendszer és a hozzá tartozó homogén egyenletrendszer megoldásai közt egy igen fontos kapcsolat van.

3.17. tétel (Homogén és inhomogén egyenletrendszer megoldásai). *Az inhomogén lineáris* $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ *mátrixú egyenletrendszer általános megoldása megkapható úgy, hogy egy partikuláris megoldásához hozzáadjuk a hozzá tartozó homogén* $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ *mátrixú egyenletrendszer általános megoldását.*

$$\boxed{\begin{matrix}\text{inhomogén}\\ \text{általános}\\ \text{megoldása}\end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix}\text{inhomogén egy}\\ \text{partikuláris}\\ \text{megoldása}\end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix}\text{homogén}\\ \text{általános}\\ \text{megoldása}\end{matrix}}$$

Bizonyítás. Jelölje az egyenletrendszer együtthatómátrixát $\mathbf{A}$, annak sorvektorait $\mathbf{a}_{1*}$, $\mathbf{a}_{2*}$,…,$\mathbf{a}_{m*}$, és jelölje $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, a konstans tagok vektorát. Legyen $\mathbf{x}$ az inhomogén egyenletrendszer egy partikuláris megoldása, és jelölje $\mathcal{H}$ a homogén, $\mathcal{I}$ az inhomogén egyenletrendszer megoldáshalmazát. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{x} + \mathcal{H} = \mathcal{I}$, ahol a bal oldali összeadást elemenként értjük.

$\mathbf{x}+\mathcal{H} \subseteq \mathcal{I}$: Meg kell mutatnunk, hogy ha $\mathbf{x}$-hez adjuk a $\mathcal{H}$ egy tetszőleges $\mathbf{y}$ elemét, az inhomogén egyenletrendszer egy megoldását kapjuk. Valóban, $\mathbf{x}$, illetve $\mathbf{y}$ eleget tesz az

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} &= b_i, \\ \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{y} &= 0, \qquad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

egyenleteknek. Ebből

$$\mathbf{a}_{i*} \cdot (\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{y} = b_i + 0 = b_i.$$

tehát $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ megoldása az inhomogén egyenletrendszernek, azaz $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in \mathcal{I}$.

$\mathbf{x}+\mathcal{H} \supseteq \mathcal{I}$: Meg kell mutatnunk, hogy ha $\mathbf{z}$ az inhomogén egy tetszőleges megoldása, azaz $\mathbf{z} \in \mathcal{I}$, akkor található olyan $\mathbf{y} \in \mathcal{H}$, hogy $\mathbf{z} = \mathbf{x}+\mathbf{y}$. Valóban, az $\mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$ megteszi, mert

$$\mathbf{a}_{i*} \cdot (\mathbf{z}-\mathbf{x}) = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = b_i - b_i = 0.$$

fennáll minden $i = 1, 2, \dots, m$ indexre, azaz $\mathbf{z} - \mathbf{x} \in \mathcal{H}$. □

E tétel azt jelenti, hogy ugyan az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmaza *nem altér*, de egy *altér eltoltja*. Az ilyen halmazokat geometriai nyelven *affin altereknek* is szokás nevezni. Eltolt altereket mutat a 3.7. ábra.

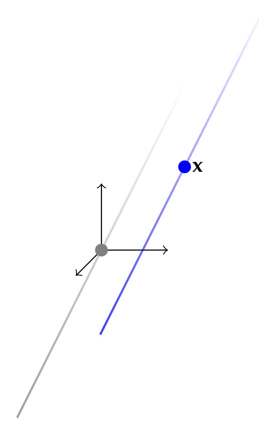
E tételt szemléltetik a 2.35. és a 2.37. példák is.

Ha általában szeretnénk ábrázolni az inhomogén egyenletrendszer megoldását a levéldiagramon, azt könnyen megtehetjük egy eltolt altér szemléltetésével, ahogy azt a 3.8. ábra mutatja.

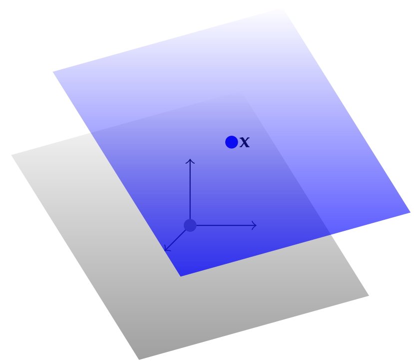
Az előző tétel szerint az inhomogén egyenletrendszer összes megoldása a homogén összes megoldásának – azaz $\mathcal{N}(\mathbf{A})$-nak – az inhomogén valamelyik megoldásával való eltoltja. Fontos látnunk, hogy mindegy melyik megoldást választjuk az inhomogén megoldásai közül, bár az eltolás mértéke változik, az eredmény ugyanaz lesz. Ezt jól szemlélteti a 3.7. ábra: ha az origón átmenő egyenes (sík) origónál lévő pontját nem $\mathbf{x}$-be, hanem az eltolt egyenes (sík) egy másik pontjába toljuk, akkor a két eltolt altér fedi egymást.

Az inhomogén $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ egyenletrendszer megoldásai nem alkotnak alteret, de azok a $\mathbf{b}$ vektorok, melyre az egyenletrendszer megoldható, igen. Ezek ugyanis az oszlopmodell szerint épp azok a vektorok, melyek az együtthatómátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként előállnak. Az ilyen vektorok pedig alteret alkotnak, mégpedig az $\mathbf{A}$ oszlopvektorai által kifeszített alteret. Ezt nevezzük oszloptérnek.

3.18. definíció (Sortér, oszloptér). *Egy mátrix oszlopvektorai által kifeszített alteret* oszloptérnek*, a sorvektorai által kifeszített alteret* sortérnek *nevezzük.*

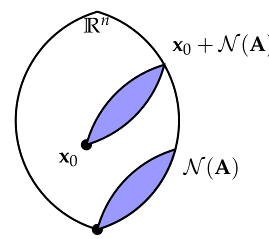


a)



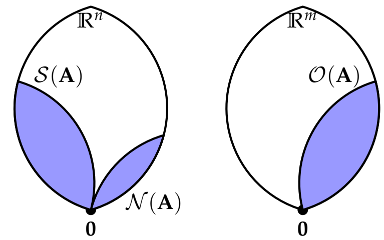
b)

3.7. ábra: *a)* Egy háromismeretlenes inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza, ha az általános megoldás egyparaméteres; *b)* Egy háromismeretlenes inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza, ha az általános megoldás kétparaméteres.



3.8. ábra: Az $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú homogén egyenletrendszer megoldása a nulltér, azaz $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, az inhomogéné e tér egy $\mathbf{x}_0 + \mathcal{N}(\mathbf{A})$ eltoltja, ahol $\mathbf{x}_0$ az inhomogén egyenletrendszer egy megoldása.

Az $m \times n$-es valós $\mathbf{A}$ mátrix sortere $\mathbb{R}^n$ altere, oszloptere $\mathbb{R}^m$ altere. Az $\mathbf{A}$ sorterét $\mathcal{S}(\mathbf{A})$-val, oszlopterét $\mathcal{O}(\mathbf{A})$-val jelöljük (ld. 3.10 ábra).

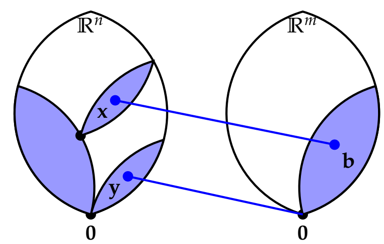


3.9. ábra: Az $\mathbf{A}$ mátrix sortere ($\mathcal{S}(\mathbf{A})$), oszloptere ($\mathcal{O}(\mathbf{A})$) és nulltere ($\mathcal{N}(\mathbf{A})$).

Az oszlopmodellt használva az is látható, hogy egy lineáris kombináció együtthatóinak meghatározása egy egyenletrendszer megoldását jelenti.

3.19. KÖVETKEZMÉNY (INHOMOGÉN EGYENLETRENDSZER MEGOLDHATÓSÁGA). *Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathbf{b}$ előáll az $\mathbf{A}$ oszlopainak lineáris kombinációjaként, azaz $\mathbf{b}$ benne van az $\mathbf{A}$ oszlopterében. A lineáris kombináció együtthatói megegyeznek a megoldásvektor koordinátáival.*

3.20. PÉLDA (KIFESZÍTETT ALTÉR VEKTORAI). *Határozzuk meg, hogy a $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, -2, 1)$ és $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 1)$ vektorok által kifeszített altérnek eleme-e az $\mathbf{u} = (-1, 2, -3, 6)$ vektor! Ha igen, adjunk meg egy ezt bizonyító lineáris kombinációt is! Mutassuk meg, hogy a $\mathbf{w} = (-1, 2, -3, 4)$ vektor nem eleme az altérnek!*



3.10. ábra: A nulltér, a sortér, és az oszloptér, valamint a homogén $\mathbf{Ay} = \mathbf{0}$ és az inhomogén $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egy-egy megoldása a levéldiagramban.

MEGOLDÁS. Olyan x_1, x_2, x_3 valósokat keresünk, melyekkel $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}$ fennáll. Ez egy négy egyenletből álló egyenletrendszerrel ekvivalens, melynek bővített mátrixa a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ és $\mathbf{u}$ oszlopvektorokból áll. Az $\mathbf{u}$ helyett $\mathbf{w}$ vektorral egy másik hasonló egyenletrendszert is meg kell oldani. A két egyenletrendszert egyetlen bővített mátrixszal oldjuk meg, melynek oszlopvektorai $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{u}$ és $\mathbf{w}$. Ennek lépcsős alakja:

$$\left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

amiből $(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, -2)$, és $\mathbf{w}$ valóban nem áll elő lineáris kombinációként, mert a $\mathbf{w}$-t tartalmazó egyenletrendszer ellentmondásos. □

Lineáris függetlenség és összefüggőség A lineáris egyenletrendszerek megoldása és vektorok lineáris függetlenségével vagy összefüggőségével kapcsolatos kérdések szoros kapcsolatban vannak egymással.

Az előző 3.20. példa tanulsága úgy is összefoglalható, hogy egy $\mathbf{w}$ vektor pontosan akkor független az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektoraitól, vagyis az $\{ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \}$ vektorrendszertől, ha az $[\mathbf{A}|\mathbf{w}]$ egyenletrendszer nem oldható meg.

Egy $\{ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \}$ vektorrendszer lineáris függetlenségének eldöntéséhez meg kell oldani az

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

homogén lineáris egyenletrendszert. Ha van nemtriviális megoldása, akkor a vektorrendszer lineárisan összefüggő, egyébként lineárisan független. Ez igazolja az alábbi ekvivalenciákat:

3.21. KÖVETKEZMÉNY (LINEÁRIS FÜGGETLENSÉG ELDÖNTÉSE). *Tekintsük az* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_k \end{bmatrix}$ *mátrixot! Az alábbi állítások ekvivalensek:*

a) az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ *vektorok lineárisan függetlenek;*

b) az $\mathbf{A}$ *együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszernek a triviálison kívül nincs más megoldása;*

c) az $\mathbf{A}$ *lépcsős alakjának minden oszlopában van főelem, azaz* $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = k$.

3.22. PÉLDA (VEKTOROK LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGÉNEK ELDÖNTÉSE). *Mutassuk meg, hogy a 4-dimenziós* $(1, 2, 3, 4)$, $(0, 1, 0, 1)$ *és* $(1, 1, 1, 0)$ *vektorok lineárisan függetlenek.*

MEGOLDÁS. A vektorokból képzett mátrix és lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ami azt mutatja, hogy a homogén lineáris egyenletrendszernek csak egyetlen megoldása van, azaz az oszlopvektorok lineárisan függetlenek. □

Feladatok

3.1• IGAZ – HAMIS Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

a) Ha egy 10-ismeretlenes egyenletrendszer csak 6 egyenletből áll, azaz alulhatározott, akkor végtelen sok megoldása van.

b) Ha egy 10-ismeretlenes egyenletrendszer csak 6 egyenletből áll, azaz alulhatározott, akkor lehet, hogy végtelen sok megoldása van, de az is lehet, hogy csak egy.

c) Ha egy 10-ismeretlenes egyenletrendszer 20 egyenletből áll, azaz túlhatározott, akkor biztosan nem oldható meg!

d) Ha egy 10-ismeretlenes egyenletrendszer 20 egyenletből áll, akkor nem lehet végtelen sok megoldása.

3.2• ALTEREK TULAJDONSÁGAI: IGAZ – HAMIS

a) $\mathbb{R}^n$ bármely három alterének metszete altér.

b) Ha az $\mathcal{U}$ altér altere a $\mathcal{V}$ és a $\mathcal{W}$ altérnek is, akkor altere metszetüknek is.

c) Alterek egyesítése altér.

d) Minden altérnek eleme a zérusvektor.

e) Minden altérnek van legalább egy nemzérus vektora.

3.3• ALTEREK ÉS EGYENLETRENDSZEREK: IGAZ – HAMIS

a) Egy lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak.

b) Egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak.

c) Rögzített $\mathbf{A}$ mátrix mellett alteret alkotnak azok a $\mathbf{b}$ vektorok, melyekre az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ egyenletrendszer konzisztens.

d) Egy egyenletrendszer megoldásvektorainak különbségeként kapott vektorok halmaza alteret alkot.

3.4• MEGOLDHATÓSÁG: IGAZ – HAMIS

a) Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathbf{b}$ előáll $\mathbf{A}$ oszlopainak lineáris kombinációjaként.

b) Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer bármely két megoldásának különbsége megoldása a homogén $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ egyenletrendszernek.

c) Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer bármely megoldása előáll a homogén $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ mátrixú egyenletrendszer két megoldásának különbségeként.

d) Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \le \mathrm{r}(\mathbf{A})$.

e) Az n-ismeretlenes $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$.

3.5. Alteret alkotnak-e az alábbi vektorhalmazok $\mathbb{R}^3$-ben?

a) $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| = 1 \,\}$

b) $\{\, (x,y,z) : x + 2y - 3z = 0 \,\}$

c) $\{\, (x,y,z) : x + 2y - 3z = 1 \,\}$

d) $\{\, (x,y,z) : x = 2t, y = t, z = 0, t \in \mathbb{R} \,\}$

e) $\{\, (x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 0 \,\}$

f) $\{\, (x,y,z) : x^3 + y^3 + z^3 = 0 \,\}$

3.6• Mennyi lehet az $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ rang, ha az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ kibővített mátrixú egyenletrendszerről tudjuk, hogy

a) 2-ismeretlenes és megoldásainak száma végtelen;

b) inkonzisztens, és $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 4$;

c) egyetlen megoldása van és $\mathbf{A}$ 5×3-as;

d) inkonzisztens, n-ismeretlenes és 2 egyenletből áll.

3.7. Egy lineáris egyenletrendszerről tudjuk, hogy $(1,2,3)$ és $(0,1,3)$ is megoldásvektora. Adjuk meg további két megoldásvektorát! Mekkora lehet az együtthatómátrix rangja? És mekkora lehet e rang, ha az egyenletrendszer homogén?

3.8• INHOMOGÉN LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSAI Egy négyismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldását számítógéppel próbálom ellenőrizni, de más jön ki. A saját eredményem ez:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix},$$

a számítógépé ez:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

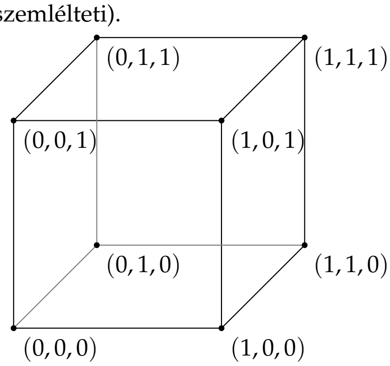
Lehet-e mindkét eredmény jó?

3.9. MEGOLDÁSOK LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA Adjunk új bizonyítást a 3.8. tételre a sormodellt használva.

3.10. HOMOGÉN ÉS INHOMOGÉN EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSAI Adjunk az oszlopmodellben megfogalmazott új bizonyítást a 3.17. tételre.

Véges testek feletti terek

3.11. $\mathbb{F}_2^3$ ALTEREI Soroljuk fel $\mathbb{F}_2^3$ összes alterét (ehhez segítségül hívhatjuk az alábbi ábrát, mely az $\mathbb{F}_2^3$ vektortér vektorait szemlélteti).



Alterek tulajdonságai és az egyenletrendszerek

E szakaszban az alterek tulajdonságait, és az egyenletrendszerek kapcsán felmerülő alterek viszonyát vizsgáljuk. Különösen fontos az együtthatómátrixhoz tartozó négy kitüntetett altér kapcsolata.

Sor- és oszloptér Az előző feladatokban a homogén lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixát lépcsős alakra hoztuk. Ebből az alakból azonban több minden leolvasható.

3.23. TÉTEL (ELEMI SORMŰVELETEK HATÁSA A SOR- ÉS OSZLOPVEKTOROKRA). *Elemi sorműveletek közben a sortér nem változik, az oszlopvektorok pedig olyan vektorokba transzformálódnak, melyek megőrzik az eredeti lineáris kapcsolatokat.*

BIZONYÍTÁS. Megmutatjuk, hogy egy mátrix sortere nem változik az elemi sorműveletek közben. A sorcserére ez nyilvánvaló. Legyenek $\mathbf{A}$ sorvektorai $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ és legyen $\mathbf{u}$ a sortér egy tetszőleges vektora, ami azt jelenti, hogy vannak olyan $c_1, c_2, \dots, c_m$ skalárok, hogy

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_m\mathbf{v}_m.$$

Ha egy sort (mondjuk az elsőt) beszorozzuk egy $d \neq 0$ skalárral, akkor $\mathbf{u}$ az új mátrix sorterében is benne van, melyet a $d\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ vektorok feszítenek ki, hisz

$$\mathbf{u} = \frac{c_1}{d}(d\mathbf{v}_1) + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_m\mathbf{v}_m.$$

Ez azt jelenti, hogy a sortér nem csökken, azaz minden vektor, ami eddig benne volt a sortérben, benne lesz az új mátrix sorterében is. A hozzáadás műveleténél ugyanezt tapasztaljuk: az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az első sor d-szeresét adjuk a második sorhoz. Ekkor az új sorteret kifeszítő vektorok: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + d\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$. Az $\mathbf{u}$ vektor e térben is benne van, ugyanis egy egyszerű átalakítás után

$$\mathbf{u} = (c_1 - c_2 d)\mathbf{v}_1 + c_2(\mathbf{v}_2 + d\mathbf{v}_1) + \dots + c_m\mathbf{v}_m.$$

Mivel minden sorművelet inverze is egy sorművelet, az inverz sorműveletben sem csökken a sortér, ami csak úgy lehet, ha a sortér az elemi sorműveletek során változatlan marad.

Megmutatjuk, hogy az elemi sorműveletek közben az oszlopvektorok közt nem változnak a lineáris kapcsolatok. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy például $c\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Mivel a skalárral való szorzás és a vektorösszeadás is koordinátánként végezhető, könnyen látható, hogy sorcsere, egy koordináta nemnulla skalárral való szorzása, vagy az i-edik koordináta konstansszorosának a j-edikhez adása után is fönn fog állni a két új vektor közt a fenti összefüggés. Tetszőleges számú vektor lineáris kombinációjára az állítás hasonlóan adódik. □

3.24. következmény (Mátrix lépcsős alakjának vektorai). *Legyen* **B** *az* **A** *mátrix egy lépcsős alakja. Ekkor*

1. **A** *és* **B** *sortere megegyezik,*
2. *az* **A** *oszlopvektorai között lévő lineáris kapcsolatok azonosak a* **B** *ugyanolyan sorszámú oszlopai közti lineáris kapcsolatokkal,*
3. **B** *nemzérus sorvektorai lineárisan függetlenek,*
4. *a főelemek oszlopvektorai* **A***-ban és* **B***-ben is lineárisan függetlenek.*

Bizonyítás. Az első két állítás közvetlen következménye az előző tételnek.

A harmadik állítás bizonyításához megmutatjuk, hogy egy lépcsős alak egy nemzérus sorvektora nem fejezhető ki a többi sorvektor lineáris kombinációjaként. Tekintsük a lépcsős alak k-adik sorvektorát. Főeleme legyen a j-edik oszlopban. E főelem nem állítható elő a k-nál nagyobb indexű sorok lineáris kombinációjával, mert azokban a j-edik koordináta 0. A k-nál kisebb indexű sorvektorok pedig nem szerepelhetnek a lineáris kombinációban, mivel a legkisebb indexű vektor főelemét a többi vektor nem eliminálhatja, pedig a k-adik sorban azon a helyen 0 áll.

Annak bizonyítása, hogy a főelemek oszlopai **B**-ben lineárisan függetlenek, ugyanúgy megy, mint a sorvektorok esetén. Innen pedig az előző tétellel adódik, hogy az ilyen indexű oszlopok **A**-ban is lineárisan függetlenek. □

► Fontos megjegyezni, hogy míg a lépcsős alak sortere megegyezik az eredeti mátrix sorterével, addig az oszloptér az elemi sorműveletek alatt megváltozik, tehát a mátrix és lépcsős alakjának oszloptere különbözik!

Bázis Az elemi sorműveleteket alkalmazva, egy mátrix sorterében és oszlopterében is találtunk olyan lineárisan független vektorokat, melyek kifeszítik az adott teret. Azt már az 1.9. tételben megmutattuk, hogy a háromdimenziós tér tetszőleges három lineárisan független vektorának lineáris kombinációjaként a tér minden vektora előáll. Más szavakkal ez azt jelenti, hogy a tér három lineárisan független vektora kifeszíti a teret. Az ilyen vektorhármasokat, melyeket egy koordinátarendszer alapvektorainak vettünk, bázisnak neveztük. Ezek vezetnek a következő definícióhoz.

3.25. definíció (Bázis). *Az* $\mathbb{R}^n$ *tér egy* alterének bázisán *olyan vektorrendszert értünk, mely*

1. *lineárisan független és*

2. *kifeszíti az alteret (azaz generátorrendszer).*
Az $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$,$\ldots$, $\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ *vektorokból álló halmazt* $\mathbb{R}^n$ standard bázisának *nevezzük.*

► Világos, hogy a zérustérnek nincs bázisa, hisz abban nincs egyetlen lineárisan független vektor sem.
► Nyilvánvaló, hogy a standard bázis $\mathbb{R}^n$ egy n-elemű bázisa.
► Hamarosan meg fogjuk mutatni, hogy $\mathbb{R}^n$ minden bázisa n-elemű, és hogy bármely alterének bázisa legfeljebb n-elemű.

3.26. PÉLDA (ALTÉR BÁZISÁNAK MEGHATÁROZÁSA). *Határozzuk meg az* $(1, 1, 0, -2)$, $(2, 3, 3, -2)$, $(1, 2, 3, 0)$ *és* $(1, 3, 6, 2)$ *vektorok által kifeszített altér egy bázisát!*

MEGOLDÁS. *Első megoldás:* A megadott vektorokból, mint sorvektorokból képzett mátrix valamely sorlépcsős alakjának nemnulla sorai az altér egy bázisát adják:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A bázis vektorai $(1, 1, 0, -2)$, $(0, 1, 3, 2)$.

Második megoldás: Ha a bázist az adott vektorokból akarjuk kiválasztani, akkor képezzünk egy mátrixot e vektorokból, mint oszlopvektorokból. Lépcsős alakjában a főelemek oszlopai lineárisan független vektorok. A nekik megfelelő oszlopvektorok az eredeti mátrixban az oszloptér bázisát alkotják (ld. a 3.23. tételt és a 3.24. következmény 4. pontjának állítását).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát az adott négy vektor közül az első kettő, azaz az $(1, 1, 0, -2)$ és $(2, 3, 3, -2)$ vektorok bázist alkotnak.

Ha a megadott vektorokat más sorrendben írjuk a mátrixba, másik bázist kaphatunk. □

3.27. PÉLDA (VEKTOR FELÍRÁSA A BÁZISVEKTOROK LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJAKÉNT). *Az előző feladatban megadott négy vektor mindegyikét fejezzük ki az általuk kifeszített altér bázisvektorainak lineáris kombinációjaként!*

MEGOLDÁS. Az előző feladat második megoldásában találtunk egy bázist a megadott vektorok közül. Mivel az oszlopvektorokkal dolgoztunk, a vektorok közti lineáris kapcsolat leolvasható bármelyik lépcsős alakból: legkényelmesebben a *redukált* lépcsős alakból. Folytatjuk tehát az előző példabeli eliminációs lépéseket:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

A redukált lépcsős alakból látjuk, hogy például a harmadik oszlop a második és az első különbsége. Ezek alapján az eredeti vektoroknak a bázisvektorok lineáris kombinációiként való felírása:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ha a megadott vektorokat más sorrendben írjuk a mátrixba, más bázisra juthatunk (ld. a 3.14. feladatot). □

3.28. ÁLLÍTÁS (BÁZIS EKVIVALENS DEFINÍCIÓI). *Legyen $\mathcal{U}$ az $\mathbb{R}^n$ egy tetszőleges altere, és legyen $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subseteq \mathcal{U}$ vektorok egy halmaza. A következő állítások ekvivalensek:*

1. *$\mathcal{B}$ lineárisan független vektorokból áll és kifeszíti az $\mathcal{U}$ alteret, azaz $\mathcal{B}$ az $\mathcal{U}$ altér bázisa;*
2. *$\mathcal{B}$ minimális méretű halmaz, mely kifeszíti $\mathcal{U}$-t;*
3. *$\mathcal{B}$ maximális méretű, független vektorokból álló halmaz $\mathcal{U}$-ban.*

BIZONYÍTÁS. Elég belátnunk, hogy egy minimális méretű generátorrendszer független vektorokból áll, és hogy egy maximális méretű független rendszer generátor.

Legyen $\mathcal{B}$ minimális méretű generátor. Ha nem volna független, akkor belőle kiválasztva független vektorokat, mely ugyanazt a teret generálja egy még kisebb méretű generátort kapnánk.

Legyen most $\mathcal{B}$ egy maximális független rendszer. Ha nem volna generátor, akkor hozzávehetnénk tőle független vektort, vagyis volna nála nagyobb méretű független halmaz. □

Vektor egy bázisra vonatkozó koordinátás alakja A koordinátarendszer bevezetésénél ugyanazt tettük, mint itt az előző példában: minden vektor előállítható egy bázis elemeinek lineáris kombinációjaként, és e vektor koordinátás alakja erre a bázisra vonatkozóan a lineáris kombináció konstansaiból áll.

Egy altérben több bázist is vizsgálhatunk, és a vektorok koordinátás alakjai különbözhetnek a különböző bázisokban. Félreértések elkerülésére a bázis jelét a koordinátás alak indexében jelöljük. Például ha egy $\mathbf{v}$ vektor standard bázisbeli és $\mathcal{B}$ bázisbeli koordinátás alakjai $(4,3)$, illetve $(0,5)$, akkor azt írjuk, hogy

$$\mathbf{v} = (4,3) = (0,5)_{\mathcal{B}}, \text{ vagy mátrixjelöléssel } \mathbf{v} = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Ha általában akarunk utalni – a konkrét koordináták nélkül – egy $\mathbf{v}$ vektor $\mathcal{B}$ bázisbeli koordinátás alakjára, akkor a $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ vagy a $(\mathbf{v})_{\mathcal{B}}$ alakot használjuk. Így írhatjuk azt is, hogy

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \text{ vagy egyszerűbben, hogy } [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}.$$

3.29. példa (Vektor koordinátás alakja a $\mathcal{B}$ bázisban). *Tekintsük a 3.26. és a 3.27. példákban is szereplő* $\mathbf{v}_1 = (1,1,0,-2)$, $\mathbf{v}_2 = (2,3,3,-2)$, $\mathbf{v}_3 = (1,2,3,0)$ *és* $\mathbf{v}_4 = (1,3,6,2)$ *vektorok által kifeszített alteret. Ennek* $\mathcal{A} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ *egy bázisa. Írjuk fel a négy vektornak e bázisra vonatkozó koordinátás alakját!*

Megoldás. Az előző példában a (3.1) képletbeli redukált lépcsős alak nemzérus soraiból álló

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -3\\0 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

mátrix azt mutatja, hogy az $\mathcal{B}$ bázisban e négy vektor koordinátái rendre

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Ez a 3.24. állítás 2. pontjából következik, mely szerint a redukált lépcsős alak oszlopai közti lineáris kapcsolatok megegyeznek az eredeti mátrix oszlopai közti lineáris kapcsolatokkal. □

Dimenzió és rang Az előzőekben bázist kerestünk egy altérhez. Azt tapasztaltuk, hogy a bázis mindig ugyanannyi vektorból állt. Ez nem véletlen. Egy különösen fontos tétel következik.

3.30. tétel (Bázis-tétel). *Tekintsük az* $\mathbb{R}^n$ *vektortér egy tetszőleges alterét. Ennek bármely két bázisa azonos számú vektorból áll.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathbb{R}^n$-nek van olyan $\mathcal{A}$ altere, és annak két olyan bázisa,

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}, \text{ és } \mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_r\},$$

melyek nem ugyanannyi vektorból állnak, azaz például $k < r$. Mivel $\mathcal{V}$ bázis $\mathcal{A}$-ban, ezért a $\mathcal{W}$ bázis vektorai is kifejezhetők lineáris kombinációikként, azaz léteznek olyan a_{ij} skalárok, hogy

$$\mathbf{w}_i = a_{i1}\mathbf{v}_1 + a_{i2}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{ik}\mathbf{v}_k, \quad (i = 1, \dots, r). \tag{3.2}$$

Mivel a $\mathcal{W}$ bázis vektorai lineárisan függetlenek, ezért a

$$c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \ldots + c_r\mathbf{w}_r = \mathbf{0} \tag{3.3}$$

egyenlőség csak a $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$ konstansokra áll fenn. A (3.2) egyenlőségeit a (3.3) egyenletbe helyettesítve

$$c_1(a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{12}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{1k}\mathbf{v}_k) + c_2(a_{21}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{2k}\mathbf{v}_k) + \\ \ldots + c_r(a_{r1}\mathbf{v}_1 + a_{r2}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{rk}\mathbf{v}_k) = \mathbf{0},$$

aminek $\mathcal{V}$ vektorai szerinti rendezése után kapjuk, hogy

$$(a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \ldots + a_{r1}c_r)\mathbf{v}_1 + (a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{r2}c_r)\mathbf{v}_2 + \\ \ldots + (a_{1k}c_1 + a_{2k}c_2 + \ldots + a_{rk}c_r)\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Ez azt jelenti, hogy a homogén lineáris

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \ldots + a_{r1}c_r &= 0 \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{r2}c_r &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad & \\ a_{1k}c_1 + a_{2k}c_2 + \ldots + a_{rk}c_r &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek a $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$ az egyetlen megoldása. Ez viszont a 3.6. tétel szerint nem teljesülhet, mivel a fenti homogén egyenletrendszer egyenleteinek száma kisebb ismeretlenjei számánál ($k < r$). Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy indirekt feltevésünk helytelen volt, tehát valóban, egy altér bármely két bázisa azonos számú vektorból áll. □

Ha a háromdimenziós térben tekintünk egy origón átmenő síkot, látjuk, hogy bármely két független vektora kifeszíti. Azaz minden bázisa kételemű. Ha egy origón átmenő egyenest tekintünk, azt minden nemnulla vektora, mint egyelemű bázisa, kifeszíti. A hétköznapi életben is használt fogalom, a dimenzió, megegyezik a bázis elemszámával. Miután egy altér minden bázisa azonos elemszámú, értelmes a következő definíció:

3.31. DEFINÍCIÓ (DIMENZIÓ). *Az* $\mathbb{R}^n$ *tér egy* $\mathcal{A}$ *alterének* dimenzióján *egy bázisának elemszámát értjük, és e számot* dim $\mathcal{A}$*-val jelöljük.*

Az $\mathbb{R}^n$ altere saját magának, és standard bázisa épp n vektorból áll, így $\dim \mathbb{R}^n = n$. A nullvektorból álló altérben nincsenek független vektorok, így dimenziója 0.

Mielőtt a következő állítást megfogalmaznánk, definálunk egy egyszerű fogalmat. Mivel a mátrixalkalmazásokban nincs olyan természetes elv, amely alapján el lehetne dönteni, hogy mely mennyiségeket rendeljünk a sorokhoz, melyeket az oszlopokhoz, ugyanakkor a számítások közben ez korántsem mindegy, ezért szükség lehet a következő egyszerű műveletre: az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix *transzponáltján* azt az $\mathbf{A}^\mathsf{T}$-vel jelölt $n \times m$-es mátrixot értjük, amelyet az $\mathbf{A}$ sorainak és oszlopainak felcserélésével kapunk. Azaz

$$\mathbf{A}^\mathsf{T} = [a_{ij}]^\mathsf{T} := [a_{ji}].$$

3.32. PÉLDA (MÁTRIX TRANSZPONÁLTJA). *Az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}$$

mátrixok transzponáltja

$$\mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Adott véges sok $\mathbb{R}^n$-beli vektor által kifeszített altér dimenzióját úgy határozhatjuk meg, hogy meghatározzuk a vektorokból képzett mátrix rangját. Igaz ugyanis a következő állítás:

3.33. ÁLLÍTÁS (DIMENZIÓ = RANG). *Egy mátrix rangja, sorterének dimenziója és oszlopterének dimenziója megegyezik. Ebből következőleg* $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$.

BIZONYÍTÁS. A mátrix rangja megegyezik a lépcsős alakjában lévő nemzérus sorainak számával. A 3.24. tétel szerint viszont e sorok lineárisan függetlenek és kifeszítik a sorteret, tehát bázist alkotnak, így számuk a sortér dimenzióját adja. Az oszloptérről láttuk, hogy a főelemeknek megfelelő oszlopok az eredeti mátrixban lineárisan függetlenek és kifeszítik az oszlopteret, tehát e tér dimenziója is a mátrix rangjával egyezik meg. Az utolsó állítás abból következik, hogy $\mathbf{A}$ sortere megegyezik $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ oszlopterével. □

3.34. DEFINÍCIÓ (VEKTORRENDSZER RANGJA). *Egy $\mathbb{R}^n$-beli vektorokból álló vektorrendszer* rangján *a vektorokból képzett mátrix rangját, vagy ami ezzel egyenlő, az általuk kifeszített altér dimenzióját értjük.*

3.35. PÉLDA (DIMENZIÓ KISZÁMÍTÁSA). *Határozzuk meg az* $\mathbf{A}$ *mátrix sorterének és nullterének dimenzióját!*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Innen leolvasható, hogy a mátrix rangja 2, így sorterének dimenziója is 2. A nulltér dimenziója megegyezik az egyenletrendszer megoldásterének dimenziójával, ami megegyezik a szabad változók számával, esetünkben ez 3. Vegyük észre, hogy a sortér és a nulltér dimenziójának összege megegyezik a változók számával, azaz a mátrix oszlopainak számával, jelen példában 5-tel. □

3.36. TÉTEL (DIMENZIÓTÉTEL). *Bármely $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix esetén a sortér dimenziójának és a nulltér dimenziójának összege n. Képlettel:*

$$\dim(\mathcal{S}(\mathbf{A})) + \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = n.$$

BIZONYÍTÁS. A mátrix sorterének dimenziója megegyezik a mátrix rangjával, azaz az $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ mátrixú egyenletrendszerben a kötött változók számával. Megmutatjuk, hogy a nulltér dimenziója megegyezik a szabad változók számával, így e két szám összege valóban n, ami bizonyítja az állítást (ld. még a 3.4. állítást).

Elég tehát megmutatnunk, hogy egy homogén lineáris egyenletrendszer redukált lépcsős alakkal előállított megoldásában a szabad változók száma megegyezik a nulltérből kiválasztható bázis elemszámával. Először lássunk egy ilyen megoldást konkrétan. Például a 2.37. példabeli homogén lineáris egyenletrendszer megoldása

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ahol $x_2 = s$, $x_4 = t$ és $x_5 = u$ a három szabad változó. A nullteret kifeszítő három vektor közül az elsőben $x_2 = 1$, de az összes többiben $x_2 = 0$, így az első vektor független a többitől. Hasonlóképp általában is igaz, hogy a redukált lépcsős alakból való származtatás következtében a nullteret kifeszítő minden megoldásvektorban az összes szabad változóhoz tartozó koordináta 0, azt az egy koordinátát kivéve, amelyikhez a vektor tartozik. Így viszont mindegyik vektor független a többitől, vagyis e vektorok függetlenek, és mivel kifeszítik a nullteret, számuk megadja a nulltér dimenzióját. □

A sortér és a nulltér merőlegessége Az $\mathbf{A}$ mátrix sorvektorai érdekes tulajdonsággal rendelkeznek. Egy homogén lineáris egyenletrendszer minden egyenletének bal oldala az együtthatómátrix egy sorvektorának és a megoldásvektornak a skaláris szorzata. Mivel e szorzat értéke 0, ezért e két vektor merőleges egymásra.

3.37. PÉLDA (VEKTOROKRA MERŐLEGES ALTÉR). *Határozzuk meg az összes olyan vektort $\mathbb{R}^4$-ben, mely merőleges a $\mathbf{v}_1 = (1,0,1,2)$ és $\mathbf{v}_2 = (-1,2,-2,1)$ vektorok mindegyikére!*

MEGOLDÁS. Olyan $\mathbf{x}$ vektort keresünk, melyre $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x} = 0$ és $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x} = 0$. Ezt koordinátákkal felírva két egyenletet kapunk, melynek együtthatómátrixa és annak egy lépcsős alakja a következő:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

amiből $\mathbf{x} = (-s-2t, (s-3t)/2, s, t)$, azaz

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A megoldás tehát két vektor által kifeszített altér összes vektora.

Másként fogalmazva, e feladatban meghatároztuk az összes olyan vektort, mely egy mátrix sorvektorainak mindegyikére merőleges. □

Az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer i-edik egyenletének alakja

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0, \text{ azaz } \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = 0.$$

Eszerint a homogén lineáris egyenletrendszer minden megoldása merőleges az $\mathbf{A}$ mátrix minden sorvektorára. A merőlegesség azonban a sortér összes vektorára is fönnáll a következő állítás következtében.

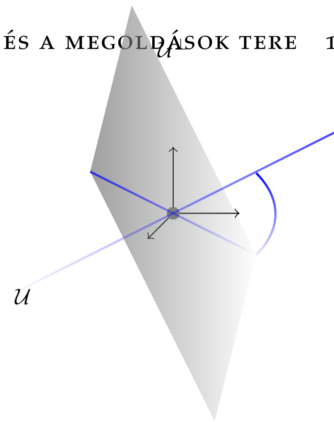
3.38. ÁLLÍTÁS (A SORTÉR ÉS A NULLTÉR MERŐLEGESSÉGE). *A valós $\mathbf{A}$ mátrix sorterének bármely $\mathbf{s}$ vektora és nullterének tetszőleges $\mathbf{x}$ vektora merőleges egymásra, azaz $\mathbf{s} \cdot \mathbf{x} = 0$.*

BIZONYÍTÁS. A sortér minden vektora az $\mathbf{A}$ sorvektorainak valamely $c_1, \ldots, c_m$ skalárokkal vett lineáris kombinációja. Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} \mathbf{s} \cdot \mathbf{x} &= (c_1\mathbf{a}_{1*} + c_2\mathbf{a}_{2*} + \cdots + c_m\mathbf{a}_{m*}) \cdot \mathbf{x} \\ &= c_1\mathbf{a}_{1*} \cdot \mathbf{x} + c_2\mathbf{a}_{2*} \cdot \mathbf{x} + \cdots + c_m\mathbf{a}_{m*} \cdot \mathbf{x} \\ &= c_1 0 + c_2 0 + \cdots + c_m 0 = 0. \end{aligned}$$

□

a)



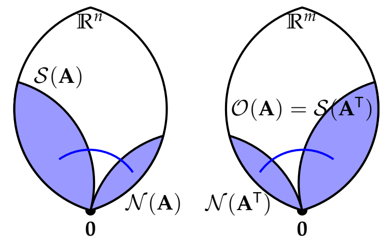
b)

3.11. ábra: *a)* Két merőleges altér $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$; *b)* Egy altér és merőleges kiegészítő altere: $\mathcal{U}$ és $\mathcal{U}^\perp$.

Ez az állítás a következő definíciókra vezet: egy vektortér két altere *merőleges*, ha bárhogy választva egy vektort az egyik altérből, és egy másikat a másik altérből, azok merőlegesek egymásra. Eszerint az előző állítás úgy fogalmazható meg, hogy bármely valós mátrix sortere és nulltere merőleges egymásra. Ennél azonban több is igaz, a nulltér nem csak merőleges a sortérre, de az összes olyan vektort tartalmazza, mely merőleges a sortérre. Az $\mathbb{R}^n$ egy $\mathcal{W}$ alterére merőleges vektorok alterét a $\mathcal{W}$ *merőleges kiegészítő alterének* nevezzük és $\mathcal{W}^\perp$-pel jelöljük (amit olvashatunk „W perp"-nek).

A két fogalom közti különbséget mutatja a 3.11. ábra, melynek *a)* része a 3-dimenziós tér két, egymásra merőleges 1-dimenziós $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ alterét szemlélteti, míg a *b)* rész az $\mathcal{U}$ alteret, és annak 2-dimenziós merőleges kiegészítő $\mathcal{U}^\perp$ alterét szemlélteti.

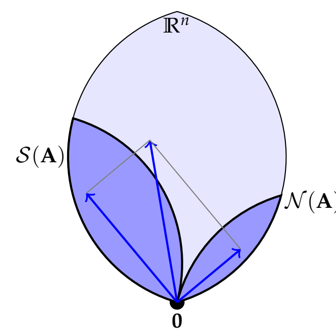
Vegyük az $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltját! Az $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai merőlegesek $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ sorvektoraira, azaz az $\mathbf{A}$ oszlopvektoraira. E két-két altér merőlegességét szemlélteti a 3.12. ábra. E négy altér igen fontos lesz a továbbiakban is, ezért ezeket a mátrixhoz tartozó *négy kitüntetett altérnek* vagy négy fundamentális altérnek nevezzük. Ezek tehát $\mathcal{S}(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{O}(\mathbf{A}) = \mathcal{S}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$.



3.12. ábra: Az $\mathbf{A}$ mátrix sortere merőleges nullterére, oszloptere az $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ nullterére. A berajzolt két ív az alterek merőlegességét jelöli.

A lineáris algebra alaptétele A nulltér az összes olyan vektort tartalmazza, mely merőleges a sorvektorokra, azaz a sortérre. Vajon a nulltér minden vektorára merőleges vektorok egybeesnek a sortér vektoraival? A válasz igen, melyet a lineáris algebra alaptétele ad meg.

3.39. TÉTEL (A LINEÁRIS ALGEBRA ALAPTÉTELE). *Minden valós mátrix sortere és nulltere merőleges kiegészítő alterei egymásnak.*



3.13. ábra: A lineáris algebra alaptétele: az $\mathbf{A}$ mátrix sortere és nulltere merőleges kiegészítő alterek. Eszerint bármely vektor, ami merőleges a nulltérre, a sortérben van. Ennek az is következménye, hogy $\mathbb{R}^n$ bármely vektora egyértelműen felbomlik egy sortérbe és egy nulltérbe eső vektor összegére.

BIZONYÍTÁS. Láttuk, hogy a sortér merőleges kiegészítő altere a nulltér. Később látni fogjuk, hogy általánosan is igaz az, hogy bármely $\mathcal{V}$ altérre $(\mathcal{V}^\perp)^\perp = \mathcal{V}$ (ld. 7.38. tétel). Ezt használva kész is a bizonyítás. Csak eddigi tudásunkra építő megoldást találunk a feladatok között (ld. 3.16. feladat)! □

► A tétel állítása képletben kifejezve azt mondja, hogy $\mathcal{S}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A})$, ami egyúttal azt is jelenti, hogy $\mathcal{N}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{S}(\mathbf{A})$.

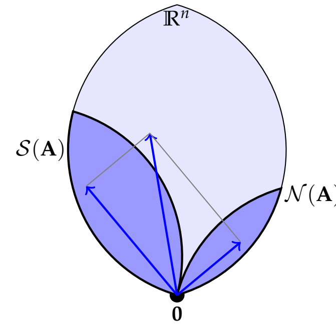
► Ha a lineáris algebra alaptételét az $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltjára alkalmazzuk, és fölhasználjuk, hogy $\mathbf{A}$ oszloptere megegyezik $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ sorterével, akkor azt kapjuk, hogy $\mathcal{O}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$.

► A tételben bizonyítottuk, hogy az $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_k\}$ és az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-k}\}$ együtt a tér bázisát adják. Mivel minden $\mathbf{x}$ vektor egyértelműen áll elő e vektorok lineáris kombinációjaként, egyúttal egyértelmű az $\mathbf{x}$ vektornak egy sortérbe és egy nulltérbe eső vektor összegére való bontása is:

$$\mathbf{x} = \underbrace{c_1\mathbf{s}_1 + \cdots + c_r\mathbf{s}_r}_{\mathbf{c}} + \underbrace{d_1\mathbf{e}_1 + \cdots + d_{n-r}\mathbf{e}_{n-r}}_{\mathbf{d}}.$$

Az előző megjegyzések és a lineáris algebra alaptételének következménye az alábbi tétel:

3.40. TÉTEL (A NÉGY KITÜNTETETT ALTÉR). *Tekintsük az* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *mátrixot. Akkor a következő állítások teljesülnek:*
a) $\mathcal{S}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{O}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$.
b) $\mathbb{R}^n$ *minden vektora egyértelműen felbomlik egy* $\mathcal{S}(\mathbf{A})$*- és egy* $\mathcal{N}(\mathbf{A})$*-beli vektor összegére,*
c) $\mathbb{R}^m$ *minden vektora egyértelműen felbomlik egy* $\mathcal{O}(\mathbf{A})$*- és egy* $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$*-beli vektor összegére.*



3.14. ábra: A lineáris algebra alaptétele: az **A** mátrix sortere és nulltere merőleges kiegészítő alterek. Eszerint a sortér bármely vektora merőleges a nulltér bármely vektorára, és $\mathbb{R}^n$ bármely vektora egyértelműen felbomlik egy sortérbe és egy nulltérbe eső vektor összegére.

A lineáris egyenletrendszer megoldásainak jellemzése E fejezet végén eljutottunk oda, hogy nagyon szép leírását tudjuk adni a lineáris egyenletrendszerek megoldásainak.

3.41. TÉTEL (LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSAI). *Minden valós együtthatós megoldható (konzisztens) lineáris egyenletrendszerre igazak a következő állítások:*
a) egyetlen megoldása esik az együtthatómátrix sorterébe;
b) a sortérbe eső megoldás az összes megoldás közül a legkisebb abszolút értékű;
c) az összes megoldás előáll úgy, hogy a sortérbe eső megoldáshoz hozzáadjuk a homogén rész összes megoldását.

BIZONYÍTÁS. A tétel a homogén lineáris egyenletrendszerekre semmitmondó, hisz ekkor a megoldások a nullteret adják, és mivel annak metszete a sortérrel csak a nullvektorból áll, ezért csak a nullvektor esik a sortérbe, mely természetesen a legkisebb abszolút értékű megoldás. Ráadásul a nullvektort hozzáadva a nulltérhez, valóban a nullteret kapjuk, vagyis az összes megoldások terét. Így ezután csak az inhomogén esettel foglalkozunk.

a) Tegyük fel, hogy $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ két megoldása az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszernek, és mindkettő a sortérbe esik. Az i-edik egyenlet alakja $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = b_i$, így $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x}_1 = b_i$ és $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x}_2 = b_i$ is fönnáll minden $i = 1, 2, \ldots m$ értékre. A két megoldás különbsége is a sortérbe esik, hisz sortérbeli vektorok lineáris kombinációja a sortérbe esik. Ekkor viszont minden i esetén

$$\mathbf{a}_{i*} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = b_i - b_i = 0,$$

vagyis $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ megoldása a homogén egyenletrendszernek, tehát a nulltérbe esik. Annak metszete a sortérrel csak a nullvektort tartalmazza, így $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, vagyis $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Meg kell még mutatnunk, hogy mindig van a sortérbe eső megoldás. Legyen $\mathbf{x}$ egy tetszőleges megoldás, és tekintsük az egyértelműen létező felbontását egy sortérbeli és egy nulltérbeli vektor összegére, azaz legyen

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\mathcal{S}} + \mathbf{x}_{\mathcal{N}}.$$

E megoldásvektort beírva az i-edik egyenletbe kapjuk, hogy

$$b_i = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a}_{i*} \cdot (\mathbf{x}_{\mathcal{S}} + \mathbf{x}_{\mathcal{N}}) = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x}_{\mathcal{S}} + \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x}_{\mathcal{S}}.$$

Ez azt jelenti, hogy bármely megoldás sortérbeli összetevője is megoldása az egyenletrendszernek! Találtunk tehát egy megoldást a sortérben. Egyúttal azt is beláttuk, hogy az összes megoldás e sortérbeli megoldás és a homogén egy megoldásának összege. Az előző egyenlőségekből az is kiolvasható, hogy az $\mathbf{x}_{\mathcal{S}}$ megoldáshoz bármely nulltérbeli vektort adva az egyenletrendszer egy megoldását kapjuk, igazoltuk tehát a *c)* állítást is.

A sortér és a nulltér merőlegessége miatt az $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\mathcal{S}} + \mathbf{x}_{\mathcal{N}}$ felbontás vektorai merőlegesek, azaz $\mathbf{x}_{\mathcal{S}} \perp \mathbf{x}_{\mathcal{N}}$. Használhatjuk tehát Pithagorász-tételét:

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}_{\mathcal{S}}^2 + \mathbf{x}_{\mathcal{N}}^2 \geq \mathbf{x}_{\mathcal{S}}^2, \text{ azaz } |\mathbf{x}| \geq |\mathbf{x}_{\mathcal{S}}|.$$

Így tehát minden megoldás abszolút értéke nagyobb vagy egyenlő a sortérbeli megoldás abszolút értékénél, ami bizonyítja a *b)* állítást is. □

A sortérbe eső egyetlen megoldás létezése azt sugallja, hogy minden megoldható egyenletrendszer további egyenletek hozzávételével kiegészíthető olyan egyenletrendszerré, melynek már csak egyetlen megoldása van. Ez valóban igaz.

3.42. PÉLDA (LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER SORTÉRBE ESŐ MEGOLDÁSA). *Határozzuk meg az*

$$\begin{aligned} x + y + z + 3u + 2w &= 4 \\ x + 2y + z + 5u + 2w &= 5 \\ 2x + 3y + z + 8u + 3w &= 7 \\ 2x + 3y + 2z + 8u + 4w &= 9 \end{aligned}$$

egyenletrendszer minimális abszolút értékű megoldását! Adjunk az egyenletrendszerhez olyan további egyenlet(ek)et, hogy az így kapott egyenletrendszernek csak ez legyen az egyetlen megoldása!

MEGOLDÁS. Először oldjuk meg az egyenletrendszert! A bővített mátrixból annak redukált lépcsős alakja könnyen adódik:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 8 & 4 & 9 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Így a megoldás:

$$(x, y, z, u, w) = (1, 1, 2, 0, 0) + (-1, -2, 0, 1, 0)u + (-1, 0, -1, 0, 1)w.$$

Mivel a sortér merőleges a nulltérre, és mi egy sortérbe eső megoldást keresünk, ezért e megoldásnak merőlegesnek kell lennie a nullteret kifeszítő vektorokra, vagyis a $(-1, -2, 0, 1, 0)$ és a $(-1, 0, -1, 0, 1)$ vektorra. Így a következő két egyenletet kell az eredeti egyenletrendszerhez, vagy az egyszerűség kedvéért inkább a redukált lépcsős alak szerinti egyenletrendszerhez adni:

$$\begin{aligned} -x - 2y \quad\; + u \quad\; &= 0 \\ -x \qquad - z \qquad + w &= 0 \end{aligned}$$

Így a kiegészített egyenletrendszer bővített mátrixa és annak redukált lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4/17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5/17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 19/17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6/17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 15/17 \end{bmatrix},$$

tehát a keresett megoldás $(-4/17, 5/17, 19/17, 6/17, 15/17)$. □

*Elemi bázistranszformáció** Az előző paragrafusokban azt láttuk, hogy az elemi sorműveletek eredményeként az eredeti mátrix oszlopainak egy másik bázisban felírt koordinátás alakját kapjuk meg. Ez adja az ötletet ahhoz, hogy az altérből választott bázisok segítségével szemléltessük, és értsük meg mi történik akkor, amikor a mátrix egy oszlopában főelemet (pivotelemet) választunk, és oszlopának többi elemét elimináljuk. Így egy másik megközelítéshez jutunk, melyet a továbbiakban nem használunk, ezért e paragrafus átugorható.

A folyamat lényege egy kétoszlopos mátrixon is jól szemléltethető. Az egyszerűség kedvéért a két oszlop legyen az **a** és a **b** vektor, a bázis, melyben e vektorok meg vannak adva, legyen a standard bázis. Tegyük fel, hogy $a_i \neq 0$. Ekkor az a_i pozícióját választva, a kiküszöbölés eredményeként a következőket kapjuk.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_i & b_i \\ \vdots & \vdots \\ a_m & b_m \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & b_1 - \frac{b_i}{a_i}a_1 \\ 0 & b_2 - \frac{b_i}{a_i}a_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{b_i}{a_i} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & b_m - \frac{b_i}{a_i}a_m \end{bmatrix}$$

Tudjuk, az oszlopok az elemi sorműveletek után az eredeti vektorokat adják egy másik bázisban. Az $\mathbf{a}$ vektor nyilvánvalóan egy olyan bázisban lett felírva, amelyben szerepel az $\mathbf{a}$ vektor is, mégpedig ez az i-edik bázisvektor. Megmutatjuk, hogy mindkét oszlop az

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{a}, \mathbf{e}_{i+1}, \ldots, \mathbf{e}_m$$

bázisban lett felírva. Az $\mathbf{a}$ vektorra ez nyilván igaz. Nézzük a $\mathbf{b}$ vektort! Fejezzük ki az $\mathbf{e}_i$ vektort az $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_i\mathbf{e}_i + \ldots + a_m\mathbf{e}_m$ felírásból:

$$\mathbf{e}_i = -\frac{1}{a_i}a_1\mathbf{e}_1 - \frac{1}{a_i}a_2\mathbf{e}_2 - \ldots + \frac{1}{a_i}\mathbf{a} - \ldots - \frac{1}{a_i}a_m\mathbf{e}_m.$$

Ezt behelyettesítjük a $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + \ldots + b_i\mathbf{e}_i + \ldots + b_m\mathbf{e}_m$ kifejezésbe:

$$\mathbf{b} = (b_1 - \frac{b_i}{a_i}a_1)\mathbf{e}_1 + (b_2 - \frac{b_i}{a_i}a_2)\mathbf{e}_2 + \ldots + \frac{b_i}{a_i}\mathbf{a} + \ldots + (b_m - \frac{b_i}{a_i}a_m)\mathbf{e}_m.$$

Tehát valóban, a $\mathbf{b}$ koordinátás alakja e módosított bázisban épp az, amit az eredeti mátrix eliminálása után kaptunk a második oszlopban. Az imént tárgyalt lépést elemi bázistranszformációnak nevezzük, mert egy másik bázisra való áttérés egy elemi lépésének tekintjük, amikor egyetlen bázisvektort cserélünk ki. A történtek szemléltetésére a mátrixot fejléccel együtt egy táblázatba írjuk, a sorok elé az $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ bázisvektorok, az oszlopok fölé az oszlopvektorok neve kerül.

$$\begin{array}{c|cc}
 & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\
\hline
\mathbf{e}_1 & a_1 & b_1 \\
\mathbf{e}_2 & a_2 & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{e}_i & a_i & b_i \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{e}_m & a_m & b_m
\end{array}
\quad\Longrightarrow\quad
\begin{array}{c|cc}
 & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\
\hline
\mathbf{e}_1 & 0 & b_1 - \frac{b_i}{a_i}a_1 \\
\mathbf{e}_2 & 0 & b_2 - \frac{b_i}{a_i}a_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{a} & 1 & \frac{b_i}{a_i} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{e}_m & 0 & b_m - \frac{b_i}{a_i}a_m
\end{array}$$

Összefoglalva és egyúttal általánosabban megfogalmazva a fentieket:

3.43. TÉTEL (ELEMI BÁZISTRANSZFORMÁCIÓ). *Tegyük fel, hogy az* $\mathbf{a}$ *vektor* $E = \{\,\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\,\}$ *bázisra vonatkozó i-edik koordinátája* $a_i \neq 0$. *Ekkor az* E *által generált* $\mathcal{E}$ *altérnek az*

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{a}, \mathbf{e}_{i+1}, \ldots, \mathbf{e}_m$$

vektorok is bázisát alkotják. Az $\mathcal{E}$ *egy tetszőleges* b *vektorának koordinátás alakja megkapható e bázisban elemi sorműveletekkel, ha* a_i*-t választjuk főelemnek.*

Az elemi bázistranszformáció alkalmas arra, hogy a bázisok változásán keresztül egy más nézőpontból világítsa meg a redukált lépcsős alakra hozással megoldható feladatokat. Példaként vizsgáljuk meg, mi történik egy egyenletrendszer megoldásakor. Megjegyezzük, hogy itt nincs szükség sorcserére, mert egy oszlopból szabadon választhatunk olyan sort, amelynek fejlécében még az eredeti bázisvektor szerepel.

3.44. példa (Egyenletrendszer megoldása elemi bázistranszformációval). *Oldjuk meg a 2.34. és a 2.42. példában megoldott egyenletrendszert elemi bázistranszformációval.*

Megoldás. A táblázatokat egybefűzzük, a sorok fejlécein mindig jelezzük az aktuális bázist, az oszlopok fejléceit a jobb érthetőség végett mindig kiírjuk, a kiválasztott főelemeket külön jelöljük:

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{b}$		$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{b}$		$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{b}$		$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{e}_1$	$\boxed{1}$	1	2	0	$\mathbf{a}_1$	1	1	2	0	$\mathbf{a}_1$	1	0	3	-5	$\mathbf{a}_1$	1	0	0	1
$\mathbf{e}_2$	2	2	3	2	$\mathbf{e}_2$	0	0	-1	2	$\mathbf{e}_2$	0	0	-1	2	$\mathbf{e}_2$	0	0	0	0
$\mathbf{e}_3$	1	3	3	4	$\mathbf{e}_3$	0	2	1	4	$\mathbf{e}_3$	0	0	$\boxed{3}$	-6	$\mathbf{a}_3$	0	0	1	-2
$\mathbf{e}_4$	1	2	1	5	$\mathbf{e}_4$	0	$\boxed{1}$	-1	5	$\mathbf{a}_2$	0	1	-1	5	$\mathbf{a}_2$	0	1	0	3

A táblázaton kicsit lehet egyszerűsíteni, azt az oszlopot, amelyben már csak egy standard egységvektor van, felesleges kiírni, az oszlopok és a sorok fejléceibe pedig elég csak azt a változót írni, amelyik a bázisba vett oszlopvektorhoz tartozik. Így a következőt kapjuk:

x	y	z	$\mathbf{b}$		y	z	$\mathbf{b}$		z	$\mathbf{b}$		$\mathbf{b}$
$\boxed{1}$	1	2	0	x	1	2	0	x	3	-5	x	1
2	2	3	2		0	-1	2		-1	2		0
1	3	3	4		2	1	4		$\boxed{3}$	-6	z	-2
1	2	1	5		$\boxed{1}$	-1	5	y	-1	5	y	3

Az egyenletrendszer megoldása tehát $x = 1$, $y = 3$, $z = -2$. □

Feladatok

3.12. • BÁZIS: IGAZ – HAMIS

a) A $\mathcal{V}$ altérben a $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ vektorrendszer bázis, ha tetszőleges $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektor egyértelműen felírható e vektorok lineáris kombinációjaként.

b) Van olyan altér, melynek bármely nemnulla vektora bázis.

c) Van olyan altér, melynek van kételemű bázisa, és van ettől különböző három lineárisan független vektora.

3.13. Egy lineáris egyenletrendszerről tudjuk, hogy együtthatómátrixának rangja 2, és hogy $(1,2,3)$ és $(0,1,3)$ is megoldásvektora. Adjuk meg az összes megoldását!

3.14. Határozzuk meg a 3.27. példabeli vektorok által kifeszített altér egy másik bázisát úgy, hogy a vektorokat más sorrendben írjuk a mátrixba. Legyen például a sorrend $\mathbf{w}_1 = (1,1,2,1)$, $\mathbf{w}_2 = (3,1,3,2)$, $\mathbf{w}_3 = (6,0,3,3)$, $\mathbf{w}_4 = (2,-2,-2,0)$. Fejezzük ki mind a négy vektort ezek lineáris kombinációjaként! Végül írjuk fel mind a négy vektor koordinátás alakját e bázisban!

3.15. GRAM-MÁTRIX Igazoljuk, hogy a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_k \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k \end{bmatrix}$$

mátrix – az ún. *Gram-mátrix* rangja pontosan akkor k, ha az $\mathbb{R}^n$-beli $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineárisan függetlenek.

3.16. LINEÁRIS ALGEBRA ALAPTÉTELE Igazoljuk a lineáris algebra alaptételét!

A SORTÉRBE ESŐ MEGOLDÁS MEGHATÁROZÁSA *Keressük meg az alábbi egyenletrendszerek sortérbe eső egyetlen megoldását, és annak segítségével írjuk fel összes megoldását!*

3.17. •
$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + y - z &= 2 \\ 3x + 2y \phantom{{}-z} &= 5 \end{aligned}$$

3.18. $x + 4y + 8z + 12w = 225$

3.19. •
$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 3 \\ x + y - z - w &= 1 \end{aligned}$$

Megoldások

3.1. Mindegyik állítás hamis.

3.2. *a)* Igaz. *b)* Igaz. *c)* Hamis, csak akkor igaz, ha egyik a másik altere. *d)* Igaz. *e)* Hamis, a zérustér az egyetlen zérusvektorból áll.

3.3. *a)* Hamis, csak a homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alkotnak alteret, az inhomogéné eltolt alteret. *b)* Igaz. *c)* Igaz. Ez épp az oszloptér, ugyanis csak az oszloptérből való $\mathbf{b}$ vektorokra oldható meg az egyenletrendszer. *d)* Igaz. Ez épp a nulltér vektorait adja, ami altér.

3.4. *a)* Igaz. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* Igaz, ugyanis az állításbeli $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \leq \mathrm{r}(\mathbf{A})$ feltétel pontosan akkor teljesül, ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \mathrm{r}(\mathbf{A})$, és ez pontosan akkor teljesül, ha az egyenletrendszer megoldható. *e)* Hamis, ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$, és az egyenletrendszer több, mint n egyenletből áll, akkor előfordulhat, hogy $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n+1$, és ekkor az egyenletrendszer nem oldható meg!

3.5. *a)* Nem, egységvektor konstansszorosai nem egységvektorok. *b)* Igen (origón átmenő sík). *c)* Nem (eltolt sík). *d)* Igen, ez egy origón átmenő egyenes vektoraiból áll. *e)* Igen, ez a zérustér. *f)* Nem, az $(1,-1,0)$ és az $(1,0,-1)$ vektor benne van, de az összegük nincs e halmazban.

3.6. *a)* $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \leq 1$. A 0 rang csak úgy fordulhat elő, ha az összes egyenlet $0 = 0$ alakú – nem egy érdekes eset. Ha a rang 1, akkor a kötött és a szabad változók száma is 1. *b)* $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 5$. *c)* $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$. *d)* $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2$.

3.7. Két megoldásvektor különbsége, azaz az $(1,2,3) - (0,1,3) = (1,1,0)$ vektor biztosan megoldása az egyenletrendszer homogén részének. Akkor viszont ennek minden skalárszorosa is megoldás, így azokat bármelyik fenti megoldáshoz adjuk, újabb megoldásokat kapunk. Például megoldás az $(1,2,3) + (1,1,0) = (2,3,3)$ és az $(1,2,3) + 2(1,1,0) = (3,4,3)$ vektor is.

Mivel az ismeretlenek száma 3, és azok legalább egyike szabad változó, ezért a rang legföljebb 2. Ha viszont e megoldások egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai, akkor a megoldások közt van legalább két lineárisan független megoldás, így a szabad változók száma legalább kettő, vagyis a kötötteké legföljebb 1, tehát az együtthatómátrix rangja is legföljebb 1.

3.8. Első ránézésre csak annyi látszik, hogy mindkét megoldás egy kétdimenziós altér eltoltja. Először megvizsgáljuk, hogy a két altér – vagyis az egyenletrendszer homogén részére adott két megoldás – egybeesik-e. Elég megmutatni, hogy az egyik altérben benne van a másikat generáló két vektor. Ha igen, a két altér megegyezik. Ezesetben el kell dönteni, hogy az inhomogén két partikuláris megoldása az altérnek ugyanabban az eltoltjában van-e. Vagy egyszerűbben, hogy a két partikuláris megoldás különbsége benne van-e az altérben. E kérdéseket egyetlen mátrix lépcsős alakra hozásával is megoldhatjuk. Az első két oszlop az első, a második két oszlop a második altér generátorait tartalmazza, az ötödik oszlop a két partikuláris megoldás különbsége.

$$\left[\begin{array}{rr|rr|r} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{rr|rr|r} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Az eredményből látszik, hogy a két megoldás azonos.

3.9. Ha $\mathbf{a}_{i*}$ jelöli az együtthatómátrix i-edik sorát és $\mathbf{x}$, illetve $\mathbf{y}$ a homogén egyenletrendszer egy-egy megoldását, azaz $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = 0$, $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{y} = 0$ $(i = 1, 2, \dots, m)$, akkor

$$\mathbf{a}_{i*} \cdot (c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = c\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} + d\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{y} = 0 + 0 = 0,$$

tehát a két megoldásvektor bármely lineáris kombinációja is megoldás. Másként fogalmazva a homogén lineáris egyenletrendszerek megoldásainak bármely lineáris kombinációja is megoldás, tehát a megoldások alteret alkotnak.

3.10. Legyen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ az inhomogén egy partikuláris megoldása, és jelölje $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,…,$\mathbf{a}_n$ az $\mathbf{A}$ oszlopvektorait, $\mathcal{H}$ a homogén, $\mathcal{I}$ az inhomogén egyenletrendszer általános megoldását. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{x} + \mathcal{H} = \mathcal{I}$, ahol a bal oldali összeadást elemenként értjük.

$\mathbf{x} + \mathcal{H} \subseteq \mathcal{I}$: Meg kell mutatnunk, hogy ha $\mathbf{x}$-hez adjuk a $\mathcal{H}$ egy tetszőleges $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in H$ elemét, az inhomogén egyenletrendszer egy megoldását kapjuk. Valóban, $\mathbf{x}$, illetve $\mathbf{y}$ eleget tesz az

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{b}, \text{ illetve} \\ &\mathbf{a}_1 y_1 + \mathbf{a}_2 y_2 + \ldots + \mathbf{a}_n y_n = \mathbf{0} \end{aligned}$$

egyenletnek. Ebből

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}_1(x_1 + y_1) + \mathbf{a}_2(x_2 + y_1) + \ldots + \mathbf{a}_n(x_n + y_1) = \\ &(\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_n x_n) + (\mathbf{a}_1 y_1 + \mathbf{a}_2 y_2 + \ldots + \mathbf{a}_n y_n) = \\ &\mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}, \end{aligned}$$

tehát $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ megoldása az inhomogén egyenletrendszernek, azaz $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{I}$.

$\mathbf{x} + \mathcal{H} \supseteq \mathcal{I}$: Meg kell mutatnunk, hogy ha $\mathbf{z}$ az inhomogén egy tetszőleges megoldása, azaz $\mathbf{z} \in \mathcal{I}$, akkor található olyan $\mathbf{y} \in \mathcal{H}$, hogy $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$. Valóban, az $\mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$ megteszi, mert

$$\begin{aligned}&\mathbf{a}_1(z_1 - x_1) + \mathbf{a}_2(z_2 - x_1) + \ldots + \mathbf{a}_n(z_n - x_1) = \\ &(\mathbf{a}_1 z_1 + \mathbf{a}_2 z_2 + \ldots + \mathbf{a}_n z_n) - (\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_n x_n) = \\ &\mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0},\end{aligned}$$

azaz $\mathbf{z} - \mathbf{x} \in \mathcal{H}$.

3.11. Összesen 16 altere van $\mathbb{F}_2^3$-nek. Van egy 0-dimenziós, a $\mathcal{Z} = \{\mathbf{0}\}$ tér. Az egydimenziós alterek a nullvektorból és egyetlen tőle különböző további vektorból állnak (7 ilyen altér van). A kétdimenziós alterek mindegyike a nullvektorból, két további egymástól is különböző vektorból és azok összegéből áll. Ezeket felsoroljuk:

$$\begin{gathered}\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\},\\ \{(0,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,1,1)\},\\ \{(0,0,0),(0,0,1),(1,0,0),(1,0,1)\},\\ \{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,1),(1,1,1)\},\\ \{(0,0,0),(0,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\},\\ \{(0,0,0),(0,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\},\\ \{(0,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}.\end{gathered}$$

Végül altér maga $\mathbb{F}_2^3$ is.

3.12. 1. Igaz. 2. Igaz, bármely 1-dimenziós altér ilyen. 3. Hamis, ha van kételemű bázis, akkor a lineárisan független vektorrendszerek elemszáma legföljebb 2.

3.13. Mivel az egyenletrendszer 3-ismeretlenes, és a rang 2, ezért a kötött változók száma 2, a szabad változóké 1, és így a nulltér dimenziója is 1. A két vektor független egymástól, tehát az egyenletrendszer nem lehet homogén, akkor ugyanis legalább kettő lenne a nulltér dimenziója. Az egyenletrendszer tehát inhomogén, és a megadott két megoldás különbsége a homogén rész egy megoldását adja, annak összes skalárszorosa pedig az összes megoldását. Így az inhomogén összes megoldása: $(1,2,3) + t(1,1,0)$.

3.14. A mátrix és annak redukált lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 3 & 2\\ 6 & 0 & 3 & 3\\ 2 & -2 & -2 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Eszerint bázisvektoroknak választhatjuk a $\mathbf{w}_1 = (1,3,6,2)$ és a $\mathbf{w}_2 = (1,1,0,-2)$ vektorokat. A többi vektor kifejezhető ezek lineáris kombinációjaként:

$$\begin{bmatrix}2\\3\\3\\-2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\3\\6\\2\end{bmatrix} + \frac{3}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-2\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}1\\2\\3\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\3\\6\\2\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-2\end{bmatrix}.$$

A redukált lépcsős alak nemzérus soraiból álló

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2\end{bmatrix}$$

mátrixból kiolvasható, hogy a fenti altérnek $\mathcal{B} = \{\, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \,\}$ bázisa, és ebben a bázisban a négy vektor koordinátás alakja rendre

$$\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}1/2\\3/2\end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

3.15. E mátrix rangja pontosan akkor k, ha oszlopvektorai lineárisan függetlenek, azaz ha az oszlopvektorok bármely lineáris kombinációja csak úgy lehet a nullvektor, ha minden együttható 0. Tekintsünk az oszlopvektorok egy $c_1, \ldots, c_k$ skalárokkal vett, nullvektort adó lineáris kombinációját. Ennek i-edik koordinátája

$$\begin{aligned}0 &= c_1\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_k\\ &= \mathbf{v}_i \cdot (c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k).\end{aligned}$$

Tehát azt kaptuk, hogy az $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$ vektor olyan, hogy a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok mindegyikével vett skaláris szorzata 0, így ezek bármelyik lineáris kombinációjával vett skaláris szorzata is 0, tehát például az $\mathbf{x}$ vektorral vett szorzat is 0, azaz $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$. Ez viszont csak $\mathbf{x} = 0$ esetén állhat fönn, és mivel a $\mathbf{v}_i$ vektorok lineárisan függetlenek, csak a $c_i = 0$ konstansokkal vett lineáris kombinációjuk lehet 0, ahol $i = 1, 2, \ldots, k$.

3.16. Megmutatjuk, hogy a nulltér merőleges kiegészítő altere a sortér. Legyen a valós $\mathbf{A}$ mátrix sortere $\mathcal{S}$, nulltere $\mathcal{N}$, és ezek egy-egy bázisa $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_k\}$, illetve $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n-k}\}$. $\mathcal{S}$ és $\mathcal{N}$ merőlegessége miatt $\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ minden $i = 1, 2, \ldots, r$ és $j = 1, 2, \ldots, n-r$ esetén. E két bázis együtt $\mathbb{R}^n$ egy bázisát adja, hisz n elemű és független vektorokból áll. A függetlenség abból következik, hogy nullvektort előállító tetszőleges

$$\underbrace{c_1\mathbf{s}_1 + \cdots + c_r\mathbf{s}_r}_{\mathbf{c}} + \underbrace{d_1\mathbf{e}_1 + \cdots + d_{n-r}\mathbf{e}_{n-r}}_{\mathbf{d}} = \mathbf{0} \tag{3.4}$$

lineáris kombináció csak úgy állhat fenn, ha $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$ a két altér metszetében van, így azok mindketten a nullvektorok, és így $c_1 = \cdots = c_r = d_1 = \cdots = d_{n-r} = 0$.

Ha $\mathbf{x}$ egy olyan vektor, mely merőleges $\mathcal{N}$ minden vektorára, akkor $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n-r$). Ha

$$\mathbf{x} = y_1\mathbf{s}_1 + \cdots + y_r\mathbf{s}_r + x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_{n-r}\mathbf{e}_{n-r},$$

akkor az $\mathbf{e}_i$ vektorokkal való beszorzás a következő homogén lineáris egyenletrendszerre vezet:

$$\begin{array}{rrrr} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1)x_1 + & (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)x_2 + \ldots + & (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_r)x_n & = 0 \\ (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1)x_1 + & (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2)x_2 + \ldots + & (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_r)x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\mathbf{e}_{n-r} \cdot \mathbf{e}_1)x_1 + & (\mathbf{e}_{n-r} \cdot \mathbf{e}_2)x_2 + \ldots + & (\mathbf{e}_{n-r} \cdot \mathbf{e}_{n-r})x_n & = 0 \end{array}$$

Ez pedig egyértelműen megoldható, mert együtthatómátrixának rangja r. Ennek bizonyítását az Olvasóra hagyjuk. Egy bizonyítás látható a 3.15. feladatban, egy másik, egyszerűbb a **??** feladatban.

3.17. Az egyenletrendszer bővített mátrixának redukált lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

így a megoldása $(x, y, z) = (-1, 4, 0) + (2, -3, 1)t$. A nullteret a $(2, -3, 1)$ vektor feszíti ki, a sortérbe eső vektornak erre merőlegesnek kell lennie, tehát fönn kell állnia a

$$2x - 3y + z = 0$$

egyenletnek is. Ezt az egyenletet a redukált lépcsős alakból származó egyenletrendszerhez (vagy akár az eredetihez) adva egy egyetlen megoldást adó egyenletrendszert kapunk. Ennek bővített mátrixa és annak redukált lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Innen a sortérbe eső megoldás $(1, 1, 1)$.

3.18. A sortérbe eső megoldás meghatározása egyetlen egyenlet esetén egyszerű. Mivel a sorteret az $(1, 4, 8, 12)$ vektor feszíti ki, ennek egy skalárszorosát keressük, mellyel vett skalárszorzata 225. Mivel $1^2 + 4^2 + 8^2 + 12^2 = 15^2 = 225$, ezért a sortérbe eső egyetlen megoldás $(x, y, z, w) = (1, 4, 8, 12)$. A homogén egyenletrendszer összes megoldását meghatározva majd hozzáadva kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

az összes megoldás.

3.19. A bővített mátrix és redukált lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-s \\ s \\ 1-t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Tehát a nullteret a $(-1, 1, 0, 0)$ és a $(0, 0, -1, 1)$ vektork feszítik ki. A sortérbe eső megoldásvektor ezekre merőleges, tehát az eredeti egyenleteken kívül kielégíti a következő két egyenletet is:

$$\begin{aligned} -x + y \qquad\quad &= 0 \\ -z + w &= 0 \end{aligned}$$

Ezek mátrixával kibővítve a redukált lépcsős alakot, majd azt redukált lépcsős alakra hozva kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

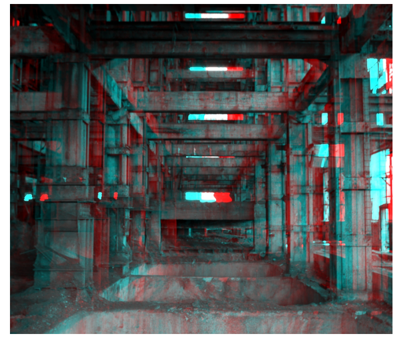
tehát a sortérbe eső megoldás $(1, 1, 1/2, 1/2)$, az összes megoldás

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

II. rész

Mátrixok algebrája és geometriája

Eddig a mátrixokat csak egyszerű jelölésnek tekintettük, mely az egyenletrendszer együtthatóinak tárolására, és az egyenletrendszer megoldása közbeni számítások egyszerűsítésére való. E részt a számok közti műveletek számtáblázatokra való kiterjesztésével kezdjük, majd ezeket átültetjük mátrixokra, és megvizsgáljuk algebrai tulajdonságaikat. E műveletek segítségével újravizsgáljuk az egyenletrendszerek megoldhatóságának és a megoldások kiszámításának kérdését. A mátrixok „számtani" fejezetei után a „mértaniak" következnek: a determináns, mint a négyzetes mátrixhoz rendelt előjeles mérték, majd a mátrixleképezések geometriája lesz e rész tárgya.



Enter The Matrix – 3D picture (CC) on flickr by Grégory Tonon

4
Mátrixműveletek definíciói

Az egyenletrendszerek megoldásához és vizsgálatához hatékony eszközökhöz jutunk a mátrixműveletek bevezetésével. E műveletek számtalan egyéb alkalmazásban játszanak fontos szerepet, melyekkel a könyv további részében mindenütt találkozni fogunk.

Műveletek táblázatokkal – műveletek mátrixokkal

A valós számok közti műveletek természetes módon kiterjeszthetők mátrixokkal való műveletekké. Ezek definícióihoz az összeadás és a szorzás hétköznapi alkalmazásainak táblázatokra való kiterjesztésén keresztül fogunk eljutni.

Táblázattal nap, mint nap találkozunk. Számszerű adatok téglalap alakban elrendezett, áttekinthető összefoglalására való. Általában a sorok előtt és az oszlopok fölött van egy *fejléc*, melyben az adott sor, illetve oszlop adatait jellemző valamely információ áll (például az oszlop számadatainak közös mértékegysége). Táblázatok használata kikerülhetetlen a gazdasági adatok kezelésében, így minden irodai szoftvercsomag tartalmaz táblázatkezelőt, de a mérnöki vagy természettudományos közleményekben is nélkülözhetetlen eszköz.

A mátrixra úgy is tekinthetünk, mint amelyet egy olyan absztrakció során kapunk a táblázatból, melyben azt megfosztjuk fejléceitől, az adatokból pedig csak a számokat őrizzük meg, azok jelentésétől, mértékegységétől eltekintünk.

Táblázatok összeadása 3 alma meg 2 alma az 5 alma. Az összeadás e művelete természetes módon kiterjeszthető gyümölcsök számadatait tartalmazó táblázatokra. Ha két gyümölcskosárban piros és zöld alma és szőlő van az alábbi táblázatok szerint, akkor összeöntésük után számukat így számolhatjuk:

	alma (db)	*szőlő* (fürt)
piros	3	2
zöld	2	1

$+$

	alma (db)	*szőlő* (fürt)
piros	2	2
zöld	0	1

$=$

	alma (db)	*szőlő* (fürt)
piros	5	4
zöld	2	2

Azonos méretű, azonos fejlécű táblázatok összeadásának egy lehetséges módja az, ha az azonos pozícióiban lévő elemek összeadásával képezzük az összeget.

Táblázat szorzása számmal Az asztalon 2 alma van. Ha számukat megháromszorozzuk, összeszorzunk egy mértékegység nélküli számot (3) egy mértékegységgel rendelkezővel (2 darab), és az eredmény mértékegysége is ez. Ezt megtehetjük egy kosár egész tartalmával is:

$$3 \cdot \begin{array}{lcc} & \textit{alma} & \textit{szőlő} \\ & \text{(db)} & \text{(fürt)} \\ \hline \textit{piros} & 3 & 2 \\ \textit{zöld} & 2 & 1 \end{array} = \begin{array}{lcc} & \textit{alma} & \textit{szőlő} \\ & \text{(db)} & \text{(fürt)} \\ \hline \textit{piros} & 9 & 6 \\ \textit{zöld} & 6 & 3 \end{array}$$

Táblázatok szorzása Egy adag (e példában a továbbiakban mindig 10 dkg) alma energiatartalma 30 kcal. Mennyi 5 adag energiatartalma? A választ ismét szorzással kapjuk meg – most mindkét mennyiség mértékegységgel is rendelkezik:

$$5\,\text{adag} \cdot 30\,\frac{\text{kcal}}{\text{adag}} = 150\,\text{kcal}.$$

Több gyümölcsből (alma, banán, narancs) többféle (A, B, C) gyümölcssalátát készítünk, és a szénhidrát- és energiatartalmukat szeretnénk összehasonlítani. Két táblázatot készítünk, egyikbe a gyümölcssaláták összetételét, a másikba az összetevők szénhidrát- és energiatartalmát írjuk. Mindkét táblázatban a sorokba kerülnek azok a tételek, melyek összetételét/összetevőit részletezzük, az oszlopokba pedig az összetevők.

	Alma (adag)	*Banán* (adag)	*Narancs* (adag)
A	5	1	4
B	4	4	2
C	4	2	4

	Szénhidrát (g/adag)	*Energia* (kcal/adag)
Alma	7	30
Banán	24	105
Narancs	8	40

A következőképp tudjuk az A saláta energiatartalmát kiszámítani:

$$5\,\text{adag} \cdot 30\,\frac{\text{kcal}}{\text{adag}} + 1\,\text{adag} \cdot 105\,\frac{\text{kcal}}{\text{adag}} + 4\,\text{adag} \cdot 40\,\frac{\text{kcal}}{\text{adag}} = 415\,\text{kcal},$$

vagyis az első táblázat egy sorának és a második táblázat egy oszlopának kellett a skaláris szorzatát venni. Végezzük el e számításokat mindhárom gyümölcssaláta szénhidrát és energiatartalmára is, és az eredményt ismét egy olyan táblázatba tegyük, melynek soraiba a részletezendő tételek (A, B, C saláta), oszlopaiba a tartalmi összetevők (szénhidrát-, energiatartalom) kerüljenek.

	Szénhidrát (g)	*Energia* (kcal)
A	91	415
B	140	620
C	108	490

Az áttekinthetőség kedvéért a két összeszorzandó mátrixot és az eredményt úgy helyezzük el, hogy az elvégzett műveletek jobban követhetőek legyenek. Az A saláta energiatartalmát kiemeljük:

	Szénhidrát (g/adag)	**Energia (kcal/adag)**
Alma	7	**30**
Banán	24	**105**
Narancs	8	**40**

	Alma (adag)	*Banán* (adag)	*Narancs* (adag)
A	**5**	**1**	**4**
B	4	4	2
C	4	2	4

	Szénhidrát (g)	*Energia* (kcal)
A	91	**415**
B	140	620
C	108	490

Érdemes megfigyelni, hogy ha csak az A és C gyümölcssalátákra vagyunk kiváncsiak, elég az első táblázat és a végeredmény második sorát elhagyni, hasonlóképp ha csak az energiatartalmat figyeljük, elég a második táblázat és a végeredmény második oszlopát megtartani. Az is látszik, hogy az első táblázat oszlopainak és a második táblázat sorainak száma megegyezik. Általában az igaz, hogy (a fejléceket nem számolva) egy $m \times n$-es táblázat csak olyan $p \times k$-as táblázattal szorozható össze, ahol $p = n$, és az eredmény $m \times k$-as lesz.

Lineáris helyettesítés A lineáris algebra alapvető fogalmai megfogalmazhatóak a lineáris helyettesítés nyelvén.

4.1. definíció (Lineáris helyettesítés). *Lineáris helyettesítésről akkor beszélünk, ha változók egy halmazát más változók konstansszorosainak összegeként állítjuk elő, azaz változókat más változók lineáris kifejezéseivel helyettesítünk.*

Tekintsük például a következő két lineáris helyettesítést:

$$\begin{aligned} a &= 5x + y + 4z \\ b &= 4x + 4y + 2z \\ c &= 4x + 2y + 4z \end{aligned} \quad \text{és} \quad \begin{aligned} x &= 7s + 30k \\ y &= 24s + 105k \\ z &= 8s + 40k \end{aligned} \tag{4.1}$$

Egy kis időre e két lineáris helyettesítést is táblázatokkal írjuk le:

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline a & 5 & 1 & 4 \\ b & 4 & 4 & 2 \\ c & 4 & 2 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{c|rr} & s & k \\ \hline x & 7 & 30 \\ y & 24 & 105 \\ z & 8 & 40 \end{array} \tag{4.2}$$

4.2. PÉLDA (LINEÁRIS HELYETTESÍTÉSEK KOMPOZÍCIÓJA). *Tekintsük a (4.1)-ben megadott két lineáris helyettesítést! Az első majd a második helyettesítés egymás után való elvégzése – más szóval* kompozíciója *– milyen helyettesítéssel egyenértékű, és az lineáris-e?*

MEGOLDÁS. Az $a = 5x + y + 4z$ kifejezésben helyettesítsük x, y és z helyébe a második lineáris helyettesítés szerinti kifejezéseket, azaz

$$a = 5x+y+4z = 5(7s+30k)+(24s+105k)+4(8s+40k) = 91s+415k.$$

Emeljük ki pl. a k együtthatójának kiszámítását:

$$5 \cdot 30 + 1 \cdot 105 + 4 \cdot 40 = 415.$$

Mint látjuk ez az első helyettesítés táblázata első sorának és második táblázat második oszlopának skaláris szorzata. Hasonló módon b és c is kifejezhető s és k segítségével, így kapjuk, hogy a két lineáris helyettesítés egymásutánja ekvivalens az

$$\begin{aligned} a &= 91s + 415k \\ b &= 140s + 620k \\ c &= 108s + 490k \end{aligned}$$

helyettesítéssel. Ez lineáris, hisz a számolás közben lineáris kifejezéseket csak konstanssal szoroztunk, és ezeket adtuk össze. Ennek a helyettesítésnek a táblázata

$$\begin{array}{c|rr} & s & k \\ \hline a & 91 & 415 \\ b & 140 & 620 \\ c & 108 & 490 \end{array}$$

vagyis azt kaptuk, hogy a lineáris helyettesítések kompozíciójának táblázataik szorzata felel meg. □

$$\begin{array}{c|ccc} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ \hline & x & y & z \\ \hline a & 5 & 1 & 4 \\ b & 4 & 4 & 2 \\ c & 4 & 2 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{c|rr} & s & k \\ \hline x & 7 & 30 \\ y & 24 & 105 \\ z & 8 & 40 \\ \hline & s & k \\ \hline a & 91 & 415 \\ b & 140 & 620 \\ c & 108 & 490 \end{array}$$

Mátrixok Az eddigiek alapján megfogalmazhatjuk: az m sorba és n oszlopba rendezett mn darab szám rendszerét $m \times n$-típusú *mátrixnak* nevezzük. A mátrixban szereplő számokat a mátrix elemeinek nevezzük. Eleinte csak valamely algebrai struktúra (egész, valós, komplex) elemeit fogjuk a mátrixba írni, később pl. függvények mátrixait is vizsgálni fogjuk.

4.3. DEFINÍCIÓ (ADOTT TÍPUSÚ MÁTRIXOK TERE). *Legyen S egy tetszőleges halmaz (pl. $S = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{Z} \ldots$). Az S elemeiből képzett összes $m \times n$-es mátrixok halmazát jelölje*

$$S^{m \times n}.$$

Azt mondjuk, hogy $S^{m\times n}$ az S fölötti $m \times n$ típusú mátrixok tere.

Például az $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix eleme az $\mathbb{N}^{2\times 2}$, $\mathbb{Z}^{2\times 2}$, $\mathbb{Q}^{2\times 2}$, $\mathbb{R}^{2\times 2}$ terek mindegyikének.

Két mátrixot akkor tekintünk *egyenlőnek*, ha azonos típusúak, és az azonos indexű elemek egyenlőek. Például az $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{smallmatrix}\right]$ egyenlőség pontosan akkor áll fönn, ha $x = 4$. Fontos felidézni, hogy minden vektornak megfeleltethetünk egy sor- vagy oszlopvektor alakba írt mátrixot, azok azonban nem egyenlők egymással. Például

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

mert nem azonos típusúak, így el kell dönteni, hogy e két mátrix közül melyik reprezentálja a $(1, 2, 3)$ vektort. Mint említettük, a modern matematika legtöbb területén alapértelmezésben az oszlopvektorokat rendeljük a vektorokhoz. E könyvben mi is így teszünk (kivéve a kódelméleti alkalmazásokat).

Egy mátrix *négyzetes*, ha sorainak és oszlopainak száma megegyezik. Az $\mathbf{A}$ mátrix főátlójának elemei a_{11}, a_{22}, $a_{33}, \ldots$. Ez nem csak négyzetes mátrixra értelmezhető. Az olyan négyzetes mátrixot, melynek főátlón kívüli elemei mind nullák, *diagonális mátrixnak* nevezzük. Az ilyen mátrixok egyszerű megadására a diag függvényt használjuk, melynek argumentumába a főátló elemei vannak felsorolva. Például

$$\operatorname{diag}(1, 2, 3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Elemenkénti mátrixműveletek Több olyan mátrixműveletet ismerünk, melyben a számok közt már értelmezett műveletet úgy általánosítjuk mátrixokra, hogy azt a mátrix vagy mátrixok minden elemén végrehajtjuk. Ilyen pl. a mátrixok összeadása és skalárral való szorzása.

4.4. DEFINÍCIÓ (MÁTRIXOK ÖSSZEGE, KÜLÖNBSÉGE). *Az $m \times n$-es típusú $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ és $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ mátrixok összegén azt az ugyancsak $m \times n$-es típusú, és $\mathbf{A} + \mathbf{B}$-vel jelölt mátrixot értjük, melynek i-edik sorában a j-edik elem $a_{ij} + b_{ij}$, ahol $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Képletben:*

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij}] + [b_{ij}] := [a_{ij} + b_{ij}].$$

Hasonlóan definiálható $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ különbsége is, azaz $\mathbf{A} - \mathbf{B} := [a_{ij} - b_{ij}]$.

```
OCTAVE a = [1 2 3
>           4 5 7]
a =
   1   2   3
   4   5   7

OCTAVE b = [1 2;3 4]
b =
   1   2
   3   4

OCTAVE diag([1,2,3])
ans =
   1   0   0
   0   2   0
   0   0   3

OCTAVE a(2,3)
ans =  7
OCTAVE a(2,:)
ans =
   4   5   7

OCTAVE a(:,3)
ans =
   3
   7

OCTAVE v = [1 2 3]
v =
   1   2   3

OCTAVE w = [1;2;3]
w =
   1
   2
   3

OCTAVE size(v)
ans =
   1   3

OCTAVE size(w)
ans =
   3   1
```

4.1. ábra: Mátrix megadása, elemeinek, sorainak és oszlopainak és azok számának lekérdezése mátrix alapú nyelvekben.
A mátrixalapú nyelvekben mátrixok közötti elemenkénti művelet definiálható a műveleti jel elé tett ponttal. Így az `A` és `B` mátrixok elemenkénti szorzata az

```
A .* B
```

paranccsal kapható meg. Eszerint az `A .+ B` és `A + B` kódok az eredményt tekintve ekvivalensek.

4.5. PÉLDA (MÁTRIXOK ÖSSZEGE, KÜLÖNBSÉGE). *Ellenőrizzük az alábbi műveleteket!*

$$\begin{bmatrix}0 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 4 & 5\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}.$$

4.6. DEFINÍCIÓ (ZÉRUSMÁTRIX). *A csupa nullából álló mátrixokat zérusmátrixoknak nevezzük. Az $m \times n$-es zérusmátrixot $\mathbf{O}_{m\times n}$, míg az $n \times n$-es négyzetes zérusmátrixot $\mathbf{O}_n$ jelöli.*

Tetszőleges $\mathbf{A}$ mátrixhoz egy azonos típusú zérusmátrixot adva $\mathbf{A}$-t kapunk, azaz $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$.

4.7. DEFINÍCIÓ (MÁTRIX SZORZÁSA SKALÁRRAL). *Az $m \times n$-es típusú $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ mátrix c számmal képzett szorzatán azt az ugyancsak $m \times n$-es típusú, és $c\mathbf{A}$-val jelölt mátrixot értjük, melyre*

$$c\mathbf{A} = c[a_{ij}] := [ca_{ij}].$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix *ellentettjének* azt a $-\mathbf{A}$-val jelölt mátrixot nevezzük, melyre $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O}$. Könnyen megmutatható, hogy ilyen mátrix csak egy van, nevezetesen $-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A}$.

Azonos méretű mátrixokon még számtalan elemenkénti művelet definiálható, ezek azonban az alkalmazásokban és a matematikán belül is lényegesen ritkábban fordulnak elő, ezért nem definiáljuk őket és nem vezetünk be rájuk jelölést. Érdekességként mutatunk egy példát egy ilyen műveletre.

A digitális képfeldolgozásban, ahol a képpontokra (pixelekre) bontott kép adatai mátrixokban vannak tárolva, sok művelet elemenkénti mátrixművelettel valósítható meg. A 4.2. ábra mátrixa az alatta lévő férfiarc 9 szürkeárnyalatos képe, melyen a háttér egy egyszerű elemenkénti művelettel megváltoztatható (részletek a 4.6. feladatban).

$$\begin{bmatrix}
9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9\\
9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9\\
9&9&9&9&9&6&3&4&5&3&2&2&5&6&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9\\
9&9&9&9&4&1&0&0&2&2&0&0&0&4&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9\\
9&9&9&4&1&0&0&1&1&1&1&0&1&1&3&9&9&9&9&9&9&9&9&9\\
9&9&4&1&0&1&2&1&0&0&0&1&2&1&0&4&9&9&9&9&9&9&9&9\\
9&9&2&2&2&2&1&1&0&1&1&3&3&2&1&0&5&9&9&9&9&9&9&9\\
9&5&1&2&3&3&2&1&2&2&4&4&3&2&1&0&3&9&9&9&9&9&9&9\\
9&3&1&3&7&8&7&6&6&5&6&4&3&2&2&0&2&9&9&9&9&9&9&9\\
9&4&1&5&8&8&8&7&6&5&5&4&3&2&2&1&0&6&9&9&9&9&9&9\\
9&5&2&5&8&8&7&6&5&5&5&4&4&3&2&2&1&3&7&9&9&9&9&9\\
9&9&2&3&6&7&7&6&5&5&4&4&4&0&0&0&3&3&5&9&9&9&9&9\\
9&9&5&1&4&6&7&7&7&5&4&3&1&1&1&1&2&3&4&9&9&9&9&9\\
9&9&9&2&2&6&7&5&1&0&2&3&1&2&3&2&2&3&3&9&9&9&9&9\\
9&9&9&7&1&6&6&1&0&1&1&6&3&2&2&3&3&2&3&9&9&9&9&9\\
9&9&9&7&3&6&4&2&3&3&5&8&4&3&3&3&2&2&4&9&9&9&9&9\\
9&9&9&9&5&6&6&7&5&3&7&8&6&3&3&4&3&2&3&7&7&7&7&9\\
9&9&9&9&7&4&7&8&7&5&7&8&8&4&3&4&3&2&3&7&3&3&4&5\\
9&9&9&9&9&7&7&6&6&7&7&6&6&2&2&3&3&3&3&4&3&3&3&5\\
9&9&9&9&9&9&8&6&6&7&5&7&7&2&3&3&2&3&3&3&3&3&3&4\\
9&9&9&9&9&5&3&5&6&7&5&7&7&4&2&1&3&3&2&3&3&3&3&3\\
9&9&9&8&6&1&3&7&6&6&5&4&3&2&3&3&3&3&3&3&3&4&4&3\\
9&9&9&7&5&3&2&7&8&6&5&4&6&4&2&3&3&2&3&3&3&4&4&3\\
9&9&7&6&5&4&2&7&8&7&6&4&4&4&6&4&3&1&4&4&6&6&6&6\\
9&8&7&6&4&4&3&7&8&8&6&6&3&5&3&1&0&1&6&8&7&6&6&5\\
8&8&7&5&4&3&4&7&8&8&6&2&2&0&1&2&3&8&7&7&7&7&7&6\\
8&8&7&5&4&3&4&6&8&8&6&5&2&0&1&1&6&8&8&7&7&6&5&3\\
8&8&8&5&4&4&4&4&7&8&5&5&3&3&1&3&8&8&8&6&6&5&6&4\\
8&8&8&7&5&4&4&4&6&8&7&5&2&2&5&8&8&8&8&7&6&3&3&2\\
6&8&7&5&6&5&4&3&4&7&7&7&4&4&7&8&8&8&8&7&6&7&6&4\\
4&7&6&4&4&6&5&4&4&5&6&7&7&7&7&8&8&8&8&8&6&4&2&3\\
6&4&7&5&3&4&6&4&4&4&5&7&8&6&8&8&8&8&7&4&2&1&2&3
\end{bmatrix}$$

4.2. ábra: Egy elemenkénti mátrixművelet a képfeldolgozásban

Mátrixok lineáris kombinációi A vektorokhoz hasonlóan, a skalárral való szorzás és az összeadás művelete lehetővé teszi, hogy mátrixokra is definiáljuk a *lineáris kombináció*, a *lineáris függetlenség* és a *kifeszített altér* fogalmát. A vektorokra korábban adott definíciók kis változtatással kimondhatók, ha a vektorok helyébe azonos típusú mátrixokat helyettesítünk.

4.8. PÉLDA (MÁTRIXOK LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA). *Számítsuk ki a*

$$2\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & -2\\ -1 & 0\end{bmatrix}.$$

lineáris kombinációt!

MEGOLDÁS. Először a skalárral való szorzásokat végezzük el:

$$2\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 2\\ 4 & 2\\ 0 & -2\end{bmatrix}, \quad -3\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & -2\\ -1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 0\\ 3 & 6\\ 3 & 0\end{bmatrix},$$

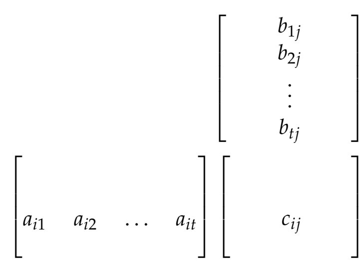
majd az összeadást:

$$\begin{bmatrix}0 & 2\\ 4 & 2\\ 0 & -2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-3 & 0\\ 3 & 6\\ 3 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 2\\ 7 & 8\\ 3 & -2\end{bmatrix}.$$

A műveletek természetesen elemenként is elvégezhetők, pl. a második sor első eleme így is megkapható: $2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 7$. □

Látjuk, a mátrixok az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve a vektorokhoz hasonlóan viselkednek. Mondhatjuk, hogy az $\mathbb{R}^{m\times n}$-beli $m \times n$-es mátrixok e két műveletre nézve úgy viselkednek, mint $\mathbb{R}^{mn}$ vektorai (csak másként vannak elrendezve). Beszélhetünk ezért arról, hogy $\mathbb{R}^{m\times n}$ egy mn-dimenziós vektortér. Lásd erről pl. a 4.7. és a 4.8. feladatokat.

Mátrixszorzás A táblázatok szorzásánál látott szabályt követjük a következő definícióban:



4.9. DEFINÍCIÓ (MÁTRIXOK SZORZÁSA). *Egy $m \times t$-s **A** és egy $t \times n$-es **B** mátrix szorzatán azt az **AB**-vel jelölt $m \times n$-es **C** mátrixot értjük, amelynek i-edik sorában és j-edik oszlopában álló eleme*

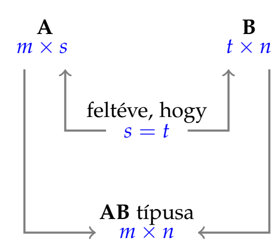
$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} + \ldots + a_{it}b_{tj}.$$

A definícióbeli összefüggés több módon is kifejezhető. Szummával fölírva:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{t} a_{ik}b_{kj},$$

de mondhatjuk azt is, hogy c_{ij} az **A** mátrix i-edik sorának és a **B** mátrix j-edik oszlopának skaláris szorzata, azaz

$$c_{ij} = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{b}_{*j}.$$



Fontos kiemelni, hogy egy $m \times s$-es **A** és egy $t \times n$-es **B** mátrix csak akkor szorozható össze, ha $s = t$, és ekkor a szorzat $m \times n$ típusú.

Nyilvánvaló, hogy a szorzás sorrendje fontos. Lehet, hogy az **AB** szorzás elvégezhető, de a **BA** nem, és lehet, hogy elvégezhető, de különböző eredményt kapunk (ld. a 4.10. feladatot). Mivel a mátrixszorzás nem felcserélhető, ha szükséges, az „**A**-t balról szorozzuk **B**-vel”, vagy az „**A**-t jobbról szorozzuk **B**-vel” kifejezésekkel teszünk különbséget a **BA** és az **AB** szorzatok közt.

4.10. PÉLDA (MÁTRIXOK SZORZÁSA). *Legyen*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Számítsuk ki az $\mathbf{AB}$ *szorzat második sorának elemeit, azaz az* $(\mathbf{AB})_{2*}$ *sor-mátrixot!*

MEGOLDÁS. A szorzat második sorának elemei az $\mathbf{A}$ második sorának $\mathbf{B}$ oszlopaival való szorzatából kaphatók meg:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

□

Fontosak azok a mátrixszorzatok, amelyekben az egyik mátrixnak csak egy sora vagy oszlopa van, tehát sor- vagy oszlopvektor. Egy $1 \times m$-es mátrixot, azaz egy sorvektort jobbról, egy $n \times 1$-es mátrixot, azaz egy oszlopvektort balról lehet beszorozni egy $m \times n$-es mátrixszal. Például

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Műveletek blokkmátrixokkal Hatalmas méretű mátrixokkal végzett műveletek párhuzamosíthatók, és a memóriakezelésük is hatékonyabbá válik, ha a mátrixokat blokkokra osztjuk, és a műveleteket is e kisebb részmátrixokkal végezzük.

Ha egy mátrixot néhány vízszintes és függőleges vonallal részmátrixokra bontunk, azt mondjuk, hogy e mátrix a részmátrixokból – más néven blokkokból – alkotott *blokkmátrix*. Egy egyenletrendszer $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ bővített mátrixa egy két blokkból álló blokkmátrixnak is tekinthető.

Az alábbi példa egy 5-ismeretlenes, 5 egyenletből álló egyenletrendszer bővített mátrixának redukált lépcsős alakját mutatja:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{B}_{13} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \mathbf{B}_{23} \end{bmatrix}.$$

Az első blokkoszlop a kötött változóknak, a második a szabad változóknak, a harmadik az egyenletrendszer jobb oldalának felel meg. A második blokksor a zérussorokat tartalmazza.

Egy blokkmátrix sorait és oszlopait szokás a mátrix *blokksorainak* és *blokkoszlopainak* nevezni a közönséges soroktól és oszlopoktól való megkülönböztetés végett. Pl. a fenti blokkmátrix első blokksorának elemei $\mathbf{B}_{11}$, $\mathbf{B}_{12}$, $\mathbf{B}_{13}$.[1]

4.11. állítás (Műveletek blokkmátrixokkal). *Blokkmátrixok skalárral való szorzása és két azonos módon particionált blokkmátrix összeadása blokkonként is elvégezhető, azaz*

$$c[\mathbf{A}_{ij}] := [c\mathbf{A}_{ij}], \qquad [\mathbf{A}_{ij}] + [\mathbf{B}_{ij}] := [\mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij}].$$

Ha $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ik}]_{m\times t}$, $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_{kj}]_{t\times n}$ *két blokkmátrix, és minden* k*-ra az* $\mathbf{A}_{ik}$ *blokk oszlopainak száma megegyezik* $\mathbf{B}_{kj}$ *sorainak számával, akkor a* $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ *szorzat kiszámítható a szorzási szabály blokkokra való alkalmazásával is, azaz* $\mathbf{C}$ *olyan blokkmátrix, melynek* i*-edik blokksorában és* j*-edik blokkoszlopában álló blokk*

$$\mathbf{C}_{ij} = \sum_{k=1}^{t} \mathbf{A}_{ik}\mathbf{B}_{kj}.$$

4.12. példa (Műveletek blokkmátrixokkal). *Végezzük el az alábbi műveletet blokkmátrixokkal számolva!*

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1\\ \hline 2 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1\\ 1 & 2\\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} 1 & 4\\ \hline 1 & 1\\ 6 & 0 \end{array}\right].$$

Megoldás. Először ellenőrizzük, hogy a műveletek valóban elvégezhetők lesznek blokkmátrixokként számolva is. Valóban, az első mátrix blokkoszlopai 2- és 1-oszloposak, míg a második mátrix blokksorai 2- és 1-sorosak. A szorzat pedig azonos típusú lesz a harmadik mátrixszal, tehát összeadhatók. A blokkokat mátrixokkal helyettesítve, majd a mátrixműveleteket elvégezve kapjuk, hogy

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\\ \hline \begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\\ \hline \begin{bmatrix}0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix}1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}4\end{bmatrix}\\ \hline \begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\\ \hline \begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix}1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}4\end{bmatrix}\\ \hline \begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix}1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2\end{bmatrix}\\ \hline \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}\end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix}1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}4\end{bmatrix}\\ \hline \begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix}2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}6\end{bmatrix}\\ \hline \begin{bmatrix}4\\9\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}6\\7\end{bmatrix}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 2 & 6\\ \hline 4 & 6\\ 9 & 7 \end{array}\right]$$

Ellenőrizzük a számítást közönséges mátrixműveletekkel! □

[1] A blokkmátrixokra a szakirodalomban a *hipermátrix* elnevezés is el van terjedve. Ekkor a blokksorokat hipersoroknak, a blokkoszlopokat hiperoszlopoknak nevezzük. Mi kerüljük e szóhasználatot a hipermátrix másik – többdimenziós tömb értelmű – jelentése miatt.

*Kroneceker-szorzat és a vec-függvény** Blokkmátrixok összege, skalárszorosa és szorzata ugyanazt az mátrixot adja eredményül, mint amit egyszerű mátrixműveletekkel kapunk. Vannak azonban olyan blokkmátrixműveletek is, amelyek nem származtathatóak egyszerű mátrixműveletekből.

A vec függvény egy tetszőleges mátrixot vektorrá alakít a mátrix oszlopvektorainak egymás alá tételével. Tehát ha $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\dots|\mathbf{a}_n]$, akkor

$$\operatorname{vec}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}.$$

Például, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \text{ akkor } \operatorname{vec}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Legyen $\mathbf{A}$ egy $m \times n$-es, $\mathbf{B}$ egy $p \times q$-as mátrix. *Kronecker-szorzatukon* (vagy más néven *tenzorszorzatukon*) azt az $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$-vel jelölt $mp \times nq$ méretű mátrixot értjük, melynek blokkmátrix alakja

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \dots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

Például

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -3 & -3 & -3 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

A vec függvény és a Kronecker-szorzat tulajdonságai közül néhányat kiemelünk.

4.13. TÉTEL (A KRONECKER-SZORZAT TULAJDONSÁGAI). *Adva van az* $\mathbf{A}_{m\times n}$, $\mathbf{B}_{m\times n}$, $\mathbf{C}_{p\times q}$ *és* $\mathbf{D}_{r\times s}$ *mátrix. Ekkor*

a) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\otimes\mathbf{C} = \mathbf{A}\otimes\mathbf{C}+\mathbf{B}\otimes\mathbf{C}$, $\mathbf{C}\otimes(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{C}\otimes\mathbf{A}+\mathbf{C}\otimes\mathbf{B}$,

b) $(\mathbf{A}\otimes\mathbf{C})\otimes\mathbf{D} = \mathbf{A}\otimes(\mathbf{C}\otimes\mathbf{D})$,

c) $(\mathbf{A}\otimes\mathbf{C})^{\mathsf{T}} = \mathbf{C}^{\mathsf{T}}\otimes\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$,

A vec függvény és a Kronecker-szorzat közös tulajdonságait a lineáris mátrixegyenletek megoldásánál fogjuk használni:

4.14. TÉTEL (A KRONECKER-SZORZAT ÉS A VEC-FÜGGVÉNY TULAJDONSÁGAI). *Adva van az* $\mathbf{A}_{m\times n}$, $\mathbf{B}_{p\times q}$ *és* $\mathbf{X}_{n\times p}$ *mátrix. Ekkor*
a) $\operatorname{vec}(\mathbf{AX}) = (\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{A})\operatorname{vec}(\mathbf{X})$, $\operatorname{vec}(\mathbf{XB}) = (\mathbf{B}^\mathsf{T} \otimes \mathbf{I}_n)\operatorname{vec}(\mathbf{X})$,
b) $\operatorname{vec}(\mathbf{AXB}) = (\mathbf{B}^\mathsf{T} \otimes \mathbf{A})\operatorname{vec}(\mathbf{X})$,
c) $\operatorname{vec}(\mathbf{AX} + \mathbf{XB}) = (\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{A} + \mathbf{B}^\mathsf{T} \otimes \mathbf{I}_n)\operatorname{vec}(\mathbf{X})$.

BIZONYÍTÁS. A fenti állítások mindegyike közvetlenül bizonyítható a definíció alapján. Szemléltetésül megmutatjuk a *b)* bizonyítását.

$$\begin{aligned}
[\mathbf{AXB}]_{*j} = \mathbf{AXB}_{*j} &= \sum_{i=1}^{n} b_{ij}(\mathbf{AX})_{*i} = \sum_{i=1}^{n}(b_{ij}\mathbf{A})\mathbf{X}_{*i} \\
&= [b_{1j}\mathbf{A}|\dots|b_{nj}\mathbf{A}]\operatorname{vec}(\mathbf{X}) \\
&= [\mathbf{B}^\mathsf{T} \otimes \mathbf{A}]_{*j}\operatorname{vec}(\mathbf{X}) \qquad \square
\end{aligned}$$

*Műveletek hipermátrixokkal** Bizonyos adatok, természetüknél fogva, 2-nél magasabb dimenziós tömbben rendezhetők el jól. Kérdés, hogy hogyan tudjuk ezeket kezelni, tudunk-e ezekkel is számolni, és hogyan?

4.15. DEFINÍCIÓ (HIPERMÁTRIX). *Legyen* $n_1, n_2, \dots, n_d \in \mathbb{N}^+$ *és legyen* S *egy tetszőleges halmaz (pl.* $S = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}\dots$*).* d*-edrendű (vagy* d*-dimenziós)* $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_d$*-típusú* hipermátrixnak *nevezzük az*

$$\mathbf{A} : \{1,\dots,n_1\} \times \{1,\dots,n_2\} \times \dots \times \{1,\dots,n_d\} \to S$$

alakú leképezést. Az $\mathbf{A}(i_1, i_2, \dots, i_d)$ *elemet* $a_{i_1 i_2 \dots i_d}$*-vel jelöljük, melyre úgy gondolhatunk, mint egy* d*-dimenziós táblázat egy elemére és a mátrixoknál megszokotthoz hasonlóan írhatjuk, hogy*

$$\mathbf{A} = [a_{i_1 i_2 \dots i_d}]_{i_1, i_2, \dots, i_d = 1}^{n_1, n_2, \dots, n_d} \quad \text{vagy egyszerűbben} \quad \mathbf{A} = [a_{i_1 i_2 \dots i_d}].$$

Ha $n_1 = n_2 = \dots = n_d = n$*, akkor a* hiper-kockamátrixról *beszélünk.*

Az S elemeiből képzett összes $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_d$-típusú hipermátrixok halmazát

$$S^{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_d}$$

jelöli.

A másodrendű hipermátrixok egybeesnek a mátrixokkal.

A 3-adrendű hipermátrixok elemeinek leírását papírra (tehát 2-dimenzióban) úgy oldhatjuk meg, hogy például a harmadik index szerint „szeletekre” vágjuk. E „szeletek” mindegyike egy mátrix, melyeket függőleges vonallal elválasztva egymás mellé írunk. Így például a

$4 \times 2 \times 3$-típusú hipermátrixok általános alakja

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} a_{111} & a_{121} & a_{112} & a_{122} & a_{113} & a_{123} \\ a_{211} & a_{221} & a_{212} & a_{222} & a_{213} & a_{223} \\ a_{311} & a_{321} & a_{312} & a_{322} & a_{313} & a_{323} \\ a_{411} & a_{421} & a_{412} & a_{422} & a_{413} & a_{423} \end{array}\right]$$

Két azonos típusú hipermátrix összeadása és egy hipermátrix skalárral való szorzása a mátrixokhoz hasonlóan elemenként történik, azaz

$$\begin{aligned} [a_{i_1 i_2 \dots i_d}] + [b_{i_1 i_2 \dots i_d}] &:= [a_{i_1 i_2 \dots i_d} + b_{i_1 i_2 \dots i_d}], \\ c[a_{i_1 i_2 \dots i_d}] &:= [c a_{i_1 i_2 \dots i_d}], \end{aligned}$$

ahol S elemein az összeadás és a szorzás is értelmezve van.

4.16. DEFINÍCIÓ (HIPERMÁTRIX TRANSZPONÁLTJA). *Legyen π az $\{1, 2, \dots, d\}$ halmaz egy permutációja. A d-edrendű $\mathbf{A} = [a_{i_1 i_2 \dots i_d}] \in S^{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_d}$ hipermátrix π-*transzponáltján* az*

$$\mathbf{A}^{\pi} = [a_{i_{\pi(1)} i_{\pi(2)} \dots i_{\pi(d)}}] \in S^{n_{\pi(1)} \times n_{\pi(2)} \times \dots \times n_{\pi(d)}}$$

hipermátrixot értjük. Egy $\mathbf{A} \in S^{n \times n \times \dots \times n}$ hiper-kockamátrix szimmetrikus*, ha minden π permutációra $\mathbf{A}^{\pi} = \mathbf{A}$, és* ferdén szimmetrikus*, ha $\mathbf{A}^{\pi} = \operatorname{sgn}(\pi)\mathbf{A}$, ahol $\operatorname{sgn}(\pi) = -1$, ha a π páratlan permutáció, és 1, ha páros.*

Eszerint a $2 \times 2 \times 2$-es hipermátrixok és szimmetrikus hipermátrixok általános alakja

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a_{111} & a_{121} & a_{112} & a_{122} \\ a_{211} & a_{221} & a_{212} & a_{222} \end{array}\right], \qquad \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & b & c \\ b & c & c & d \end{array}\right].$$

A $3 \times 3 \times 3$-as hipermátrixok, szimmetrikus és ferdén szimmetrikus hipermátrixok általános alakja

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_{111} & a_{121} & a_{131} & a_{112} & a_{122} & a_{132} & a_{113} & a_{123} & a_{133} \\ a_{211} & a_{221} & a_{231} & a_{212} & a_{222} & a_{232} & a_{213} & a_{223} & a_{233} \\ a_{311} & a_{321} & a_{331} & a_{312} & a_{322} & a_{332} & a_{313} & a_{323} & a_{333} \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & b & c & b & d & e & c & e & f \\ b & d & e & d & g & h & e & h & i \\ c & e & f & e & h & i & f & i & j \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

ahol $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in S$ nem feltétlenül különböző elemek.

A vektorok diadikus szorzatát általánosítja az alábbi definíció:

4.17. definíció (Hipermátrixok külső szorzata). *Legyen* $\mathbf{A} \in S^{n_1\times\cdots\times n_d}$ *egy* d*-edrendű és* $\mathbf{B} \in S^{m_1\times\cdots\times m_e}$ *egy* e*-edrendű hipermátrix.* Külső szorzatukon *azt a* $(d+e)$*-edrendű*

$$\mathbf{C} = [c_{i_1\ldots i_d j_1\ldots j_e}]_{i_1,\ldots,i_d,j_1,\ldots,j_e=1}^{n_1,\ldots,n_d,m_1,\ldots,m_e} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \in S^{n_1\times\cdots\times n_d\times m_1\times\cdots\times m_e}$$

hipermátrixot értjük, melyre

$$c_{i_1\ldots i_d j_1\ldots j_e} = a_{i_1\ldots i_d} b_{j_1\ldots j_e}.$$

Például

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0 & 1\\2 & 3\\4 & 0\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc}0 & 2 & 4 & 1 & 3 & 0\\0 & 4 & 8 & 2 & 6 & 0\end{array}\right]$$

Feladatok

Táblázatok

4.1. Anti, Bori, Cili almát, banánt és citromot vesz a piacon, a hipermarketben vagy a csarnokban. Ha csak az ár számít, melyikük hol vásároljon?

	alma (kg)	banán (kg)	citrom (kg)
Anti	2	2	1
Bori	3	2	0.5
Cili	2	1	1

	csarnok (Ft/kg)	hipermarket (Ft/kg)	piac (Ft/kg)
alma	180	100	130
banán	390	420	360
citrom	210	210	230

4.2. Egy $f(x, y)$ kifejezésben elvégezzük az

$$\begin{aligned} x &= 2a + b \\ y &= 3a + b \end{aligned}$$

helyettesítést, majd az így kapott $f(2a + b, 3a + b)$ kifejezésben az

$$\begin{aligned} a &= -3s + t \\ b &= 4s - t \end{aligned}$$

helyettesítést. Számítsuk ki a két helyettesítés kompozícióját a helyettesítések végrehajtásával, és a nekik megfelelő táblázatok szorzásával is, azaz írjuk fel azt a helyettesítést, mely e két helyettesítés kompozíciójával ekvivalens!

4.3. Tegyük fel, hogy egy kifejezésben elvégezzük a következő két helyettesítést:

$$\begin{aligned} x &= 2a + b + 6c & \qquad a &= -s + u \\ y &= 4a + b + 7c & b &= -3s - 6t + 10u \\ z &= 3a + b + 6c & c &= s + t - 2u \end{aligned}$$

Hogyan számíthatjuk ki a két helyettesítés kompozícióját? Írjuk fel azt a helyettesítést, mely e két helyettesítés kompozíciójával ekvivalens!

4.4.▲ Két versengő kereskedelmi TV-csatorna valóságshow-műsora kezdetben fele-fele arányban vonzza a nézőket. Az első hét végére a tv1 nézőinek fele, míg a tv2 nézőnek negyede átpártol a másik csatornára.

1. Készítsük el az átpártolás 2×2-es táblázatát, és a
2. nézők megoszlásának 2×1-es vagy 1×2-es táblázatát!
3. Táblázatok szorzásának segítségével határozzuk meg, hogy mi a nézők megoszlása az első és a második hét végén, ha az átpártolók aránya az idővel nem változik.
4. Írjuk fel az átpártolók kéthetenkénti táblázatát, azaz azt, amelyből kiolvasható, hogy két hét elteltével az egyes csatornák nézőinek hányadrésze pártol át, és mennyi marad!

Elemenkénti mátrixműveletek

4.5.• Adva vannak az alábbi mátrixok!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Számítsuk ki a következő kifejezések közül azok értékét, amelyek értelmezve vannak! *a)* $4\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$, *b)* $2\mathbf{B} - \mathbf{C}$, *c)* $2\mathbf{B} - \mathbf{C}^\mathsf{T}$,

4.6.▲ ELEMENKÉNTI MÁTRIXMŰVELET A DIGITÁLIS KÉPFELDOLGOZÁSBAN Egy leegyszerűsített képformátummal dolgozunk: az egészelemű $\mathbf{A}_{m\times n}$ mátrix reprezentáljon egy $m \times n$ képpontból álló szürkeárnyalatos képet. Minden mátrixelem egy képpont árnyalatát adja meg a $\{0, 1, \dots k\}$ tartományból, ahol 0 a fekete, $k - 1$ a fehér színnek felel meg és k az átlátszó pixeleket jelöli. Legyen egy képen a háttér átlátszó, és legyen $\mathbf{B}_{m\times n}$ egy tetszőleges másik kép azonos módon reprezentált mátrixa. Konstruáljuk meg azt a $\circledcirc$ jellel jelölt műveletet, amellyel az elemenkénti

$$\mathbf{A} \circledcirc \mathbf{B} := [a_{ij} \circledcirc b_{ij}]$$

mátrixművelet az $\mathbf{A}$ kép hátterébe másolja a $\mathbf{B}$ képet. Képletben:

$$a_{ij} \circledcirc b_{ij} = \begin{cases} b_{ij}, & \text{ha } a_{ij} = k, \\ a_{ij}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A megoldásban használhatjuk a $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ függvényt, mely egy x számhoz annak alsó egész részét rendeli.

4.7. $\mathbb{R}^{m\times n}$ BÁZISA Adjuk meg az $\mathbb{R}^{m\times n}$ tér egy bázisát.

4.8. MÁTRIXOK ÁLTAL KIFESZÍTETT ALTÉR Jellemezzük az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ térnek azt az alterét, melyet az alább megadott $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrixok feszítenek ki! Másként fogalmazva: milyen összefüggések állnak fönn azon 2×2-es valós mátrixok elemei között, melyek az alábbi mátrixok lineáris kombinációiként állnak elő?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mátrixszorzás

4.9.• Adva vannak az alábbi mátrixok!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Számítsuk ki a következő kifejezések közül azok értékét, amelyek értelmezve vannak! *a)* $\mathbf{AB}$, *b)* $\mathbf{AB}^\mathsf{T} - \mathbf{D}$, *c)* $\mathbf{BC}$, *d)* $\mathbf{CB}$, *e)* $(\mathbf{DA})\mathbf{C}$.

4.10.• A SZORZÁS NEM FELCSERÉLHETŐ Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Döntsük el, hogy fönnállnak-e az $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, $\mathbf{BC} = \mathbf{CB}$, $\mathbf{CD} = \mathbf{DC}$ és $\mathbf{DE} = \mathbf{ED}$ egyenlőségek.

Blokkmátrixok

4.11. 2×2-ES BLOKKMÁTRIXOK SZORZÁSA Legyen **A** és **B** két 2×2-es blokkmátrix, azaz legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel szorzatukat a blokkok szorzatai segítségével.

4.12.• Végezzük el az $\mathbf{A} + 3\mathbf{C}$ és az $\mathbf{AB}$ műveleteket közönséges mátrixműveletekkel és blokkmátrixként számolva is, ha

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right], \quad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right], \quad \mathbf{C} = \left[\begin{array}{cc|c|c} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

*Mátrixműveletek $\mathbb{Z}_m$-ben**

A mátrixműveletek minden további nélkül értelmezhetők $\mathbb{Z}_m$ fölötti mátrixokra is (általában bármely gyűrű fölötti mátrixokra, ld. a 13. fejezetet a függelékben).

4.13.▲ Egy lineáris kód **G** generátormátrixa és **H** ellenőrző mátrixa eleget tesz a $\mathbf{GH}^\mathsf{T} = \mathbf{O}$ összefüggésnek. Ellenőrizzük ezt a $[4,2,3]_3$ Hamming kód esetén a következő mátrixokkal az $\mathbb{F}_3$ testben számolva:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Hipermátrixok**

4.14. MULTILINEÁRIS MÁTRIXSZORZÁS Definiáljunk egy hipermátrixműveletet a következőképp. Legyen $\mathbf{X}_1 = [x_{ij}^{(1)}] \in S^{m_1 \times n_1}, \dots, \mathbf{X}_d = [x_{ij}^{(d)}] \in S^{m_d \times n_d}$ tetszőleges d mátrix, és legyen $\mathbf{A} \in S^{n_1 \times \dots \times n_d}$ egy hipermátrix. Ekkor a $\mathbf{B} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_d) \cdot \mathbf{A}$ *multilineáris mátrixszorzatot* a

$$b_{i_1 \dots i_d} = \sum_{j_1,\dots,j_d=1}^{n_1,\dots,n_d} x_{i_1 j_1}^{(1)} \dots x_{i_d j_d}^{(d)} a_{j_1 \dots j_d},$$

képlet definiálja, ahol $\mathbf{B} = [b_{i_1 \dots i_d}]_{i_1,\dots,i_d=1}^{m_1,\dots,m_d}$.

Igazoljuk, hogy *a)* ha $d = 1$, $n_1 = n$ és $m_1 = 1$, akkor e szorzás megegyezik a skaláris szorzással; *b)* ha $d = 2$, $m_1 = m_2 = 1$ és $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$, akkor e szorzás kvadratikus alakot ad.

4.15. VEKTOROK SEGRE-FÉLE KÜLSŐ SZORZATA Legyen $n_1, n_2, \dots, n_d \in \mathbb{N}^+$ és legyen $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in_i}) \in S^{n_i}$ $(i = 1, 2, \dots, d)$. E vektorok *Segre-féle külső szorzatán* az

$$\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_d = [a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{di_d}]_{i_1,i_2,\dots,i_d=1}^{n_1,n_2,\dots,n_d}$$

hipermátrixot értjük.

Számítsuk ki a következő Segre-féle külső szorzatot:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

*Projekt: a mátrixszorzás általánosítása hipermátrixokra**

A mátrixok szorzatát általánosíthatjuk az alábbi módon: legyen $\mathbf{A} \in S^{n_1 \times \dots \times n_{d-1} \times k}$ egy d-edrendű és $\mathbf{B} \in S^{k \times m_2 \times \dots \times m_e}$ egy e-edrendű hipermátrix, ahol **A** utolsó és **B** első indexe ugyanazon az $\{1, \dots, k\}$ tartományon fut végig. **A** és **B** szorzatán azt a $(d + e - 2)$-edrendű $\mathbf{C} \in S^{n_1 \times \dots \times n_{d-1} \times m_2 \times \dots \times m_e}$ hipermátrixot értjük, melyre

$$c_{i_1 \dots i_{d-1} j_2 \dots j_e} = \sum_{\ell=1}^{k} a_{i_1 \dots i_{d-1} \ell} b_{\ell j_2 \dots j_e}.$$

Megkülönböztetésül e szorzatot **A** és **B** kontrakciós szorzatának nevezzük. Ez azonban nem csak **A** utolsó és **B** első indexére, hanem bármely indexpárra értelmezhető, ha azokhoz azonos indextartomány tartozik.

4.16. KONTRAKCIÓS SZORZAT Definiáljuk az **A** és **B** hipermátrixok $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle_{u:v}$-val jelölt kontrakciós szorzatát, ahol az **A** mátrix u-adik és a **B** mátrix v-edik indextartománya azonos.

4.17. Számítsuk ki az

$$\left\langle \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle_{2:1}$$

kontrakciós szorzatot!

A mátrixszorzás használata

Mátrixszorzással az eddig tanultak áttekinthetőbbé és könnyebben kezelhetővé válnak (pl. vektorok lineáris kombinációja, az egyenletrendszerek és megoldásuk felírása).

Skaláris szorzat és diadikus szorzat mátrixszorzatos alakja Két oszlopvektor nem szorozható össze, ha 1-nél nagyobb dimenziósak. Viszont az egyikük transzponálása után a szorzás elvégezhető.

Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két $\mathbb{R}^n$-beli vektor. Az $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{b}$ szorzat a két vektor skaláris szorzatát adja, azaz

$$\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

ugyanis

$$\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Ha a második vektort transzponáljuk, a két vektor lehet különböző dimenziós is.

4.18. DEFINÍCIÓ (DIADIKUS SZORZAT). *Legyen* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. *Az* $\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}$ *szorzatot a két vektor* diadikus szorzatának, *röviden* diádnak *nevezzük. E szorzat egy* $m \times n$*-es mátrix:*

$$\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \dots & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \dots & u_2v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_mv_1 & u_mv_2 & \dots & u_mv_n \end{bmatrix}.$$

Két vektor diadikus szorzatát $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ *jelöli.*

4.19. PÉLDA (SKALÁRIS ÉS DIADIKUS SZORZAT). *Legyen* $\mathbf{u} = (1, 0, 2)$, $\mathbf{v} = (3, 2, 1)$. *Írjuk fel mátrixszorzatos alakba skaláris és diadikus szorzatukat, és számítsuk ki!*

MEGOLDÁS.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 5,$$

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \square$$

Lineáris egyenletrendszer mátrixszorzatos alakja A mátrixszorzást felhasználva a lineáris egyenletrendszerek egyszerű alakba írhatók.

4.1 (LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MÁTRIXSZORZATOS ALAKJA). *Ha* **A** *jelöli egy egyenletrendszer együtthatómátrixát, illetve* **b** *a konstans tagok és* **x** *az ismeretlenek oszlopvektorát, azaz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

akkor az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

egyenletrendszer

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

alakba írható.

Könnyen ellenőrizhető a mátrixszorzás elvégzésével, hogy a

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \qquad \begin{aligned} ax \qquad &= u \\ by \quad &= v \\ cz &= w \end{aligned} \qquad \text{és} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ y &= 1 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszerek mátrixszorzatos alakjai rendre:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 5, \quad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A szimultán egyenletrendszerek (ld. 99. oldal) ugyanígy fölírhatóak mátrixszorzatos alakba.

4.20. PÉLDA (SZIMULTÁN EGYENLETRENDSZER MÁTRIXSZORZATOS ALAKJA). *Írjuk az alábbi két egyenletrendszert egyetlen mátrixszorzatos alakba!*

$$\begin{aligned} 2x_{11} + 3x_{21} &= 7 \qquad & 2x_{12} + 3x_{22} &= 9 \\ 3x_{11} - 4x_{21} &= 2 \qquad & 3x_{12} - 4x_{22} &= 5 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. A két egyenletrendszer mátrixszorzatos alakjai külön-külön

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Ezek egyetlen mátrixszorzattá olvaszthatók:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Általánosan a szimultán egyenletrendszerek $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ alakba írhatóak, ahol $\mathbf{X}$ az ismeretlenekből, $\mathbf{B}$ a jobb oldalakból alkotott mátrix. □

Lineáris helyettesítés mátrixszorzatos alakja Az egyenletrendszer mátrixszorzatos alakjához hasonlóan adódik a lineáris helyettesítés mátrixszorzatos alakja. Egyszerűen csak úgy kell tekintenünk az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenlőségre, hogy ott $\mathbf{b}$ koordinátái a helyettesítendő változók, melyek helyébe az $\mathbf{x}$ koordinátáinak egy lineáris kifejezését helyettesítjük. Ilyenkor inkább a $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$ alakot használjuk, és az $\mathbf{A}$ mátrixot a *lineáris helyettesítés mátrixának* nevezzük. Részletesebben lásd még a 4.37. feladatot.

Példaként íme egy lineáris helyettesítés és mátrixszorzatos alakja:

$$\begin{aligned} x &= 3a + 2b + 4c \\ y &= a - 3b + 2c \\ z &= 2a - b + 2c \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Szorzás vektorral Egy $m \times n$-es mátrix vektorral kétféleképp szorozható: jobbról egy $n \times 1$-es oszlopvektorral, balról egy $1 \times m$-es sorvektorral.

Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer oszlopmodelljéből láttuk, hogy az egyenletrendszer bal oldala az $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak az $\mathbf{x}$ koordinátáival vett lineáris kombinációja. Hasonló állítás igaz a sorvektorral balról való szorzásra is.

4.21. ÁLLÍTÁS (MÁTRIXSZORZÁS ÉS LINEÁRIS KOMBINÁCIÓ). *Legyen* $\mathbf{A}$ $m \times n$*-es mátrix,* $\mathbf{x}$ n*-dimenziós,* $\mathbf{y}$ m*-dimenziós vektor. Ekkor az* $\mathbf{Ax}$ *szorzat az* $\mathbf{A}$ *oszlopvektorainak*

$$\mathbf{a}_{*1}x_1 + \mathbf{a}_{*2}x_2 + \cdots + \mathbf{a}_{*n}x_n$$

lineáris kombinációját, míg az $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ *szorzat az* $\mathbf{A}$ *sorvektorainak*

$$\mathbf{a}_{1*}y_1 + \mathbf{a}_{2*}y_2 + \cdots + \mathbf{a}_{m*}y_m$$

lineáris kombinációját adja.

Szorzás standard egységvektorral Könnyen igazolhatók azok az összefüggések, melyeket a standard egységvektorokkal való szorzással kapunk. Jelölje $\mathbf{e}_i = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ azt a vektort, melynek i-edik koordinátája 1, a többi 0.

4.22. ÁLLÍTÁS (MÁTRIX ELEMEINEK, SOR- ÉS OSZLOPVEKTORAINAK ELŐÁLLÍTÁSA). *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy* $m \times n$*-es mátrix,* $\mathbf{e}_i$ m*-dimenziós,* $\mathbf{e}_j$ n*-dimenziós standard egységvektor. Ekkor a standard* $\mathbf{e}_i$ *sorvektorral balról való szorzás a mátrix* i*-edik sorvektorát, az* $\mathbf{e}_j$*-vel jobbról való szorzás a mátrix* j*-edik oszlopvektorát adja, azaz*

$$\mathbf{e}_i^\mathsf{T}\mathbf{A} = \mathbf{a}_{i*} \quad \text{és} \quad \mathbf{A}\mathbf{e}_j = \mathbf{a}_{*j},$$

továbbá

$$\mathbf{e}_i^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i^\mathsf{T}\mathbf{A})\mathbf{e}_j = a_{ij}.$$

Az $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^\mathsf{T}$ diád egy olyan mátrix, melynek (i, j)-indexű eleme 1, az összes többi 0:

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

A báziscsere mátrixszorzatos alakja A 135. oldalon a vektor bázisra vonatkozó koordinátás alakjáról szóló paragrafusban láttuk, hogy e koordinátás alak hogy határozható meg. De mi egy *vektornak* egy altér két különböző bázisára vonatkozó koordinátás alakja közti kapcsolat?

4.23. PÉLDA (ÁTTÉRÉS STANDARD BÁZISRA). *Az* $\mathbb{R}^3$ *térnek* $\mathcal{B} = \{(1,2,3), (0,2,3), (3,5,8)\}$ *egy bázisa. Az e bázisban megadott* $[\mathbf{v}]_\mathcal{B}$ *vektornak írjuk fel a koordinátás alakját a standard bázisban egyetlen mátrixszorzással. Mi a* $\mathbf{v}$ *vektor standard koordinátás alakja, ha* $[\mathbf{v}]_\mathcal{B} = (3, 2, -1)$*?*

MEGOLDÁS. $[\mathbf{v}]_\mathcal{B} = (3, 2, -1)$ azt jelenti, hogy

$$\mathbf{v} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix},$$

ami mátrixszorzatos alakban

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Legyen $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (x, y, z)$. Ekkor

$$\mathbf{v} = x\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}3\\5\\8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\2 & 2 & 5\\3 & 3 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}.$$

□

4.24. PÉLDA (BÁZISCSERE). *Legyen $\mathcal{B} = \{ (1,2,3), (0,2,3), (3,5,8) \}$ és $\mathcal{C} = \{ (1,1,1), (2,3,4), (6,6,7) \}$ az $\mathbb{R}^3$ két bázisa. Számítsuk ki egy vektor $\mathcal{B}$ bázisban megadott $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ alakjából a $\mathcal{C}$-beli $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$ alakját!*

MEGOLDÁS. Egyik lehetőség, hogy meghatározzuk $\mathbf{v}$ standard bázisbeli koordinátás alakját az előző feladat mintájára, majd az így kapott koordinátás alakból a $\mathcal{C}$ bázisra vonatkozó alakot a 135. oldalon leírtak szerint.

A másik lehetőség egyszerűbb, és hatékonyabb, ha több vektor koordinátás alakját kell meghatározni. A $\mathcal{B}$ bázis vektorainak a $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ koordinátáival vett lineáris kombinációja megadja a $\mathbf{v}$ vektort, így ha meghatározzuk a $\mathcal{B}$ bázis vektorainak $\mathcal{C}$ bázisbeli alakját, ezek lineáris kombinációja a $\mathbf{v}$ vektor $\mathcal{C}$-beli alakját, azaz a $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$ alakot adja.

A $\mathcal{B}$ bázis egy vektorának $\mathcal{C}$-beli koordinátás alakjához egy egyenletrendszert kell megoldani, a $\mathcal{B}$ összes vektorának felírásához tehát egy szimultán egyenletrendszert:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}\underbrace{1 & 2 & 6}_{} & 1 & 0 & 3\\1 & 3 & 6 & 2 & 2 & 5\\1 & 4 & 7 & 3 & 3 & 8\end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -7\\0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2\\0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1\end{array}\right]$$

$$\left[\underbrace{\begin{array}{ccc}1 & 2 & 6\\1 & 3 & 6\\1 & 4 & 7\end{array}}_{\mathcal{C}}\middle|\underbrace{\begin{array}{ccc}1 & 0 & 3\\2 & 2 & 5\\3 & 3 & 8\end{array}}_{\mathcal{B}}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -7\\0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2\\0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1\end{array}\right]$$

Tehát a $\mathcal{B}$ bázis a $\mathcal{C}$ koordinátarendszerben:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}_{\mathcal{C}}, \begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}_{\mathcal{C}}, \begin{bmatrix}-7\\2\\1\end{bmatrix}_{\mathcal{C}} \right\}.$$

Az ezekből képzett lineáris kombinációk mátrixszorzással is előállíthatók. Így egy $\mathbf{v}$ vektor $\mathcal{B}$-beli koordinátás alakjának $\mathcal{C}$ bázisba való átírását a

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}-1 & 2 & -7\\1 & 2 & 2\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$$

képlet adja. Ha e mátrixot $\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ jelöli, akkor az előző képlet a

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$$

alakot ölti. □

E példa a következő definícióhoz és állításhoz vezet:

4.25. DEFINÍCIÓ (ÁTTÉRÉS MÁTRIXA). *Legyen* $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ *és* $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\}$ *az* $\mathbf{R}^n$ *két bázisa. Írjuk fel* $\mathcal{B}$ *vektorait a* $\mathcal{C}$ *bázisban, és e vektorokból képezzünk mátrixot. Ezt nevezzük a* $\mathcal{B}$ *bázisról a* $\mathcal{C}$*-re való áttérés mátrixának. Ha szükséges, a mátrix indexébe írjuk a két bázist* $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}$ *alakban. Tehát az áttérés mátrixa*

$$\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = [\,[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \mid [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} \mid \cdots \mid [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}}\,]$$

4.26. ÁLLÍTÁS (KOORDINÁTÁK VÁLTOZÁSA A BÁZIS CSERÉJÉNÉL). *Ha* $\mathcal{B}$ *és* $\mathcal{C}$ *az* $\mathbf{R}^n$ *két bázisa és* $\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ *az áttérés mátrixa, akkor bármely* $\mathbf{v}$ *vektor* $\mathcal{B}$*-, illetve* $\mathcal{C}$*-beli koordinátás alakja közt fennáll a*

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$$

összefüggés.

*Bázisfelbontás** A 3.24. tétel második pontjának az előző feladatban is szemléltetett egyenes következménye, a következő állítás.

4.27. ÁLLÍTÁS (BÁZISFELBONTÁS). *Jelölje egy* $m \times n$*-es* $\mathbf{A}$ *mátrix redukált lépcsős alakjának nemzérus soraiból álló* $r \times n$*-es részmátrixát* $\mathbf{R}$*, az* $\mathbf{R}$ *főoszlopainak megfelelő* $\mathbf{A}$*-beli oszlopok alkotta* $m \times r$*-es részmátrixot* $\mathbf{B}$*, ahol* $r = \mathrm{r}(\mathbf{A})$*. Ekkor az* $\mathbf{R}$ *mátrix* j*-edik oszlopa megegyezik az* $\mathbf{A}$ *mátrix* j*-edik oszlopának a* $\mathbf{B}$ *oszlopai alkotta bázisban felírt koordinátás alakjával. Képletben ez azt jelenti, hogy*

$$\mathbf{A}_{*j} = \mathbf{B}\mathbf{R}_{*j}, \quad \textit{azaz} \quad \mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}.$$

Egy mátrix fenti $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}$ alakú felbontását *bázisfelbontásnak* nevezzük.

4.28. PÉLDA (BÁZISFELBONTÁS). *Határozzuk meg az alábbi mátrix bázisfelbontását, és magyarázzuk meg a két mátrix oszlopainak jelentését!*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & -11 \end{bmatrix}.$$

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{A}$ mátrix redukált lépcsős alakja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & -11 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

E mátrix első két sora alkotja az $\mathbf{R}$ mátrixot, az $\mathbf{A}$ mátrix első és harmadik oszlopa a $\mathbf{B}$ mátrixot, így a felbontás

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} = \mathbf{BR}.$$

Ellenőrizzük, hogy az $\mathbf{R}$ oszlopai az $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak koordinátás alakjai a $\mathbf{B}$ oszlopai alkotta bázisban, azaz

$$[\mathbf{v}]_E = \mathbf{B}[\mathbf{v}]_B,$$

ahol az E indexszel a standard, B-vel a $\mathbf{B}$ mátrix oszlopai alkotta bázisbeli koordinátás alakját jelöltük ugyanannak a vektornak. Például

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad [\mathbf{a}_4]_E = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \ [\mathbf{a}_4]_B = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

ahol $\mathbf{a}_4$ az $\mathbf{A}$ negyedik oszlopvektora. □

Egységmátrix, elemi mátrixok Egy adott $\mathbf{B}$ mátrixhoz találhatunk olyan $\mathbf{A}$-t, hogy az 1-gyel való szorzáshoz hasonlóan $\mathbf{AB} = \mathbf{B}$ legyen. Például

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

esetén

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Az azonban már nem igaz, hogy $\mathbf{A}$-t bármely 2×2-es $\mathbf{B}$ mátrixszal szorozva $\mathbf{B}$ lesz az eredmény. Ilyen mátrix is létezik, némi próbálkozás után bárki rátalálhat.

4.29. DEFINÍCIÓ (EGYSÉGMÁTRIX). *Az $n \times n$-es*

$$\mathbf{I}_n := \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixot egységmátrixnak *nevezzük.*

► Az egységmátrix elnevezés onnan származik, hogy bármely $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra igaz, hogy

$$\mathbf{I}_m \mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{I}_n = \mathbf{A}_{m \times n},$$

azaz e mátrix hasonló tulajdonsággal rendelkezik, mint a számok közt az egy.

Az *egységmátrix* jelölésére használt $\mathbf{I}$ betű az angol *identity matrix* elnevezés első betűjéből származik. Az *azonosság* vagy *identitás* jelentésű *identity* szó az $\mathbf{IA} = \mathbf{A}$ összefüggésre utal (az $x \mapsto x$ függvényt ugyanezen okból hívjuk identikus függvénynek). Ráadásul az I betű hasonlít legjobban az 1-es számra.

► Az egységmátrixszal már találkoztunk: a Gauss – Jordan-módszernél egy n-ismeretlenes, n egyenletből álló egyértelműen megoldható egyenletrendszer együtthatómátrixa az elemi sorműveletek során egységmátrixszá transzformálódik!

Az egységmátrixon végrehajtott elemi sorműveletek olyan mátrixokat eredményeznek, melyek kapcsolatot létesítenek az elemi sorműveletek és a mátrixokkal való szorzás között.

4.30. DEFINÍCIÓ (ELEMI MÁTRIXOK). *Az* $\mathbf{I}_n$ *egységmátrixon végrehajtott egyetlen elemi sorművelettel kapott mátrixot* elemi mátrixnak *nevezzük.*

Az alábbi mátrixok elemi mátrixok:

$$\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&5&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Ezt igazolja, hogy mindegyikük $\mathbf{I}_4$-ből származik rendre a következő elemi sorműveletekkel: $S_1 \leftrightarrow S_4$, $5S_2$, $S_1 + 2S_3$, $1S_1$. Az utolsó mátrix az egységmátrix, amely maga is elemi mátrix, mert például egy sorának 1-gyel való szorzásával megkapható.

4.31. PÉLDA (MÁTRIX BALRÓL SZORZÁSA ELEMI MÁTRIXSZAL). *Vizsgáljuk meg mi történik, ha az előbbi mátrixokkal balról megszorzunk egy tetszőleges* 4*-soros mátrixot?*

MEGOLDÁS. Legyen $\mathbf{A}$ egy 4- sorból, és az egyszerűség kedvéért csak 2 oszlopból álló mátrix.

$$\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\\a_{41}&a_{42}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{41}&a_{42}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\\a_{11}&a_{12}\end{bmatrix},$$

A szorzás eredményeként fölcserélődött $\mathbf{A}$ első és negyedik sora.

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&5&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\\a_{41}&a_{42}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\5a_{21}&5a_{22}\\a_{31}&a_{32}\\a_{41}&a_{42}\end{bmatrix},$$

Itt az $\mathbf{A}$ második sora be lett szorozva 5-tel.

$$\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\\a_{41}&a_{42}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}+2a_{31}&a_{12}+2a_{32}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\\a_{41}&a_{42}\end{bmatrix},$$

A szorzás eredményeként az $\mathbf{A}$ első sorához hozzá lett adva harmadik sorának kétszerese. □

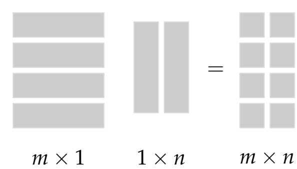
E példa eredménye kimondható tételként, melynek bizonyítása általánosan is úgy történik, mint az előző példában, ezért elhagyjuk:

4.32. TÉTEL (ELEMI SORMŰVELETEK MÁTRIXSZORZÁSSAL). *Legyen* $\mathbf{E}$ *az az elemi mátrix, melyet* $\mathbf{I}_m$*-ből egy elemi sorművelettel kapunk. Ha ugyanezt a sorműveletet egy tetszőleges* $m \times n$*-es* $\mathbf{A}$ *mátrixra alkalmazzuk, akkor eredményül az* $\mathbf{EA}$ *mátrixot kapjuk.*

► Az elemi sorműveletek mátrixszorzással való elvégzésének nincs számítási praktikuma, annak célja az elemi sorműveletek algebraizálása, s így mélyebb megértése.

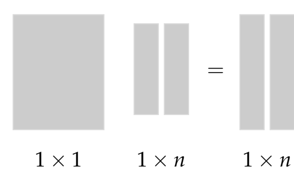
Vektorokra particionált mátrixok Fontosak azok a blokkmátrixok, amelyekben vagy oszlopvektor vagy sorvektor minden blokk. Két mátrix szorzatának felírásakor legalább az egyiküket vektorokra particionálására 4 eset lehetséges. Legyen a következőkben $\mathbf{A}$ egy $m \times t$, $\mathbf{B}$ egy $t \times n$ méretű mátrix.

1. [*sorvektorok*] $\cdot$ [*oszlopvektorok*]*:* Bontsuk fel az $\mathbf{A}_{m\times t}$ mátrixot sorvektoraira, és a $\mathbf{B}_{t\times n}$ mátrixot oszlopvektoraira. Ekkor egy $m \times 1$-es blokkmátrixot szorzunk egy $1 \times n$-essel, ami épp az $\mathbf{AB}$ mátrixszorzat definícióját adja:



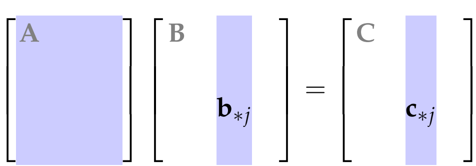
$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1*} \\ \hline \mathbf{a}_{2*} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{a}_{m*} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{b}_{*1} & \dots & \mathbf{b}_{*n} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1*}\mathbf{b}_{*1} & \mathbf{a}_{1*}\mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{a}_{1*}\mathbf{b}_{*n} \\ \mathbf{a}_{2*}\mathbf{b}_{*1} & \mathbf{a}_{2*}\mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{a}_{2*}\mathbf{b}_{*n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m*}\mathbf{b}_{*1} & \mathbf{a}_{m*}\mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{a}_{m*}\mathbf{b}_{*n} \end{bmatrix}.$$

2. [*mátrix*] $\cdot$ [*oszlopvektorok*]*:* Ekkor egy 1×1-es blokkmátrixot szorzunk egy $1 \times n$-essel:



$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \mathbf{A}\left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{b}_{*1} & \mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{b}_{*n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{Ab}_{*1} & \mathbf{Ab}_{*2} & \dots & \mathbf{Ab}_{*n} \end{array}\right]$$

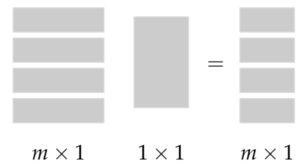
Itt tehát a $\mathbf{C}$ mátrix j-edik oszlopvektora az $\mathbf{A}$ mátrix és a $\mathbf{B}$ j-edik oszlopának szorzata, vagyis $\mathbf{c}_{*j} = \mathbf{Ab}_{*j}$. Sematikusan ábrázolva:



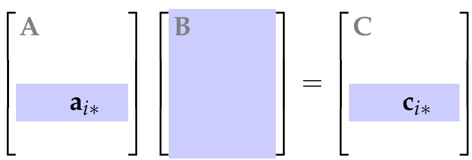
Ezzel az esettel már találkoztunk a szimultán egyenletrendszerek mátrixszorzatos alakjának fölírásánál (4.20. példa). Ha a fenti sematikus ábra egy szimultán egyenletrendszer mátrixszorzatos alakját reprezentálja, akkor a színesen kiemelt rész a szimultán egyenletrendszer egyetlen egyenletrendszerének felel meg.

3. [sorvektorok] · [mátrix]: Ekkor egy $m \times 1$-es blokkmátrixot szorzunk egy 1×1-essel:

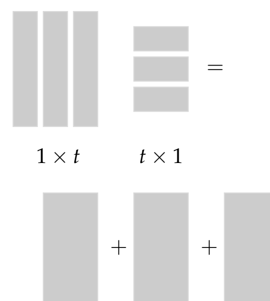
$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{a}_{1*} \\ \hline \mathbf{a}_{2*} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{a}_{m*} \end{array}\right] \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{a}_{1*}\mathbf{B} \\ \hline \mathbf{a}_{2*}\mathbf{B} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{a}_{m*}\mathbf{B} \end{array}\right]$$



Azaz itt a $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ mátrix i-edik sora az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorának $\mathbf{B}$-szerese. Másként írva $\mathbf{c}_{i*} = \mathbf{a}_{i*}\mathbf{B}$, sematikusan ábrázolva:



4. [oszlopvektorok] · [sorvektorok]: Ekkor egyetlen blokksorból álló mátrixot szorzunk egy blokkoszlopból állóval, azaz egy $1 \times t$-es blokkmátrixot egy $t \times 1$-essel. Így egy skaláris szorzatra emlékeztető összeget kapunk:



$$\mathbf{AB} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{a}_{*1} & \dots & \mathbf{a}_{*t} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{b}_{1*} \\ \hline \mathbf{b}_{2*} \\ \hline \dots \\ \hline \mathbf{b}_{t*} \end{array}\right] . = \mathbf{a}_{*1}\mathbf{b}_{1*} + \mathbf{a}_{*2}\mathbf{b}_{2*} + \dots + \mathbf{a}_{*t}\mathbf{b}_{t*}.$$

E felbontásban az $\mathbf{AB}$ mátrixot *diádok összegére* bontottuk! Például az alábbi szorzat diádokra való bontása a következő:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Tehát a szorzatot három diád összegére bontottuk. Megjegyezzük, az eredmény maga is egy diád, hisz $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 8 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 8 \end{smallmatrix}\right][0\ 1]$.

E felbontásnak fontos speciális esete az, amikor $\mathbf{A}$ egyetlen sorból, vagy $\mathbf{B}$ egyetlen oszlopból áll. Tekintsük az előző példában szereplő $\mathbf{A}$ mátrix első sorát, szorozzuk meg $\mathbf{B}$-vel, majd az $\mathbf{A}$-t a $\mathbf{B}$ második oszlopával!

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Az első szorzat eredménye **B** sorvektorainak, a második szorzat **A** oszlopvektorainak lineáris kombinációja! Ez általánosan is kimondható:

4.33. ÁLLÍTÁS (A SZORZAT OSZLOPAI ÉS SORAI). *Az* **AB** *mátrix minden oszlopa az* **A** *oszlopainak lineáris kombinációja, és minden sora a* **B** *sorainak lineáris kombinációja.*

BIZONYÍTÁS. Az **AB** mátrix j-edik oszlopa

$$(\mathbf{AB})_{*j} = \mathbf{A}\mathbf{b}_{*j} = \mathbf{a}_{*1}b_{1j} + \mathbf{a}_{*2}b_{2j} + \ldots + \mathbf{a}_{*t}b_{1t}$$

az i-edik sora pedig

$$(\mathbf{AB})_{i*} = \mathbf{a}_{i*}\mathbf{B} = a_{i1}\mathbf{b}_{1*} + a_{i2}\mathbf{b}_{2*} + \ldots + a_{it}\mathbf{b}_{t*},$$

ami bizonyítja az állítást. □

4.34. KÖVETKEZMÉNY (SZORZAT RANGJA)...............

Altér felírása mátrixszorzattal Egy altér vektorai is fölírhatók egyetlen mátrixszorzással!

4.35. PÉLDA (NULLTÉR). *Írjuk fel az*

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&5&7&11\\0&1&1&1&-1\end{bmatrix}$$

mátrix nullterének vektorait egy mátrix és egy vektor szorzataként!

MEGOLDÁS. A nulltér, azaz a mátrixhoz tartozó homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak tere könnyen leolvasható a redukált lépcsős alakból.

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&5&7&11\\0&1&1&1&-1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&1&1&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&0&1&2&7\\0&1&1&1&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

A szabad változókhoz rendelt paraméterek legyenek $x_3 = t_1$, $x_4 = t_2$, $x_5 = t_3$, amiből $x_1 = -t_1 - 2t_2 - 7t_3$ és $x_2 = -t_1 - t_2 + t_3$. Innen

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix} = t_1\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\0\\0\end{bmatrix} + t_2\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\1\\0\end{bmatrix} + t_3\begin{bmatrix}-7\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1&-2&-7\\-1&-1&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_1\\t_2\\t_3\end{bmatrix}.$$

□

► Vegyük észre, hogy a redukált lépcsős alak és a megoldás blokkszerkezete egyszerű kapcsolatot mutat:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{I}_2&\mathbf{S}\\\mathbf{O}&\mathbf{O}\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix}-\mathbf{S}\\\mathbf{I}_3\end{bmatrix}\mathbf{t},$$

ahol $\mathbf{t}$ a paraméterek vektora. Ez általánosítható tetszőleges homogén, és inhomogén lineáris egyenletrendszerekre (ld. a 4.47. feladatot).

Feladatok

Mátrixműveletek

4.18• IGAZ – HAMIS Döntsük el, igazak-e az alábbi állítások? Válaszunkat indokoljuk!

a) Ha az **AB** és a **BA** szorzat is értelmezve van, akkor mindkét mátrix négyzetes.

b) Ha az **AB** és a **BA** szorzat is értelmezve van, akkor mindkét szorzat négyzetes.

c) Ha az $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ szorzat értelmezve van, akkor biztosan értelmezve van az $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ szorzat is.

A következőkben legyen

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2\\4&2\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}4&2\\4&5\end{bmatrix},\mathbf{C}=\begin{bmatrix}-3&2\\2&-1\end{bmatrix},\mathbf{D}=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}.$$

Végezzük el az alábbi műveleteket!

4.19. $2\mathbf{A}-3\mathbf{B}^{\mathsf{T}}$

4.20. $\mathbf{AB}-\mathbf{BA}+\mathbf{AC}-\mathbf{CA}$

4.21. $(\mathbf{CD}-\mathbf{DC})(\mathbf{ABC})$

4.22. $\mathbf{A}^2-\mathbf{C}^2$

4.23. $(\mathbf{C})_{2*}(\mathbf{D})_{*2}$

4.24. $(\mathbf{A})_{*1}(\mathbf{B})_{2*}$

4.25. A fenti jelölések mellett igazak-e a következő egyenlőségek?

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2=\mathbf{A}^2+2\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2,\quad (\mathbf{A}+\mathbf{C})^2=\mathbf{A}^2+2\mathbf{AC}+\mathbf{C}^2.$$

4.26. A fenti jelölések mellett igazak-e a következő egyenlőségek?

$$(\mathbf{C}+\mathbf{D})(\mathbf{C}-\mathbf{D})=\mathbf{C}^2-\mathbf{D}^2,\quad (\mathbf{A}+\mathbf{D})(\mathbf{A}-\mathbf{D})=\mathbf{A}^2-\mathbf{D}^2.$$

Számítsuk ki az alábbi vektorok skaláris és diadikus szorzatát! Írjuk fel mindkét műveletet mátrixszorzatos alakban!

4.27. $\mathbf{a}=(1,2)$, $\mathbf{b}=(0,1)$

4.28. $\mathbf{u}=(1,2,0,1)$, $\mathbf{v}=(0,1,2,3)$

4.29. $\mathbf{a}=(1,2,0)$, $\mathbf{b}=(0,1,2,3)$

Mátrixszorzatos alakok

Írjuk fel az alábbi egyenletrendszerek mátrixszorzatos alakját!

4.30.
$$\begin{aligned}x+y&=1\\x-z&=2\\z&=3\end{aligned}$$

4.31. $3x-2y+4z=5$

4.32.
$$\begin{aligned}2x+z&=1\\x-y-w&=2\\y+z+w&=2\\0&=3\end{aligned}$$

Írjuk fel az alábbi lineáris helyettesítések mátrixszorzatos alakját!

4.33.
$$\begin{aligned}u&=2x-4y\\v&=x+2y\end{aligned}$$

4.34.
$$\begin{aligned}x&=3a-2b+c\\y&=2a-c\\z&=b+2c\end{aligned}$$

4.35.
$$\begin{aligned}x&=3a+b\\y&=2a-b\\z&=b\end{aligned}$$

4.36.
$$\begin{aligned}x&=3a-2b+c\\y&=2a-c\end{aligned}$$

4.37• LINEÁRIS HELYETTESÍTÉS MÁTRIXSZORZATOS ALAKJA Írjuk fel az $x_1, x_2, \dots, x_n$ változók lineáris kifejezéseinek az $y_1, y_2, \dots, y_m$ változók helyébe való helyettesítését általánosan leíró

$$\begin{aligned}y_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n\\y_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n\\&\vdots\\y_m&=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n\end{aligned}$$

helyettesítés mátrixszorzatos alakját!

Elemi mátrixok

Keressük meg azt az **E** *mátrixot, mely megoldása az alábbi mátrixegyenletnek!*

4.38. $\mathbf{E}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\\e&f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\e&f\\c&d\end{bmatrix}$

4.39. $\mathbf{E}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\\e&f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\3c&3d\\e&f\end{bmatrix}$

4.40. $\mathbf{E}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\\e&f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c+2e&d+2f\\e&f\end{bmatrix}$

4.41. $\mathbf{E}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\\e&f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-c&b-d\\c&d\\e&f\end{bmatrix}$

Elemi sorműveletekkel, mátrixszorzás nélkül határozzuk meg az alábbi mátrixszorzatok értékét!

4.42. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

4.43. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$

Blokkmátrixok

Számítsuk ki az alábbi feladatokban megadott mátrixszorzatokat a kijelölt blokkmátrixokat használva!

4.44. $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

4.45. $\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$

4.46. $\left[\begin{array}{ccc|c|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{array}\right]$

* 4.47. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSÁNAK BLOKKMÁTRIX ALAKJA Tegyük fel, hogy az r rangú $\mathbf{A}$ mátrix első r oszlopa lineárisan független – ez oszlopcserékkel mindig elérhető. Jelölje $\mathbf{B}_r$ az $\mathbf{A}$ első r oszlopából álló mátrixot, és legyen $\mathbf{A}$, illetve az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ bővített mátrix redukált lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{S} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{S} & \mathbf{d}_r \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{d}_r$ egy r-dimenziós vektor. Ekkor

1. az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldható, és megoldása

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_r \\ \mathbf{0}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{S} \\ \mathbf{I}_s \end{bmatrix} \mathbf{t}_s,$$

   ahol s a szabad változók száma, azaz $s = n - r$, és $\mathbf{t}_s$ a szabad paraméterek vektora, ráadásul $\mathbf{A} = \mathbf{B}_r[\mathbf{I}_r|\mathbf{S}]$ és $\mathbf{b} = \mathbf{B}_r\mathbf{d}_r$, továbbá
2. az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldása

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\mathbf{S} \\ \mathbf{I}_s \end{bmatrix} \mathbf{t}_s,$$

   ahol a $\left[\begin{smallmatrix} -\mathbf{S} \\ \mathbf{I}_s \end{smallmatrix}\right]$ mátrix oszlopvektorai a nulltér bázisát alkotják.

Vegyes feladatok

4.48. A *sudoku* egy olyan logikai játék, melyben egy olyan 9×9-es mátrixot kell megadni, melynek ismerjük néhány, de nem minden elemét. A feladat a nem ismert elemek meghatározása. A mátrix 9 darab 3×3-as blokkra van particionálva és eleget tesz annak a feltételnek, hogy minden sorában, minden oszlopában és minden blokkjában az 1-től 9-ig terjedő egészek mindegyike egyszer szerepel. Ez azt jelenti, hogy az egy sorban, egy oszlopban és egy blokkban lévő számok összege mindig 45. Fejezzük ki ezt mátrixműveletekkel, azaz írjunk fel a sudoku tábla $\mathbf{A}$ mátrixát is tartalmazó olyan mátrixegyenleteket, melyeket minden helyesen kitöltött sudoku tábla mátrixa kielégít!

4.49. Hány eleme van a $\mathbb{Z}_2^{2\times 2}$-nek, azaz a kételemű test fölötti 2×2-es mátrixok terének?

Megoldások

4.1. A két táblázat szorzata:

	csarnok	hipermarket	piac
Anti	1350	1250	1210
Bori	1425	1245	1225
Cili	960	830	850

Tehát Antinak és Borinak a piacon, Cilinek a hipermarketben érdemes vásárolnia.

4.2. A két helyettesítést elvégezve:

$$\begin{aligned} x &= 2a + b = 2(-3s + t) + (4s - t) = -2s + t, \\ y &= 3a + b = 3(-3s + t) + (4s - t) = -5s + 2t. \end{aligned}$$

A két helyettesítés kompozíciója a két helyettesítés táblázatának szorzatával megkapható:

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline x & 2 & 1 \\ y & 3 & 1 \end{array} \times \begin{array}{c|cc} & s & t \\ \hline a & -3 & 1 \\ b & 4 & -1 \end{array} = \begin{array}{c|cc} & s & t \\ \hline x & -2 & 1 \\ y & -5 & 2 \end{array}$$

4.3. A két helyettesítés kompozíciója a két helyettesítés táblázatának szorzatával megkapható. E szorzatból az olvasható le, hogy a kompozícióval kapott helyettesítés: $x = s$, $y = t$, $z = u$. Ez azt jelenti, hogy a két helyettesítés valamilyen értelemben egymás inverze.

4.4.

1. Kétféleképp adhatjuk meg a táblázatot, ha az első sor és oszlop a tv1-é:

-re	*tv1*	*tv2*
tv1	1/2	1/4
tv2	1/2	3/4

-ről	*tv1*	*tv2*
tv1	1/2	1/2
tv2	1/4	3/4

2. A nézők kezdeti eloszlásának táblázatára a két lehetőség:

	arány
tv1	1/2
tv2	1/2

	tv1	*tv2*
arány	1/2	1/2

3. Először válaszoljuk meg a kérdést a tv1-re: a saját nézőinek fele marad ($\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$), ehhez jön a tv2 nézőinek negyede ($\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$), ez összesen $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$. A tv2-re a számítás: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$. Ez táblázatok szorzásával az előző 2-2 felírást használva:

$$\begin{array}{c|cc} \textit{-re} & \textit{tv1} & \textit{tv2} \\ \hline \textit{tv1} & 1/2 & 1/4 \\ \textit{tv2} & 1/2 & 3/4 \end{array} \times \begin{array}{c|c} & \textit{arány} \\ \hline \textit{tv1} & 1/2 \\ \textit{tv2} & 1/2 \end{array} = \begin{array}{c|c} & \textit{arány} \\ \hline \textit{tv1} & 3/8 \\ \textit{tv2} & 5/8 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} & \textit{tv1} & \textit{tv2} \\ \hline \textit{arány} & 1/2 & 1/2 \end{array} \times \begin{array}{c|cc} \textit{-ről} & \textit{tv1} & \textit{tv2} \\ \hline \textit{tv1} & 1/2 & 1/2 \\ \textit{tv2} & 1/4 & 3/4 \end{array} = \begin{array}{c|cc} & \textit{tv1} & \textit{tv2} \\ \hline \textit{arány} & 3/8 & 5/8 \end{array}$$

4. Csak az átpártolás táblázatát nézve, a második hét végére a tv1 nézői első héten megmaradt felének csak a fele marad meg, míg a tv2-től átpártolt negyednyi közönségnek is a fele, tehát a tv1 → tv1 „mozgás” a nézők 3/8-adát érinti, mert $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$. Hasonló számításokkal a többi érték is megkapható, melyet az alábbi, két, táblázatok közti szorzással is meg lehet adni:

$$\begin{array}{c|cc} \textit{-re} & \textit{tv1} & \textit{tv2} \\ \hline \textit{tv1} & 1/2 & 1/4 \\ \textit{tv2} & 1/2 & 3/4 \end{array} \times \begin{array}{c|cc} \textit{-re} & \textit{tv1} & \textit{tv2} \\ \hline \textit{tv1} & 1/2 & 1/4 \\ \textit{tv2} & 1/2 & 3/4 \end{array} = \begin{array}{c|cc} \textit{-re} & \textit{tv1} & \textit{tv2} \\ \hline \textit{tv1} & 3/8 & 5/16 \\ \textit{tv2} & 5/8 & 11/16 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} \textit{-ről} & \textit{tv1} & \textit{tv2} \\ \hline \textit{tv1} & 1/2 & 1/2 \\ \textit{tv2} & 1/4 & 3/4 \end{array} \times \begin{array}{c|cc} \textit{-ről} & \textit{tv1} & \textit{tv2} \\ \hline \textit{tv1} & 1/2 & 1/2 \\ \textit{tv2} & 1/4 & 3/4 \end{array} = \begin{array}{c|cc} \textit{-ről} & \textit{tv1} & \textit{tv2} \\ \hline \textit{tv1} & 3/8 & 5/8 \\ \textit{tv2} & 5/16 & 11/16 \end{array}$$

4.5. *a)* $4\mathbf{A} - 3\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 12 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, *b)* $2\mathbf{B} - \mathbf{C}$ nincs értelmezve. *c)* $2\mathbf{B} - \mathbf{C}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

4.6. Ha a a $[0, k]$ intervallumba eső szám, akkor $0 \le a/k \le 1$, így a/k egész része 0 vagy 1. Részletezve $\lfloor a/k \rfloor$ pontosan akkor 1, ha $a = k$, azaz ha a pixel átlátszó, egyébként 0. Másrészt $1 - \lfloor a/k \rfloor$ pontosan akkor 0, ha $a = k$, egyébként 1. Ezt kihasználva könnyen definiálható a kívánt művelet:

$$a \circledcirc b = \left\lfloor \frac{a}{k} \right\rfloor b + \left(1 - \left\lfloor \frac{a}{k} \right\rfloor\right) a.$$

Így e művelettel elemenként definiált $\mathbf{A} \circledcirc \mathbf{B}$ művelet a kívánt eredményt adja. A 4.2. ábrán három képet 32×24-es mátrixszal szemléltetünk, a férfiarc mátrixát is megadtuk, a másik a háttér. A művelet eredménye a harmadik kép.

4.7. A standard bázisba azon mátrixok tartoznak, amelyekben egyetlen elem 1, a többi 0.

4.8. E mátrixok összes lineáris kombinációja

$$a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a + b + c & a + c \\ a & b + c \end{bmatrix}$$

alakú. Ha egy tetszőleges $\left[\begin{smallmatrix} u & v \\ w & z \end{smallmatrix}\right]$ mátrixról el akarjuk dönteni, hogy a fenti alakú-e, azaz fönnáll-e valamely a, b, c

ismeretlenekre az

$$\begin{bmatrix} a+b+c & a+c \\ a & b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix}$$

egyenlőség, akkor meg kell oldani a mátrixok négy elemére vonatkozó négy egyenletből álló 3-ismeretlenes egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} a+b+c &= u \\ a \quad +c &= v \\ a \qquad &= w \\ b+c &= z \end{aligned}$$

Ha ennek van megoldása, akkor létezik a megfelelő lineáris kombináció, tehát az adott $\left[\begin{smallmatrix} u & v \\ w & z \end{smallmatrix}\right]$ mátrix a kifeszített térbe esik. Ennek az egyenletrendszernek a bővített mátrixát fölírva, majd elemi sorműveletekkel megoldva a következőt kapjuk:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & u \\ 1 & 0 & 1 & v \\ 1 & 0 & 0 & w \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & w \\ 0 & 1 & 1 & u-w \\ 0 & 0 & 1 & v-w \\ 0 & 0 & 0 & w+z-u \end{array}\right].$$

A lépcsős alakból leolvasható, hogy ez az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $w+z-u=0$. Például az $\left[\begin{smallmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix ebbe az altérbe esik. A fenti egyenletrendszer megoldásával az is megkapható, hogy mik a lineáris kombináció együtthatói. Azt kapjuk, hogy $a=3$, $b=1$ és $c=1$.

4.9. *a)* **AB** nincs értelmezve. *b)* $\mathbf{AB}^\mathsf{T} - \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, *c)* $\mathbf{BC} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, *d)* $\mathbf{CB} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *e)* $(\mathbf{DA})\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 32 & 23 \\ 16 & 13 \end{bmatrix}$.

4.10. A méretek alapján a **BC** szorzat nincs értelmezve, a többi:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 9 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}, \ \mathbf{CB} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{CD} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}, \ \mathbf{DC} = \begin{bmatrix} 12 & 12 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{DE} = \mathbf{ED} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Összefoglalva: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, mert különböző típusúak, $\mathbf{BC} \neq \mathbf{CB}$, mert az egyik oldal nincs értelmezve, $\mathbf{CD} \neq \mathbf{DC}$, bár mindkét oldal értelmezve van és azonos típusú. Az előzőekkel ellentétben viszont fennáll a $\mathbf{DE} = \mathbf{ED}$ egyenlőség. Azaz vannak felcserélhető mátrixok, de a mátrixszorzás nem felcserélhető művelet, tehát nem kommutatív!

4.11. Az **AB** szorzat felírható

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}$$

alakban. A **BA** hasonlóképp írható fel! Ellenőrizzük, hogy a 4.11. állítás feltétele (minden k-ra az $\mathbf{A}_{ik}$ blokk oszlopainak száma megegyezik $\mathbf{B}_{kj}$ sorainak számával) valóban szükséges, de elégséges is.

4.12. Számoljunk blokkmátrixként kezelve a mátrixokat:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} + 3\mathbf{C} &= \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] + 3\left[\begin{array}{cc|c|c} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \\
&= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & 3 + 3 \cdot 1 & 0 + 3 \cdot 1 \end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 6 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 6 & 3 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

Ellenőrizzük a számítást közönséges mátrixműveletekkel! Ezután tekintsük a blokkmátrixok szorzását!

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \\
&= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 4 & 6 \\ 3 & 9 \\ \hline 6 & 6 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha ellenőrzésül egyszerű mátrixszorzással is elvégezzük a műveletet!

4.13. Valóban

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.15. A Segre-féle külső szorzat:

$$\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}0&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&2&2&0&4&0&0&0\\2&0&4&4&0&8&0&0&0\end{array}\right].$$

4.16. Legyen $\mathbf{A} \in S^{n_1\times\dots\times n_d}$ egy d-edrendű és $\mathbf{B} \in S^{m_1\times\dots\times m_e}$ egy e-edrendű hipermátrix, és tegyük fel, hogy valamely $1 \leqslant u \leqslant d$ és $1 \leqslant v \leqslant e$ indexre $n_u = m_v = k$. $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ *kontrakciós szorzatán* azt a $(d+e-2)$-edrendű

$\mathbf{C} = [c_{i_1\dots\overline{i_u}\dots i_d j_1\dots\overline{j_v}\dots j_e}] = \langle\mathbf{A},\mathbf{B}\rangle_{u:v} \in S^{n_1\times\dots\times\overline{n_u}\dots n_d\times m_1\times\dots\times\overline{m_v}\times\dots\times m_e}$

hipermátrixot értjük, melyre

$$c_{i_1\dots\overline{i_u}\dots i_d j_1\dots\overline{j_v}\dots j_e} = \sum_{\ell=1}^{k} a_{i_1\dots\ell\dots i_d} b_{j_1\dots\ell\dots j_e},$$

ahol a felülvonás az index törlését jelöli.

4.17. A kontrakciós szorzat:

$$\left\langle \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&2&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right], \begin{bmatrix}2&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\right\rangle_{2:1} = \left[\begin{array}{cc|cc}2&6&2&2\\1&0&1&1\end{array}\right]$$

4.18. *a)* Hamis, *b)* igaz, *c)* igaz.

4.27. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{b} = \begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = 2$, $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} = \mathbf{a}\mathbf{b}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1\\0&2\end{bmatrix}$.

4.28. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1&2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix} = 5$,

$$\mathbf{u}\otimes\mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&2&3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1&2&3\\0&2&4&6\\0&0&0&0\\0&1&2&3\end{bmatrix}.$$

4.29. A skaláris szorzat nem végezhető el, a diadikus szorzat

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} = \mathbf{a}\mathbf{b}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&2&3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1&2&3\\0&2&4&6\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

4.30. $\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

4.36. $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3&-2&1\\2&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$

4.37. A lineáris helyettesítés mátrixszorzatos alakja

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{bmatrix},\quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{bmatrix},\quad \text{és}\quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}.$$

4.38. $\mathbf{E} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$

4.39. $\mathbf{E} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

4.40. $\mathbf{E} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$

4.41. $\mathbf{E} = \begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

4.42. $\begin{bmatrix}2&2&2\\2&2&2\\8&8&8\end{bmatrix}$

4.43. $\begin{bmatrix}a\\2d-2b\\3a+c\\d\end{bmatrix}$

4.44. $\left[\begin{array}{cc|cc}2&3&2&2\\4&5&2&2\\\hline 0&0&2&2\\0&0&3&3\end{array}\right]$

4.45. $\left[\begin{array}{cc|c}2&3&10\\4&5&14\\\hline 0&0&5\end{array}\right]$

4.46. $\left[\begin{array}{cc}5&6\\6&7\\\hline 12&12\end{array}\right]$

4.47. Mivel $[\mathbf{I}_r|\mathbf{S}]$ az $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja, ezért ennek bármely oszlopa az $\mathbf{A}$ mátrix azonos sorszámú oszlopának koordinátás alakja az $\mathbf{B}_r$ oszlopvektoraiban, mint bázisban felírva. Ez épp azt jelenti, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{B}_r[\mathbf{I}_r|\mathbf{S}]$. Ez az oszloptér bármely oszlopára, így $\mathbf{b}$-re is igaz, hisz $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ redukált lépcsős alakja szerint az egyenletrendszer megoldható, így $\mathbf{b}$ eleme az oszloptérnek. Eszerint tehát $\mathbf{b} = \mathbf{B}_r\mathbf{d}_r$.

Az, hogy minden megoldás fölírható ilyen alakba, a Gauss – Jordan-módszerből következik. Meg kell még mutatni, hogy a tételben felírt $\mathbf{x}$ vektor valóban megoldás.

$$\begin{aligned}\mathbf{Ax} &= \mathbf{B}_r \begin{bmatrix}\mathbf{I}_r & \mathbf{S}\end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix}\mathbf{d}_r \\ \mathbf{0}_s\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\mathbf{S} \\ \mathbf{I}_s\end{bmatrix} \mathbf{t}_s \right) \\ &= \mathbf{B}_r \left(\mathbf{d}_r - \mathbf{S}\mathbf{t}_s + \mathbf{S}\mathbf{t}_s\right) = \mathbf{B}_r\mathbf{d}_r \\ &= \mathbf{b}.\end{aligned}$$

Ez bizonyítja az állítás első felét. A második felének bizonyításához csak azt kell látni, hogy $\left[\begin{smallmatrix}-\mathbf{S} \\ \mathbf{I}_s\end{smallmatrix}\right]$ oszlopvektorai a nulltér bázisát alkotják. Ez abból következik, hogy egyrészt kifeszítik a nullteret, másrészt lineárisan függetlenek, hisz az alsó blokkban lévő $\mathbf{I}_s$ mátrix oszlopai lineárisan függetlenek.

4.48. Jelölje $\mathbf{j}$ a csupa 1-esből álló 9-dimenziós vektort, $\mathbf{j}_{456}$ azt, amelynek 4, 5, 6 indexű eleme 1-es, a többi 0. Ekkor a „minden sorösszeg 45” és a „minden oszlopösszeg 45” feltételek ekvivalensek az $\mathbf{Aj} = 45\mathbf{j}$, $\mathbf{j}^\mathsf{T}\mathbf{A} = 45\mathbf{j}^\mathsf{T}$ egyenletekkel, míg pl. az „első blokkoszlop, második blokksor metszetében álló blokk elemeinek összege 45” feltételnek a $\mathbf{j}_{456}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{j}_{123} = 45$ egyenlet felel meg.

4.49. $\mathbb{Z}_2^{2\times2}$-be $2^4 = 16$ mátrix tartozik:

$$\mathbb{Z}_2^{2\times2} = \left\{ \left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1&0\\1&0\end{smallmatrix}\right], \dots, \left[\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right] \right\}.$$

5
Mátrixműveletek algebrája

Áttekintjük a mátrixműveletek legfontosabb algebrai tulajdonságait. Ezek nem csak a mátrixokkal való számolás közben követendő szabályokról szólnak, de hozzásegítenek az lineáris egyenletrendszerek mélyebb megértéséhez, és olyan eszközöket adnak a kezünkbe, például a mátrixfelbontásokkal, melyek a lineáris algebra alkalmazásaiban is fontosak.

Az alapműveletek tulajdonságai

Az összeadás és a skalárral szorzás őrzi a valósok műveleti tulajdonságait, de a mátrixszorzás nem.

Az összeadás és a skalárral való szorzás tulajdonságai Mivel a mátrixok összeadása és skalárral való szorzása elemenként végrehajtható műveletek, ezért műveleti tulajdonságaik természetes módon öröklik meg a számok műveleti tulajdonságait. Például azonos típusú mátrixok összeadása felcserélhető (kommutatív) és csoportosítható (asszociatív) művelet, míg összeg skalárral való szorzása disztributív. Tehát

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}, \quad \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C},$$
$$c(\mathbf{A}+\mathbf{B})=c\mathbf{A}+c\mathbf{B}, \quad (c+d)\mathbf{A}=c\mathbf{A}+c\mathbf{B}.$$

E tulajdonságok igazolását az Olvasóra hagyjuk (ld. 5.4. feladat).

A szorzás tulajdonságai A számok szorzásának algebrai tulajdonságai nem öröklődnek automatikusan a mátrixműveletekre, mint az összeadásnál. Nem is teljesülnek mind, pl. a mátrixszorzás *nem kommutatív*.

A mátrixokkal való számolás közben nem csak arra kell ügyelnünk, hogy bizonyos azonosságok nem teljesülnek, de arra is, hogy bizonyos elemi eljárások nem végezhetők el olyan tág körben, mint azt a valós számoknál megszoktuk.

5.1. ÁLLÍTÁS (MIRE VIGYÁZZUNK A MÁTRIXSZORZÁSNÁL?).
a) *A mátrixszorzás nem kommutatív, azaz* $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ *nem áll fenn bármely két összeszorozható mátrixra.*
b) *Ha* $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$*, akkor az* $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ *feltétel kevés ahhoz, hogy a* $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ *következtetésre jussunk.*
c) *Az* $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$ *egyenlőségből nem következik, hogy* $\mathbf{A}$ *vagy* $\mathbf{B}$ *a nullmátrix.*

► A mátrixszorzás kommutativitásának cáfolására az egyik legegyszerűbb példa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{de} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A 4.10. feladatban további példákat mutatunk.
► A valós számok közt igaz, hogy ha $a \neq 0$ és $ab = ac$, akkor a-val egyszerűsíthetünk, azaz akkor $b = c$. Mátrixokra egy ellenpélda:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{de} \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nullosztóval találkozhatunk a $\mathbb{Z}_m$-ben való számolásnál is, ha m összetett. Például $\mathbb{Z}_6$-ban $2 \cdot 3 = 0$. Összetett m esetén egyszerűsíteni sem lehet mindig $\mathbb{Z}_m$-ben, például $\mathbb{Z}_{12}$-ben $9 \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6$, de $9 \neq 2$.

► *Nullosztónak* nevezzük egy algebrai struktúra olyan nemzérus elemét, melyhez található olyan nemzérus elem, mellyel vett szorzata zérus. Valósok közt ilyenek nincsenek, de a mátrixok közt igen, például

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

5.2. TÉTEL (MÁTRIXSZORZÁS ALGEBRAI TULAJDONSÁGAI). *Legyen* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *és* $\mathbf{C}$ *olyan, hogy a kijelölt műveletek elvégezhetők legyenek, legyen továbbá* c *tetszőleges skalár. Ekkor*

a)	$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$	*csoportosíthatóság, asszociativitás*
b)	$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$	*disztributivitás*
c)	$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$	*disztributivitás*
d)	$(c\mathbf{A})\mathbf{B} = c(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(c\mathbf{B})$	
e)	$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{O}_{n\times t} = \mathbf{O}_{m\times t}$	*szorzás nullmátrixszal*
f)	$\mathbf{I}_m\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{I}_n = \mathbf{A}_{m\times n}$	*szorzás egységmátrixszal*

BIZONYÍTÁS. A fenti tulajdonságok közül csak az elsőt bizonyítjuk, a többit hasonlóan, vagy még egyszerűbben bizonyítható.

a) Valójában többet bizonyítunk. Megmutatjuk, hogy ha az egyenlőség egyik oldalán kijelölt szorzások elvégezhetők, akkor a másik oldalon kijelöltek is. Legyen $\mathbf{A}_{m\times s}$, $\mathbf{B}_{u\times v}$ és $\mathbf{C}_{t\times n}$ három tetszőleges mátrix. Az $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ szorzatban $\mathbf{AB}$ csak $s = u$ esetén végezhető el, a szorzat típusa $m \times v$, ami $\mathbf{C}$-vel csak $v = t$ esetén szorozható meg, és a szorzat $m \times n$-es. Tehát e szorzat csak akkor van értelmezve, ha $\mathbf{B}$ típusa $s \times t$. Hasonló érveléssel ugyanezt kapjuk az $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ szorzatról is.

Az indexek kezelésének könnyítésére elég lesz a bizonyítást sorvektor alakú **A** és oszlopvektor alakú **C** mátrixokra elvégezni, ugyanis az $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ szorzat i-edik sorában és j-edik oszlopában álló elem az **AB** i-edik sorának, azaz az $\mathbf{a}_{i*}\mathbf{B}$ sorvektornak és **C** j-edik oszlopának szorzata, azaz $(\mathbf{a}_{i*}\mathbf{B})\mathbf{c}_{*j}$. Hasonlóképp az $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ szorzat i-edik sorában és j-edik oszlopában álló elem $\mathbf{a}_{i*}(\mathbf{B}\mathbf{c}_{*j})$. Legyen tehát

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Ekkor a szorzat 1×1-es. Először számoljuk ki az **AB** mátrixot, ami $1 \times n$-es: $\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m a_k b_{k1} & \sum_{k=1}^m a_k b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^m a_k b_{kn} \end{bmatrix}$. Innen számolva $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$-t:

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m a_k b_{k1} & \sum_{k=1}^m a_k b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^m a_k b_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m a_k b_{kl} c_l.$$

Hasonlóan, először **BC**-t fölírva, az $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ mátrixra kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^n b_{1l} c_l \\ \sum_{k=1}^m b_{2l} c_l \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n b_{ml} c_l \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^m a_k \left(\sum_{l=1}^n b_{kl} c_l \right) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_k b_{kl} c_l.$$

Az utolsó lépésben a belső szumma minden tagját beszoroztuk a_k-val, a számok közti összeadás és szorzás közti disztributivitást használva. Vagyis mindkét oldalon olyan összeg áll, amely az összes $a_k b_{kl} c_l$ alakú szorzat összege, csak a tagok csoportosítása más. □

► Az asszociativitás következménye, hogy a többtényezős mátrixszorzatokat nem kell zárójelezni, hisz bármelyik zárójelezés ugyanazt az eredményt adja. Így $\mathbf{ABC} = (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$. Az állítás igaz többtényezős szorzatokra is, vagyis az $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_k$ szorzat független a végrehajtás sorrendjétől, de a tényezők sorrendje nem változtatható!

► Megjegyezzük, hogy az asszociativitás imént leírt bizonyítása hasonlóan mondható el, ha az $\mathbf{A} = [a_{ik}]$ mátrix nem csak 1 sorból, és a $\mathbf{C} = [c_{lj}]$ mátrix nem csak egy oszlopból áll: ekkor a $\mathbf{D} = \mathbf{ABC}$ szorzat i-edik sorának j-edik elemére azt kapjuk, hogy az az összes $a_{ik} b_{kl} c_{lj}$ alakú szorzatok összege, azaz

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{ik} b_{kl} c_{lj}. \tag{5.1}$$

Az 5.1 egyenlőség, és az ehhez hasonló számtalan hasonló kifejezés vezette Einsteint arra a felismerésre, hogy az indexelt változók szorzatainak összegében a szumma jelek feleslegesek, hisz azokra az indexekre kell összegezni, amelyek legalább kétszer szerepelnek, míg az egyszer szereplőkre nem. Tehát az előző kettős szumma helyett írhatnánk azt is, hogy

$$d_{ij} = a_{ik} b_{kl} c_{lj},$$

hisz a jobb oldalon i és j csak egyszer szerepel, így k-ra és l-re kell összegezni, azt pedig tudjuk, hogy $k = 1, \dots, m$ és $l = 1, \dots, n$. Ezt a jelölésbeli egyszerűsítést *Einstein-konvenciónak* nevezik. Einstein ezt a relativitás általános elméletéről írt híres dolgozatában használta először 1916-ban. A konvenció használata főként a lineáris algebra fizikai alkalmazásaiban terjedt el, mi e könyvben nem fogjuk használni.

Mátrix hatványozása Csak a négyzetes mátrixok szorozhatók meg önmagukkal, hisz ha egy $m \times n$-es mátrix megszorozható egy $m \times n$-essel, akkor $m = n$. Ezt figyelembe véve természetes módon definiálható négyzetes mátrixok pozitív egész kitevős hatványa:

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}\ldots\mathbf{A}}_{k \text{ tényező}}$$

Kicsit elegánsabban – rekurzióval – is definiálhatjuk e fogalmat: $\mathbf{A}^1 := \mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^{k+1} := \mathbf{A}^k\mathbf{A}$.

Mivel a mátrixszorzás asszociatív, mindegy, hogy milyen sorrendben végezzük el a hatványozást. Ezzel igazolható a következő két összefüggés is:

5.3. ÁLLÍTÁS (HATVÁNYOZÁS AZONOSSÁGAI). *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy négyzetes mátrix! Ekkor*
a) $\mathbf{A}^k\mathbf{A}^m = \mathbf{A}^{k+m}$,
b) $(\mathbf{A}^k)^m = \mathbf{A}^{km}$.

Ha ki akarjuk terjeszteni a hatványozást 0 kitevőre is, kövessük a precedencia-elvet[1], azaz olyan értelmet adjunk $\mathbf{A}^0$-nak, hogy a fenti összefüggések érvényben maradjanak. Például tekintsük az *a)* azonosságot $m = 0$ esetén:

$$\mathbf{A}^k\mathbf{A}^0 = \mathbf{A}^{k+0} = \mathbf{A}^k.$$

Ez minden $\mathbf{A}$ mátrix esetén csak az egységmátrixra igaz, tehát

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n,$$

ahol n a négyzetes $\mathbf{A}$ mérete.

[1] A latin eredetű *precedencia* szó *előzményt* jelent (lásd még precedens). A *precedencia elv* a matematikában fogalmak jelentésének olyan kiterjesztését jelenti, melynek során a korábban megismert tulajdonságok, összefüggések érvényben maradnak.

► A valós számoknál tanult, különböző alapú hatványokra érvényes azonosság itt a kommutativitás hiánya miatt nem érvényes, azaz általában $(\mathbf{AB})^k \neq \mathbf{A}^k\mathbf{B}^k$.

5.4. PÉLDA (MÁTRIX HATVÁNYOZÁSA). *Számítsuk ki az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \textit{és a} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixok k-adik hatványait!

MEGOLDÁS. Számoljuk ki $\mathbf{A}$ hatványait!

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

azaz $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_2$, ebből pedig látjuk, hogy $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}_2\mathbf{A} = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^3\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{I}_2, \ldots$ Tehát általában $\mathbf{A}^{2k} = \mathbf{I}_2$ és $\mathbf{A}^{2k+1} = \mathbf{A}$.

A másik feladatot a hatványozás rekurzív definícióját használva indukcióval kényelmesen meg tudjuk oldani. Először számoljuk ki $\mathbf{A}$ néhány hatványát:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ebből azt sejtjük, hogy $\mathbf{A}^k = \left[\begin{smallmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Ha be tudjuk látni ennek az összefüggésnek az öröklődését k-ról $k+1$-re, akkor kész vagyunk. Más szóval meg kell mutatnunk, hogy ha $\mathbf{A}^k = \left[\begin{smallmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, akkor $\mathbf{A}^{k+1} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Ezt a következő szorzás elvégzése igazolja:

$$\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ □

Miután mátrixok lineáris kombinációja és négyzetes mátrixok egész kitevős hatványa értelmezve van, ezért négyzetes mátrixokra is definiálhatjuk skalár együtthatós polinom helyettesítési értékét. Legyen

$$p(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

egy skalár együtthatós polinom. A p polinom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ helyen vett helyettesítési értékén a

$$p(\mathbf{X}) = a_k\mathbf{X}^k + \ldots + a_2\mathbf{X}^2 + a_1\mathbf{X} + a_0\mathbf{I}_n$$

mátrixot értjük.

5.5. PÉLDA (POLINOM HELYETTESÍTÉSI ÉRTÉKE). *Legyen*

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Mutassuk meg, hogy $p(\mathbf{C}) = \mathbf{O}$*, ha* $p(x) = x^3 + 2x^2 - 1$.

MEGOLDÁS. A $p(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^3 + 2\mathbf{C}^2 - \mathbf{I}$ műveleteit elvégezve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} p(\mathbf{C}) &= \mathbf{C}^3 + 2\mathbf{C}^2 - \mathbf{I} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & 8 & -14 \\ 8 & 7 & -12 \\ 14 & 12 & -21 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -4 & -4 & 7 \\ -4 & -3 & 6 \\ -7 & -6 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$ □

A transzponálás tulajdonságai A következő tétel a transzponálás és a többi művelet kapcsolatáról szól:

5.6. TÉTEL (TRANSZPONÁLÁS TULAJDONSÁGAI). *Legyenek* $\mathbf{A}$ *és* $\mathbf{C}$ *azonos típusú mátrixok,* $\mathbf{B}$ *sorainak száma egyezzen meg* $\mathbf{A}$ *oszlopainak számával, c pedig legyen tetszőleges skalár. Ekkor*
a) $(\mathbf{A}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = \mathbf{A}$,
b) $(\mathbf{A}+\mathbf{C})^\mathsf{T} = \mathbf{A}^\mathsf{T} + \mathbf{C}^\mathsf{T}$,
c) $(c\mathbf{A})^\mathsf{T} = c\mathbf{A}^\mathsf{T}$,
d) $(\mathbf{AB})^\mathsf{T} = \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}$.

BIZONYÍTÁS. Az első három összefüggés magától értetődő, csak az utolsót bizonyítjuk.

Először megmutatjuk, hogy ha $(\mathbf{AB})^\mathsf{T}$ elvégezhető, akkor $\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ is. Az $m \times t$ típusú $\mathbf{A}$ és a $t \times n$ típusú $\mathbf{B}$ szorzata $m \times n$-es, transzponáltja $n \times m$-es, így az $n \times t$ típusú $\mathbf{B}^\mathsf{T}$ és a $t \times m$-es $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ összeszorozhatók, szorzatuk $n \times m$-es, így a tételbeli egyenlőség két oldalának típusa azonos.

A tétel azon alapul, hogy két tetszőleges $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektorra $\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v} = \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{u}$. Ezt az összefüggést a *-gal jelölt egyenlőségnél fogjuk használni. Az $(\mathbf{AB})^\mathsf{T}$ i-edik sorának j-edik eleme

$$\left((\mathbf{AB})^\mathsf{T}\right)_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji} = (\mathbf{A})_{j*}\,(\mathbf{B})_{*i}\,.$$

A $\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ i-edik sorának j-edik eleme

$$\left(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)_{ij} = \left(\mathbf{B}^\mathsf{T}\right)_{i*}\left(\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)_{*j} \overset{*}{=} (\mathbf{A})_{j*}\,(\mathbf{B})_{*i}\,.$$

Tehát $(\mathbf{AB})^\mathsf{T} = \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}$. □

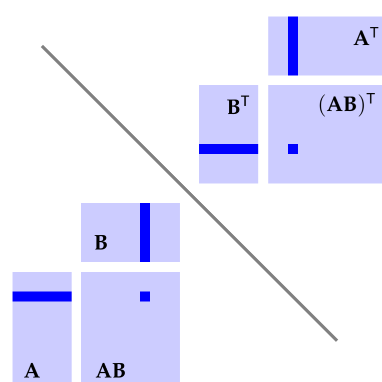
► A tétel *b)* pontjának indukcióval könnyen bizonyítható következménye, hogy többtagú összeg transzponáltja megegyezik a transzponáltak összegével. A *c)* pontot is figyelembe véve kapjuk, hogy mátrixok lineáris kombinációjának transzponáltja megegyezik a mátrixok transzponáltjainak azonos lineáris kombinációjával, azaz

$$(c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2 + \ldots + c_k\mathbf{A}_k)^\mathsf{T} = c_1\mathbf{A}_1^\mathsf{T} + c_2\mathbf{A}_2^\mathsf{T} + \ldots + c_k\mathbf{A}_k^\mathsf{T}.$$

► A tétel *d)* pontjára „szemléletes igazolás” is adható, ami leolvasható az 5.1. ábráról.

► Indukcióval bizonyítható, hogy a *d)*-beli összefüggés többtényezős szorzatokra is fönnáll, azaz

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\ldots\mathbf{A}_k)^\mathsf{T} = \mathbf{A}_k^\mathsf{T}\ldots\mathbf{A}_2^\mathsf{T}\mathbf{A}_1^\mathsf{T}.$$



5.1. ábra: $(\mathbf{AB})^\mathsf{T} = \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ szemléletes bizonyítása

*Mátrixszorzás inverze – mátrixok osztása** Lehet-e mátrixszal osztani, és ha igen, meg tudjuk-e vele oldani az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert vagy az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ mátrixegyenletet úgy, ahogy az $ax = b$ egyenletet megoldjuk az a-val való osztással?

Korábbi tanulmányainkban megtanultuk, hogy az összeadás és a szorzás invertálható műveletek, inverzeik a kivonás, ill. az osztás.

Azon, hogy az összadás művelete invertálható, azt értjük, hogy bármely a és b valós esetén találunk olyan x valóst, hogy $a + x = b$, a megoldás $x = b - a$. A szorzás is invertálható, de csak a nemzérus valósok halmazán. Ez azt jelenti, hogy bármely a nemzérus valóshoz és b valóshoz található olyan x valós szám, hogy $ax = b$, a megoldás $x = b/a$.

Azonos típusú mátrixok közt az $\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{B}$ egyenlet megoldása ugyanolyan egyszerű, mint a számok közt: $\mathbf{X} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$. A mátrixszorzás esete bonyolultabb.

► A mátrixszorzás nem kommutatív ezért az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ és az $\mathbf{YA} = \mathbf{B}$ egyenletek megoldása különböző is lehet. Valójában a mátrixosztás művelete emiatt nem vezethető be, viszont be lehet vezetni egy balról és egy jobbról való osztást, az egyik jele $\backslash$, a másiké $/$. E jelöléssel a fenti két mátrixegyenlet és megoldása:

$$\begin{aligned}
\mathbf{AX} = \mathbf{B} \quad &\Longrightarrow \quad \mathbf{X} = \mathbf{A}\backslash\mathbf{B} \qquad &&\mathbf{B} \text{ balról osztva } \mathbf{A}\text{-val},\\
\mathbf{YA} = \mathbf{B} \quad &\Longrightarrow \quad \mathbf{Y} = \mathbf{B}/\mathbf{A} \qquad &&\mathbf{B} \text{ jobbról osztva } \mathbf{A}\text{-val}.
\end{aligned}$$

Például

$$\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix} \Bigg\backslash \begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3&2\\-1&0\end{bmatrix}, \text{ mert } \begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\-1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix} \text{ és}$$

$$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix} \Bigg/ \begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix}, \text{ mert } \begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$$

► A másik bonyodalmat az okozza, hogy míg az $ax = b$ egyenlet a nullától különböző valósok közt mindig egyértelműen megoldható, addig pl. az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletről tudjuk, hogy végtelen sok megoldása, de 0 megoldása is lehet. E nehézségekre a következő paragrafus egyszerű megoldást ad, melyet később a pszeudoinverz fogalma segítségével általánosítani fogunk (ld. a 7 fejezetet).

Mátrix inverze Tudjuk, hogy az $ax = b$ egyenlet megoldásához elég ismerni *a reciprokát*, más néven a *multiplikatív inverzét*, és azzal szorozni b-t. Ez a gondolat átvihető a mátrixszorzásra is.

Egy nemnulla a szám reciproka az az a^{-1}-gyel jelölt szám, melyre $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Az 1 szerepét mátrixszorzásnál az $\mathbf{I}$ egységmátrix játssza. Világos, hogy adott $\mathbf{A}$ mátrixhoz csak úgy létezhet olyan $\mathbf{X}$, melyre $\mathbf{AX} = \mathbf{XA} = \mathbf{I}$, ha $\mathbf{A}$ négyzetes. Ez a következő definíciót adja:

Egy H halmazon értelmezett kétváltozós (más szóval bináris) *műveleten* olyan függvényt értünk, mely H-beli elempárokhoz H-beli elemet rendel. Például a valós számok összeadása esetén e függvény valós számpárhoz valós számot rendel, mondjuk az $(1.2, 0.4)$ számpárhoz a 1.6-ot. E függvényt a $+$ jellel jelöljük, de a függvényeknél szokásos prefix „$+(a, b)$" jelölés helyett műveleteknél az ún. infix jelölést használjuk, azaz $a + b$-t írunk (lásd erről még a következő széljegyzetet).

A számítástechnikában gyakran találkozunk a műveletek *infix* jelölése mellett a *prefix* vagy *lengyel* és a *postfix* vagy *fordított lengyel jelölésével* is. A prefixnél a műveleti jel az argumentumai előtt, a postfixnél után van. Például a $(3 + 4) \cdot 2$ kifejezést a prefix jelölést használó Lisp nyelvcsalád nyelveiben a

```
(* (+ 3 4) 2)
```

kód, míg például a postfix jelölést használó PostScript nyelvben a

```
3 4 add 2 mul
```

kód számítja ki. (A PostScript nyelvvel találkozhatunk a PDF formátumú fájlokban is.) Ugyanez a formula a komputer algebra nyelvek közül a Mapleben prefix módon

```
'*'('+'(3,4),2)
```

a Mathematicában

```
Times[Plus[3,4],2]
```

alakot ölt. A Sage két lehetőséget kínál:

```
prod([sum([3,4]),2])
mul([add([3,4]),2])
```

Általában egy algebrai struktúra egy elemének egy műveletre vonatkozó inverzéhez a művelet *semleges eleme* szükséges. Az összeadás semleges eleme a 0, mert bármely a elemhez adva a-t kapunk, hasonlóképp a szorzás semleges eleme az 1, mert bármely a elemet vele szorozva a-t kapunk. Összeadás esetén egy elem ellentettjét az $a + x = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk, szorzás esetén a reciprokot az $ax = 1$ megoldásával. Az ellentettet, illetve a reciprokot additív, illetve multiplikatív *inverznek* is nevezzük. Mátrixszorzás semleges eleme az egységmátrix.

5.7. DEFINÍCIÓ (MÁTRIX INVERZE). *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy* $n \times n$*-es mátrix. Azt mondjuk, hogy* $\mathbf{A}$ invertálható*, ha létezik olyan* $\mathbf{B}$ *mátrix, melyre*

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n.$$

A $\mathbf{B}$ *mátrixot* $\mathbf{A}$ inverzének *nevezzük, és* $\mathbf{A}^{-1}$*-nel jelöljük. A nem invertálható mátrixot* szingulárisnak *nevezzük.*

- Világos, hogy ha $\mathbf{A}$ inverze $\mathbf{B}$, akkor $\mathbf{B}$ inverze $\mathbf{A}$.
- Például az alábbi szorzatokban szereplő két mátrix egymás inverze:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- A definícióból nem derül ki, hogy egy mátrixnak lehet-e több inverze, de könnyen megmutatható, hogy nem. Ha ugyanis az $\mathbf{A}$ mátrixnak $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ is inverze, azaz $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ és $\mathbf{AC} = \mathbf{CA} = \mathbf{I}$, akkor

$$\mathbf{C} = \mathbf{CI} = \mathbf{C}(\mathbf{AB}) = (\mathbf{CA})\mathbf{B} = \mathbf{IB} = \mathbf{B}.$$

- Az $\mathbf{A}$ mátrix inverzére használhatjuk az $\mathbf{A}^{-1}$ jelölést, mert megfelel a precedencia-elvnek. Például ha az 5.3. tétel érvényességét megtartva akarunk az $\mathbf{A}^{-1}$ hatványnak értelmet adni, akkor fenn kell álljon rá az $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1+1} = \mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ és a $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{1-1} = \mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ összefüggés.
- Minthogy a mátrixok közti műveleteket a számok közti műveletek táblázatokra való kiterjesztésén keresztül vezettük be, elvárjuk, hogy az 1×1-es mátrixok inverze essen egybe a számok multiplikatív inverzével (reciprokával), azaz ha $\mathbf{A} = [a]$, akkor $\mathbf{A}^{-1} = [a^{-1}] = [1/a]$ legyen igaz. A fenti definíció ennek az elvárásunknak is megfelel.

Egy négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixot *nilpotensnek* nevezünk, ha van olyan k pozitív egész, hogy

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{O}.$$

Például a $\left[\begin{smallmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix nilpotens, mert $\left[\begin{smallmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right]^2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Több alkalmazásban is fontos szerepet kap az alábbi példában szereplő inverz.

5.8. PÉLDA ($\mathbf{I} - \mathbf{A}$ INVERZE NILPOTENS $\mathbf{A}$ ESETÉN). *Mutassuk meg, ha* $\mathbf{A}$ *nilpotens, azaz valamely pozitív* k*-ra* $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$*, akkor* $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ *invertálható, és inverze* $\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^{k-1}$.

MEGOLDÁS. Megmutatjuk, hogy $(\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^{k-1}) = \mathbf{I}$.

$$\begin{aligned} &(\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^{k-1}) \\ &\qquad = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^{k-1} - \mathbf{A} - \mathbf{A}^2 - \ldots - \mathbf{A}^{k-1} - \mathbf{A}^k \\ &\qquad = \mathbf{I} - \mathbf{A}^k \\ &\qquad = \mathbf{I} \end{aligned}$$

Az $(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^{k-1})(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{I}$ összefüggés ugyanígy bizonyítható. □

Elemi mátrixok inverze Minden R elemi sorművelethez van egy olyan R' sorművelet, hogy az R sorművelettel átalakított mátrixot az R' visszaalakítja (ld. **??** feladat). Nevezzük ezt az R' sorműveletet az R sorművelet inverzének. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $S_i \leftrightarrow S_j$ sorművelet inverze önmaga, a cS_i inverze $\frac{1}{c}S_i$, és $S_i + cS_j$ inverze $S_i - cS_j$.

5.9. ÁLLÍTÁS (SORMŰVELET INVERZÉNEK MÁTRIXA). *Minden elemi mátrix invertálható, nevezetesen egy sorművelet elemi mátrixának inverze megegyezik a sorművelet inverzének elemi mátrixával.*

A bizonyításhoz elég belátni, hogy egy sorművelet és az inverz sorművelet mátrixainak szorzata az egységmátrix. Az általános bizonyítás végiggondolását az Olvasóra hagyjuk, itt csak egy-egy konkrét esetet mutatunk meg, nevezetesen 3×3-as mátrixokon az $S_2 \leftrightarrow S_3$, a $3S_2$ és az $S_1 + 4S_3$ sorműveletek és inverzeik mátrixának szorzatát:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-4\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-4\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Az inverz kiszámítása A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix inverzének kiszámításához meg kell oldani az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ mátrixegyenletet, ami egyúttal egy szimultán egyenletrendszer is, és az elemi sorműveletekkel megoldható. Előbb azonban egy kérdésre válaszolnunk kell: nem fordulhat-e elő, hogy az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ mátrixegyenlet megoldható, de a megoldás nem tesz eleget az $\mathbf{XA} = \mathbf{I}$ mátrixegyenletnek? Négyzetes mátrixok esetén *nem* a válasz, ami azt jelenti, hogy mátrix invertálásához elég az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ mátrixegyenlet megoldása!

5.10. TÉTEL (AZ INVERZ LÉTEZÉSÉHEZ ELÉG EGY FELTÉTEL). *A négyzetes* $\mathbf{A}$ *mátrix pontosan akkor invertálható, ha létezik olyan* $\mathbf{B}$ *mátrix, hogy az* $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ *és a* $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ *feltételek egyike teljesül. Ha ilyen* $\mathbf{B}$ *mátrix létezik, az egyértelmű.*

BIZONYÍTÁS. Az inverz mátrix egyértelműségét beláttuk az 5.7. definíció utáni megjegyzések közt. Így elég belátnunk, hogy négyzetes mátrixokra az $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ és a $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ feltételek bármelyikének teljesülése maga után vonja a másik teljesülését is! Sőt, elég e két állítás egyikét igazolni: megmutatjuk, hogy ha a négyzetes $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok kielégítik az $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ egyenletet, akkor $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ is fönnáll, azaz $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ inverzei egymásnak.

Tekintsük az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ mátrixegyenletet. Ezt úgy oldjuk meg, hogy az $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ mátrixot redukált lépcsős alakra hozzuk. Ha ez $[\mathbf{I}|\mathbf{B}]$ alakú, akkor $\mathbf{B}$ az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ egyenlet megoldása, ezért $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ fennáll. A redukált lépcsős alakban zérus sor nem keletkezhet, mert a mátrix jobb oldalát az $\mathbf{I}$ mátrixból kaptuk, ami redukált lépcsős alak, s így egyértelmű. Ha elemi sorműveletekkel zérus sort kapnánk a jobb oldali félmátrixban, akkor volna olyan redukált lépcsős alakja is, mely zérus sort tartalmazna, ami ellentmondás. Ha csak a mátrix bal felén kapnánk zérus sort, akkor az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ egyenletnek nem lenne megoldása, vagyis nem állhatna fenn az $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ egyenlőség sem.

Ezután megmutatjuk, hogy $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$. Ehhez tekintsük a $\mathbf{BY} = \mathbf{I}$ mátrixegyenletet. Ennek megoldásához a $[\mathbf{B}|\mathbf{I}]$ mátrixot kell redukált lépcsős alakra hozni. A előzőekből tudjuk, hogy elemi sorműveletekkel az

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] \Longrightarrow [\mathbf{I}|\mathbf{B}]$$

átalakítás megvalósítható. Az átalakítás lépéseinek inverzeit fordított sorrendben elvégezve az

$$[\mathbf{I}|\mathbf{B}] \Longrightarrow [\mathbf{A}|\mathbf{I}]$$

transzformációt kapjuk. Itt minden lépésben fölcserélve a két részmátrixot a kívánt

$$[\mathbf{B}|\mathbf{I}] \Longrightarrow [\mathbf{I}|\mathbf{A}]$$

átalakítást kapjuk. Ez azt jelenti, hogy a $\mathbf{BY} = \mathbf{I}$ mátrixegyenletetnek, az $\mathbf{Y} = \mathbf{A}$ megoldása, azaz $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$. □

Összefoglalva:

5.11. ÁLLÍTÁS (INVERZ KISZÁMÍTÁSA ELEMI SORMŰVELETEKKEL). *A négyzetes* $\mathbf{A}$ *mátrix invertálható, ha az* $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ *mátrix elemi sorműveletekkel* $[\mathbf{I}|\mathbf{B}]$ *alakra hozható, ekkor* $\mathbf{A}$ *inverze* $\mathbf{B}$. *Ha* $\mathbf{A}$ *redukált lépcsős alakja nem az* $\mathbf{I}$ *mátrix, akkor* $\mathbf{A}$ *nem invertálható.*

5.12. PÉLDA (AZ INVERZ KISZÁMÍTÁSA). *Számítsuk ki az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \textit{és a} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixok inverzét!

MEGOLDÁS. A kiküszöböléssel oszloponként haladva:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&3&4&0&1&0\\3&4&6&0&0&1\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-1&-2&-2&1&0\\0&-2&-3&-3&0&1\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&-3&2&0\\0&1&2&2&-1&0\\0&0&1&1&-2&1\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&0&1\\0&1&0&0&3&-2\\0&0&1&1&-2&1\end{array}\right]$$

Tehát

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix}-2&0&1\\0&3&-2\\1&-2&1\end{bmatrix}.$$

A $\mathbf{B}$ inverzének kiszámítása hasonló lépésekkel:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\2&1&0&0&0&1&0&0\\3&2&1&0&0&0&1&0\\4&3&2&1&0&0&0&1\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-2&1&0&0\\0&2&1&0&-3&0&1&0\\0&3&2&1&-4&0&0&1\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-2&1&0&0\\0&0&1&0&1&-2&1&0\\0&0&2&1&2&-3&0&1\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-2&1&0&0\\0&0&1&0&1&-2&1&0\\0&0&0&1&0&1&-2&1\end{array}\right]$$

Tehát

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{bmatrix}.$$

□

5.13. TÉTEL (2 × 2-ES MÁTRIX INVERZE). *Az* $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right]$ *mátrix pontosan akkor invertálható, ha* $ad - bc \neq 0$*, és ekkor*

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}.$$

BIZONYÍTÁS. Azt, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixnak valóban a fenti mátrix az inverze, egyszerű mátrixszorzással ellenőrizhetjük. Azt, hogy az $ad - bc \neq 0$ feltétel az invertálhatóságnak elégséges feltétele, a képlet bizonyítja. A feltétel szükségességének belátásához vegyük észre, hogy $ad - bc = 0$, azaz $ad = bc$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{A}$ egyik sora a másik skalárszorosa. Ekkor viszont az egyik sor kinullázható, vagyis az $\mathbf{A}$ mátrix nem alakítható elemi sorműveletekkel egységmátrixszá. □

Az inverz tulajdonságai Megvizsgáljuk a mátrixinvertálás más műveletekkel való kapcsolatát.

5.14. TÉTEL (AZ INVERZ ALAPTULAJDONSÁGAI). *Tegyük fel, hogy* $\mathbf{A}$ *és* $\mathbf{B}$ *egyaránt* $n \times n$*-es invertálható mátrixok,* $c \neq 0$ *skalár és* k *pozitív egész. Ekkor igazak a következők:*

a) $\mathbf{A}^{-1}$ *invertálható, és inverze* $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$,

b) $c\mathbf{A}$ *invertálható, és inverze* $\frac{1}{c}\mathbf{A}^{-1}$,

c) $\mathbf{AB}$ *invertálható, és inverze* $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$,

d) $\mathbf{A}^k$ *invertálható, és inverze* $\left(\mathbf{A}^k\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^k$, *definíció szerint ezt értjük* $\mathbf{A}^{-k}$*-n,*

e) $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ *invertálható, és* $\left(\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^\mathsf{T}$.

BIZONYÍTÁS. Az állítások közül a fontosabbakat bizonyítjuk, a többit feladatként az Olvasóra hagyjuk:

c) Az

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$$

szorzat bizonyítja, hogy $\mathbf{AB}$ invertálható, és inverze $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

d) Az $\left(\mathbf{A}^k\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^k$ egyenlőség igaz volta a

$$\underbrace{\mathbf{AA}\dots\mathbf{A}}_{k \text{ tényező}}\underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\dots\mathbf{A}^{-1}}_{k \text{ tényező}} = \underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\dots\mathbf{A}^{-1}}_{k \text{ tényező}}\underbrace{\mathbf{AA}\dots\mathbf{A}}_{k \text{ tényező}} = \mathbf{I}$$

felírásból leolvasható, mert a szorzatok közepén lévő két mátrix szorzata mindig $\mathbf{I}$, ami elhagyható, és e lépést k-szor ismételve végül a kívánt eredményt kapjuk:

$$\underbrace{\mathbf{AA}\dots(\mathbf{A}}_{k \text{ tényező}}\underbrace{\mathbf{A}^{-1})\mathbf{A}^{-1}\dots\mathbf{A}^{-1}}_{k \text{ tényező}} = \underbrace{\mathbf{AA}\dots\mathbf{A}}_{k-1 \text{ tényező}}\underbrace{\mathbf{A}^{-1}\dots\mathbf{A}^{-1}}_{k-1 \text{ tényező}} = \dots = \mathbf{I}.$$

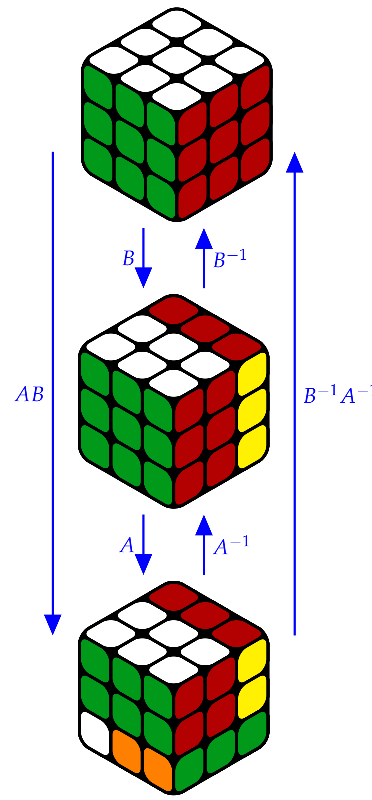
□

► A *(c)* állítás indukcióval általánosítható véges sok mátrix szorzatára: ha az azonos méretű négyzetes $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$,… $\mathbf{A}_m$ mátrixok mindegyike invertálható, akkor szorzatuk is, és

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\dots\mathbf{A}_m)^{-1} = \mathbf{A}_m^{-1}\dots\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}.$$

► A *c)* állításbeli összefüggéshez hasonlóval találkozhatunk a Rubik-kocka forgatása közben is. Egy forgatást jelöljön A, egy másikat B. A függvények kompozíciójához hasonlóan definiáljuk e két transzformáció szorzatát: a B majd az A forgatás egymás után való elvégzésével kapott transzformációt jelölje AB (ld. 5.2 ábra). E transzformáció inverze visszaállítja az eredeti állapotot, ehhez előbb az A transzformáció inverzét kell végrehajtani, majd a B inverzét, tehát $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

► Az $\mathbf{A}^{-k}$ *(d)* pontbeli definíciója is megfelel a precedencia elvnek. Pl. az $\mathbf{A}^m\mathbf{A}^n = \mathbf{A}^{m+n}$ összefüggés kiterjesztése negatív kitevőre az $\mathbf{A}^k\mathbf{A}^{-k} = \mathbf{A}^0$ formulához vezet, amiből azt kapjuk, hogy $\mathbf{A}^{-k} = (\mathbf{A}^k)^{-1}$.



5.2. ábra: Jelölje A a bűvös kocka alsó, B a jobb hátsó oldalának elforgatását, és jelölje AB a B, majd az A egymás után való elvégzésével kapott transzformációt. (Ahogy a függvények összetételénél, előbb a jobb oldali, majd a bal oldali függvényt értékeljük ki, hajtjuk végre.) Ennek inverze $(AB)^{-1}$ úgy kapható meg, ha előbb végrehajtjuk az A^{-1} majd a B^{-1} transzformációt. Ezek szorzata $B^{-1}A^{-1}$, tehát $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Az invertálhatóság és az egyenletrendszerek megoldhatósága A következő tétel a mátrixok invertálhatóságát, az egyenletrendszerek megoldásánál használt elemi sorműveleteket és az egyenletrendszerek megoldhatóságát kapcsolja össze.

5.15. TÉTEL (AZ INVERTÁLHATÓSÁG ÉS AZ EGYENLETRENDSZEREK). *Adva van egy $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix. Az alábbi állítások ekvivalensek:*

a) $\mathbf{A}$ *invertálható;*

b) *az* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *mátrixegyenlet bármely $n \times t$-es* $\mathbf{B}$ *mátrixra egyértelműen megoldható;*

c) *az* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *egyenletrendszer bármely n dimenziós* $\mathbf{b}$ *vektorra egyértelműen megoldható;*

d) *a homogén lineáris* $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ *egyenletrendszernek a triviális* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *az egyetlen megoldása;*

e) $\mathbf{A}$ *redukált lépcsős alakja* $\mathbf{I}$*;*

f) $\mathbf{A}$ *előáll elemi mátrixok szorzataként.*

BIZONYÍTÁS. Az állítások ekvivalenciáját az *(a)* $\Rightarrow$ *(b)* $\Rightarrow$ *(c)* $\Rightarrow$ *(d)* $\Rightarrow$ *(e)* $\Rightarrow$ *(f)* $\Rightarrow$ *(a)*, implikációk igazolásával bizonyítjuk.

(a) $\Rightarrow$ *(b)*: Legyen tehát $\mathbf{A}$ invertálható és legyen $\mathbf{B}$ egy tetszőleges $n \times t$ méretű mátrix. Ekkor az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ egyenlet mindkét oldalát $\mathbf{A}^{-1}$-gyel balról szorozva kapjuk, hogy $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, azaz $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Ez azt mutatja, hogy egyrészt a mátrixegyenletnek van megoldása, másrészt hogy más megoldása nincs, mivel így minden megoldás megkapható, és $\mathbf{A}$ inverze egyértelmű.

(b) $\Rightarrow$ *(c)*: Nyilvánvaló a $\mathbf{B} = \mathbf{b}$ választással.

(c) $\Rightarrow$ *(d)*: Nyilvánvaló a $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ választással.

(d) $\Rightarrow$ *(e)*: Egy n-ismeretlenes, n egyenletből álló homogén lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha együtthatómátrixának redukált lépcsős alakja $\mathbf{I}_n$.

(e) $\Rightarrow$ *(f)*: Ha $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja $\mathbf{I}_n$, akkor létezik elemi sorműveletek olyan sorozata, mely az $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{I}_n$ transzformációt elvégzi. Jelölje az elemi sorműveletekhez tartozó elemi mátrixokat $\mathbf{E}_1, \ldots \mathbf{E}_k$. Ekkor tehát $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \ldots \mathbf{E}_k\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. Innen $\mathbf{A}$ kifejezhető az $\mathbf{E}_1^{-1}$-nel,... $\mathbf{E}_k^{-1}$-nel balról való beszorzás után:

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_k^{-1} \ldots \mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_1^{-1}.$$

Elemi mátrixok inverze elemi mátrix, tehát $\mathbf{A}$ előáll elemi mátrixok szorzataként.

(f) $\Rightarrow$ *(a)*: Az $\mathbf{A} = \mathbf{E}_k^{-1} \ldots \mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_1^{-1}$ mátrix minden tényezője invertálható, mivel mindegyik elemi mátrix, így szorzatuk is, és az inverz

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \ldots \mathbf{E}_k. \qquad \square$$

► A tétel sok pontjának ekvivalenciája azt jelenti, hogy közülük bármely kettőre igaz, hogy „az egyik pontosan akkor igaz, ha a másik”.

Például „**A** pontosan akkor invertálható, ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer minden **b** vektorra egyértelműen megoldható”.

► Később megmutatjuk azt is, hogy **A** pontosan akkor invertálható, ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer minden **b** vektorra megoldható. Azaz az egyértelműség a feltételből kihagyható. Másként fogalmazva, ha $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ minden **b** vektorra megoldható, akkor a megoldás minden **b**-re egyértelmű.

5.16. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA MÁTRIXINVERTÁLÁSSAL). *Oldjuk meg az*

$$\begin{aligned} 2x + y &= 2 \\ 5x + 3y &= 3 \end{aligned}$$

egyenletrendszert mátrixinvertálással.

MEGOLDÁS. Az együtthatómátrix és inverze az 5.13. tétel szerint

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix},$$

így az ismeretlenek (x, y) vektorára

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

□

5.17. PÉLDA (MÁTRIXEGYENLET MEGOLDÁSA MÁTRIXINVERTÁLÁSSAL). *Oldjuk meg az* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *mátrixegyenletet, ahol*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

MEGOLDÁS. Az **A** mátrix megegyezik az előző feladatbeli mátrixszal, így tudjuk, hogy invertálható, és ismerjük az inverzét. Az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ mátrixegyenlet megoldása:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 3 & -9 & -8 \end{bmatrix}.$$

□

► Megjegyezzük, hogy lineáris egyenletrendszert mátrixinvertálással ritkán oldunk meg, mert műveleigénye valamivel nagyobb, mint az egyszerű kiküszöbölésnek.

5.18. PÉLDA (MÁTRIX ELEMI MÁTRIXOK SZORZATÁRA BONTÁSA). *Bontsuk fel az* $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{smallmatrix}\right]$ *mátrixot elemi mátrixok szorzatára!*

MEGOLDÁS. Az 5.15. tétel bizonyításának *(e)* $\Rightarrow$ *(f)* lépése szerint ha egy $\mathbf{A}$ mátrixot elemi sorműveletekkel az egységmátrixba lehet transzformálni, akkor az elemi sorműveletek inverzei fordított sorrendben elvégezve az $\mathbf{I}$-t $\mathbf{A}$-ba transzformálják. Ez viszont azt jelenti, hogy a hozzájuk tartozó elemi mátrixok szorzata épp $\mathbf{A}$.

Elemi sorműveletek		Elemi mátrixok	Elemi mátrixok inverzei
$\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}$			
$\Downarrow$	S_2-3S_1	$\mathbf{E}_1=\begin{bmatrix}1&0\\-3&1\end{bmatrix}$	$\mathbf{E}_1^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}$			
$\Downarrow$	$-S_2$	$\mathbf{E}_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$	$\mathbf{E}_2^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$			
$\Downarrow$	S_1-2S_2	$\mathbf{E}_3=\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}$	$\mathbf{E}_3^{-1}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$			

A fenti átalakítás nyomán tehát $\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A}=\mathbf{I}$, amiből $\mathbf{A}=\mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_3^{-1}$, azaz

$$\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix},$$

így $\mathbf{A}$-t három elemi mátrix szorzatára bontottuk. □

Invertálhatóság és bázis Az 5.15. tétel szerint a négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix invertálhatósága azzal ekvivalens, hogy a homogén lineáris $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ egyenletrendszernek a triviális az egyetlen megoldása. Mivel $\mathbf{Ax}$ az $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak egy lineáris kombinációja, ezért ez azt jelenti, hogy a nullvektor csak egyféleképp áll elő $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként, a triviális módon. Tehát $\mathbf{A}$ oszlopvektorai lineárisan függetlenek! Ez egyúttal azt is jelenti, hogy $\mathbf{A}$ oszlopvektorai bázist alkotnak, és hogy $\mathrm{r}(\mathbf{A})=n$. Felhasználva a **??** tételt, mely szerint a sortér és az oszloptér dimenziója megegyezik a ranggal, a következő tételt kapjuk:

5.19. KÖVETKEZMÉNY (INVERTÁLHATÓSÁG ÉS BÁZIS). *Adva van egy valós $n\times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix. Az alábbi állítások ekvivalensek:*

a) $\mathbf{A}$ *invertálható;*

b) $\mathbf{A}$ *oszlopvektorai lineárisan függetlenek;*

c) $\mathbf{A}$ *oszlopvektorai bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben;*

d) $\mathbf{A}$ *sorvektorai lineárisan függetlenek;*

e) $\mathbf{A}$ *sorvektorai bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben;*

f) $\mathrm{r}(\mathbf{A})=n$.

A fenti állításokat a tagadásukkal helyettesítjük és kiegészítjük azzal, hogy ha egy mátrix sorvektorai közt lineáris kapcsolat van, akkor a redukált lépcsős alakban szükségképpen lesz zérussor:

5.20. KÖVETKEZMÉNY (SZINGULÁRIS MÁTRIXOK). *Adva van egy valós $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix. Az alábbi állítások ekvivalensek:*
a) $\mathbf{A}$ *szinguláris (azaz nem invertálható);*
b) $\mathbf{A}$ *oszlopvektorai lineárisan összefüggők;*
c) az $\mathbf{A}$ *oszlopvektorai által kifeszített altér dimenziója kisebb n-nél;*
d) $\mathbf{A}$ *sorvektorai lineárisan összefüggők;*
e) az $\mathbf{A}$ *sorvektorai által kifeszített altér dimenziója kisebb n-nél;*
f) $\mathbf{A}$ *bármely lépcsős alakjának (így redukált lépcsős alakjának is) van zérus sora;*
g) $\mathrm{r}(\mathbf{A}) < n$.

Báziscsere Legyen $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ és $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ az $\mathbf{R}^n$ két bázisa, és jelölje $\mathbf{X}_{C \leftarrow B}$ a B-ről C-re, $\mathbf{Y}_{B \leftarrow C}$ a C-ről B-re való áttérés mátrixát. Legyen továbbá $\mathbf{v}$ a tér egy tetszőleges vektora, a B bázisbeli alakja $[\mathbf{v}]_B$. A 4.26. tétel szerint

$$[\mathbf{v}]_C = \mathbf{X}_{C \leftarrow B}[\mathbf{v}]_B, \quad \text{és} \quad [\mathbf{v}]_B = \mathbf{Y}_{B \leftarrow C}[\mathbf{v}]_C.$$

A második egyenletbe helyettesítve az elsőt kapjuk, hogy

$$[\mathbf{v}]_B = \mathbf{Y}_{B \leftarrow C}\mathbf{X}_{C \leftarrow B}[\mathbf{v}]_B,$$

azaz $\mathbf{Y}_{B \leftarrow C}\mathbf{X}_{C \leftarrow B}$ minden vektort önmagába visz, tehát egyenlő az egységmátrixszal, vagyis $\mathbf{Y}_{B \leftarrow C}$ és $\mathbf{X}_{C \leftarrow B}$ inverzei egymásnak.

5.21. TÉTEL (AZ ÁTTÉRÉS MÁTRIXÁNAK INVERZE). *Ha $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ és $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ az $\mathbf{R}^n$ két bázisa, akkor a B-ről C-re való áttérés $\mathbf{X}_{C \leftarrow B}$ mátrixa, valamint a C-ről B-re való áttérés $\mathbf{Y}_{B \leftarrow C}$ mátrixa is invertálható, és egymás inverzei, azaz $\mathbf{X}_{C \leftarrow B}^{-1} = \mathbf{Y}_{B \leftarrow C}$ vagy más alakban $\mathbf{X}_{C \leftarrow B}\mathbf{Y}_{B \leftarrow C} = \mathbf{I}_n$.*

5.22. PÉLDA (AZ ÁTTÉRÉS MÁTRIXÁNAK INVERZE). *Az $\mathbb{R}^3$ egy $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázisában felírtuk a standard egységvektorokat:*

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_B, \quad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}_B, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_B.$$

Írjuk fel $\mathcal{B}$ bázisvektorainak standard bázisbeli koordinátás alakját!

MEGOLDÁS. Jelölje $\mathcal{E}$ a standard bázist. Ennek vektorait kifejeztük a $\mathcal{B}$ bázis elemeivel, az ezekből képzett mátrixszal tehát az $\mathcal{E}$-beli vektorok

$\mathcal{B}$-beli koordinátás alakja fölírható, tehát ez a $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}$ áttérés mátrixa, azaz

$$\mathbf{X}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ennek inverze a keresett mátrix:

$$\mathbf{Y}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{X}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ennek oszlopvektorai adják a $\mathcal{B}$ vektorainak $\mathcal{E}$-beli alakját. □

Feladatok

Igaz – hamis

5.1. A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha elemi sorműveletekkel megkapható az $\mathbf{I}$ mátrixból.

5.2. Ha elemi sorműveletek $\mathbf{A}$-t $\mathbf{B}$-be viszik, akkor az inverz sorműveletek $\mathbf{B}$-t $\mathbf{A}$-ba viszik.

5.3. Ha elemi sorműveletek $\mathbf{A}$-t $\mathbf{B}$-be viszik, akkor az inverz sorműveletek fordított sorrendben végrehajtva $\mathbf{B}$-t $\mathbf{A}$-ba viszik.

Műveleti azonosságok

5.4. Összeadás és skalárral szorzás tulajdonságai Legyen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ azonos típusú ($m \times n$-es) mátrix, c és d legyenek skalárok. Ekkor

a) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ (felcserélhetőség, kommutativitás)
b) $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$ (csoportosíthatóság, asszociativitás)
c) $\mathbf{A}+\mathbf{O}_{m\times n}=\mathbf{A}$ (zérusmátrix)
d) $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{O}_{m\times n}$ (ellentett létezése)
e) $c(d\mathbf{A})=(cd)\mathbf{A}$ (csoportosíthatóság)
f) $(c+d)\mathbf{A}=c\mathbf{A}+d\mathbf{A}$ (disztributivitás)
g) $c(\mathbf{A}+\mathbf{B})=c\mathbf{A}+c\mathbf{B}$ (disztributivitás)
h) $0\mathbf{A}=\mathbf{O}_{m\times n}$, $1\mathbf{A}=\mathbf{A}$, $-1\mathbf{A}=-\mathbf{A}$

5.5. Egy algebrai kifejezésben végrehajtjuk az alábbi helyettesítést:

$$\begin{aligned} u &= 3x_1+2x_2+4x_3\\ v &= x_1-3x_2+x_3\\ w &= 2x_1-x_2-3x_3 \end{aligned}$$

Írjuk fel e lineáris helyettesítést mátrixszorzatos alakban. Legyen $(u^2+v^2+w^2)(2u-v-w)$ az a kifejezés, melyben a helyettestést elvégezzük. Írjuk fel e kifejezést a helyettesítés előtt és után mátrixműveletek segítségével!

Számítási feladatok

Bontsuk fel a következő mátrixokat elemi mátrixok szorzatára!

5.6. $\begin{bmatrix}1&3\\2&8\end{bmatrix}$

5.7. $\begin{bmatrix}1&2\\-2&-1\end{bmatrix}$

5.8. $\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$

5.9. $\begin{bmatrix}2&4\\3&8\end{bmatrix}$

5.10. $\begin{bmatrix}2&0&4\\0&2&0\\3&2&7\end{bmatrix}$

5.11. $\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&2\\2&4&5\end{bmatrix}$

5.12. Határozzuk meg az összes olyan 2×2-es $\mathbf{A}$ mátrixot, melyre $\mathbf{A}^2=\mathbf{O}$. Másként fogalmazva határozzuk meg a nullmátrix összes négyzetgyökét!

5.13. Számítsuk ki az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$$

mátrix k-adik hatványait!

5.14. Írjuk fel a mátrixszorzás definícióját az Einstein-konvenciót használva.

Blokkmátrixok

5.15. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ invertálható mátrixok, akkor a következő ún. blokkdiagonális mátrix invertálható, és inverze

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{D}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{-1}&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{D}^{-1}\end{bmatrix}.$$

továbbá tetszőleges, de megfelelő típusú $\mathbf{B}$ mátrix esetén

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{B}\\\mathbf{O}&\mathbf{D}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{-1}&-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\\\mathbf{O}&\mathbf{D}^{-1}\end{bmatrix}.$$

5.16. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ négyzetes mátrixok, akkor

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{B}\\\mathbf{C}&\mathbf{D}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}&-\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\\-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X}&\mathbf{D}^{-1}+\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{X}=(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}$, és feltételezzük, hogy minden felírt mátrixinverz létezik.

Az előbbi két feladat valamelyikének felhasználásával számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzét!

5.17. $\begin{bmatrix}2&3&0&0&0\\1&2&0&0&0\\0&0&7&3&3\\0&0&8&1&2\\0&0&4&4&3\end{bmatrix}$

5.18. $\begin{bmatrix}2&3&1&1&1\\1&2&1&1&1\\0&0&7&3&3\\0&0&8&1&2\\0&0&4&4&3\end{bmatrix}$

5.19. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bizonyítások

5.20. Bizonyítsuk be, hogy ha $c\mathbf{A} = \mathbf{O}$, akkor vagy $c = 0$, vagy $\mathbf{A} = \mathbf{O}$.

5.21. Az $S_i \leftrightarrow S_j$ sorműveletthez tartozó elemi mátrixot jelölje $\mathbf{E}_{ij}$, a cS_i-hez tartozót $\mathbf{E}_i(c)$ és a $S_i + cS_j$ sorműveletthez tartozót $\mathbf{E}_{ij}(c)$. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{E}_{ij}^{-1} = \mathbf{E}_{ij}$, $\mathbf{E}_i(c)^{-1} = \mathbf{E}_i(\frac{1}{c})$ és $\mathbf{E}_{ij}(c)^{-1} = \mathbf{E}_{ij}(-c)$.

5.22. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ fölcserélhető $\mathbf{B}$-vel és $\mathbf{B}$ invertálható, akkor $\mathbf{A}$ fölcserélhető $\mathbf{B}^{-1}$-gyel is.

Absztrakció

5.23. INVERTÁLHATÓ MŰVELET Legyen $\circledcirc$ egy H-n értelmezett kétváltozós művelet, azaz egy $H^2 \to H$ függvény. Fogalmazzuk meg, mit értünk azon, hogy $\circledcirc$ invertálható egy $R \subseteq H$ részhalmazán. Hogyan változik a definíció, ha a művelet kommutatív?

5.24. ELEM INVERZE Legyen $\circledcirc$ egy H-n értelmezett kétváltozós művelet.

1. Mit értünk azon, hogy $e \in H$ e művelet semleges eleme?
2. Mit értünk azon, hogy $b \in H$ az $a \in H$ elem inverze?

Műveletek speciális mátrixokkal

A gyakorlatban gyakran találkozunk olyan speciális mátrixokkal, melyekkel a műveletek egyszerűbben végezhetők el, és olyanokkal, melyek mátrixműveletek segítségével definiálhatók.

Diagonális mátrixok A mátrixműveletek definíciói alapján magától értetődő, hogy diagonális mátrixokkal hogyan végezhetők el a mátrixműveletek. Először egyszerű példákat mutatunk.

5.23. PÉLDA (MŰVELETEK DIAGONÁLIS MÁTRIXOKKAL). *Legyen* $\mathbf{A} = \operatorname{diag}(1,2,3)$, $\mathbf{B} = \operatorname{diag}(5,4,3)$. *Ellenőrizzük az alábbi számításokat, és fogalmazzunk meg általános összefüggéseket diagonális mátrixokkal végzett műveletekről.*

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{bmatrix}, \text{ ahol } k \text{ egész szám.}$$

5.24. TÉTEL (MŰVELETEK DIAGONÁLIS MÁTRIXOKKAL). *Legyen* $\mathbf{A} = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{B} = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$, *és legyen k egész szám. Ekkor*

a) $\mathbf{AB} = \operatorname{diag}(a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n)$,
b) $\mathbf{A}^k = \operatorname{diag}(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k)$, *speciálisan*
c) $\mathbf{A}^{-1} = \operatorname{diag}(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1})$.

Permutáló mátrixok és kígyók Könnyen kezelhetők a diagonális mátrixok sorainak permutációjával kapott mátrixok.

5.25. PÉLDA (SOROK PERMUTÁCIÓJA MÁTRIXSZORZÁSSAL). *Alkalmazzunk több sorcserét az egységmátrixon. Az így kapott mátrixszal balról való szorzás milyen hatással van a beszorzott mátrixra? Szemléltessük ezt* $\mathbf{I}_4$*-en az* $S_1 \leftrightarrow S_2$, $S_2 \leftrightarrow S_4$ *sorcserékkel.*

MEGOLDÁS. Legyen **P** az $\mathbf{I}_4$-ből a fent megadott két sorcserével kapott mátrix, és legyen **A** egy tetszőleges $4 \times n$-es mátrix. Ekkor

$$\mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{S_1 \leftrightarrow S_2}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{S_2 \leftrightarrow S_4}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P}$$

$$\mathbf{PA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$$

Azt tapasztaljuk, hogy a **PA** az **A**-ból a soroknak épp azzal a permutációjával kapható, amely permutációval **I**-ből a **P**-t kaptuk. □

5.26. DEFINÍCIÓ (PERMUTÁLÓ MÁTRIX, KÍGYÓ). *A diagonális mátrixok sorainak permutációjával kapott mátrixot* kígyónak *(más néven* transzverzálisnak*) nevezzük, speciálisan az egységmátrixból ugyanígy kapott mátrixot* permutáló mátrixnak *(más néven* permutációmátrixnak*) hívjuk.*

► Könnyen látható, hogy a permutáló mátrix olyan négyzetes mátrix, melynek minden sorában és minden oszlopában *pontosan* egy 1-es van, az összes többi elem 0. A kígyó olyan négyzetes mátrix, melynek minden sorában és minden oszlopában *legföljebb* egy nemnulla elem van.

► Minden kígyó megkapható egy diagonális mátrixból oszlopcserékkel is. Egy diagonális mátrixból akkor is kígyót kapunk, ha a sorok permutációja mellett az oszlopokat is permutáljuk.

5.27. PÉLDA (KÍGYÓK). *Az alábbi mátrixok mindegyike kígyó, az utolsó kettő egyúttal permutáló mátrix is:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.28. TÉTEL (MŰVELETEK PERMUTÁLÓ MÁTRIXOKKAL). *Bármely két azonos méretű permutáló mátrix szorzata és egy permutáló mátrix bármely egész kitevős hatványa permutáló mátrix. Permutáló mátrix inverze megegyezik a transzponáltjával, azaz ha* **P** *permutáló mátrix, akkor*

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ két permutáló mátrix. Szorzatuk sorvektorai $\mathbf{a}_{i*}\mathbf{B}$ alakúak, ahol $\mathbf{a}_{i*}$ megegyezik valamelyik standard egységvektorral, pl. $\mathbf{a}_{i*} = \mathbf{e}_k$. Ekkor a szorzatvektornak csak az az eleme 1, amelyik oszlop $\mathbf{e}_k$-val megegyezik, és ilyen oszlop pontosan egy van. Tehát a szorzatmátrix minden sorában pontosan egy elem 1, a többi 0. Oszlopokra az állítás hasonlóan bizonyítható. A szorzatra vonatkozó állítás természetes következménye a pozitív egész kitevős hatványokra vonatkozó állítás. A negatív egész kitevőkre is igaz az állítás. Ennek igazolásához elég az inverzre belátni.

Tekintsük a $\mathbf{PP}^\mathsf{T}$ szorzatot. A $(\mathbf{PP}^\mathsf{T})_{ii}$ elem a $\mathbf{P}_{i*}$ vektornak és a $(\mathbf{P}^\mathsf{T})_{*i} = \mathbf{P}_{i*}$ vektornak a szorzata, vagyis 1, míg

$$(\mathbf{PP}^\mathsf{T})_{ij} = (\mathbf{P})_{i*}(\mathbf{P}^\mathsf{T})_{*j} = (\mathbf{P})_{i*} \cdot (\mathbf{P})_{j*},$$

azaz a szorzat i-edik sorának j-edik eleme a $\mathbf{P}$ i-edik és j-edik sorvektorának skalárszorzata, ami 0, mivel két különböző sorban az 1-es különböző helyen van. □

► Az alábbi példa szemlélteti a tételben kimondott egyszerű állítást:

$$\mathbf{PP}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Háromszögmátrixok A Gauss-kiküszöbölés végrehajtásakor az együtthatómátrixot lépcsős alakra transzformáltuk, melyben a főátló alatt mindig csak nullák szerepelnek. Az ilyen mátrixok nem csak a Gauss-kiküszöbölésnél fontosak.

5.29. definíció (Háromszögmátrix). *Azokat a mátrixokat, melyek főátlója alatt csak* 0*-elemek szerepelnek* felső háromszögmátrixnak*, azokat, melyek főátlója fölött csak* 0*-elemek vannak* alsó háromszögmátrixnak *nevezzük. Ha egy háromszögmátrix főátlójában csupa* 1*-es áll,* egység háromszögmátrixról *beszélünk.*

A Gauss-kiküszöbölésnél kapott felső háromszögmátrixhoz hasonlóan azok az egyenletrendszerek is megoldhatók csak behelyettesítésekkel, amelyek együtthatómátrixa alsó háromszögmátrix. A különbség kizárólag annyi, hogy ekkor az első egyenlettel kezdjük, és az első változó értékét határozzuk meg először. Például az

$$\begin{aligned} x \qquad\qquad &= 3 \\ 2x + 3y \qquad &= 3 \\ 2x + \ \ y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

egyenletrendszer első egyenletéből $x = 3$, a másodikba való behelyettesítés után $y = -1$, végül a harmadikba való behelyettesítés után $z = -1$.[2]

[2] Az angol nyelvű lineáris algebra tankönyvek különbséget tesznek a felső és az alsó háromszögmátrixú egyenletrendszerek megoldása között. *Forward substitution*, illetve *backward substitution* a neve a behelyettesítésnek ha alsó, illetve ha felső háromszögmátrix az együttható mátrix. Ez arra utal, hogy a változókat előre vagy hátra haladva számoljuk ki. Mi nem fogjuk használni e finom különbségtételt.

5.30. TÉTEL (MŰVELETEK HÁROMSZÖGMÁTRIXOKKAL). *Felső háromszögmátrixok összege, szorzata, és invertálható felső háromszögmátrix inverze felső háromszögmátrix. Analóg tétel igaz az alsó háromszögmátrixokra is. Egy háromszögmátrix pontosan akkor invertálható, ha főátlóbeli elemeinek egyike sem zérus.*

A bizonyítást feladatként az Olvasóra hagyjuk.

Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok Gyakran használunk olyan mátrixokat, melyekben az elemek egyenlők vagy ellentettjei a főátlóra nézve szimmetrikusan elhelyezkedő párjuknak. E tulajdonság a transzponálttal könnyen kifejezhető.

5.31. DEFINÍCIÓ (SZIMMETRIKUS ÉS FERDÉN SZIMMETRIKUS MÁTRIXOK). *A négyzetes* $\mathbf{A}$ *mátrixot* szimmetrikusnak *nevezzük, ha* $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}$, *és* ferdén szimmetrikusnak *nevezzük, ha* $\mathbf{A}^\mathsf{T} = -\mathbf{A}$.

5.32. PÉLDA (SZIMMETRIKUS ÉS FERDÉN SZIMMETRIKUS MÁTRIXOK). *Az alábbi mátrixok közül az* $\mathbf{A}$ *szimmetrikus, a* $\mathbf{B}$ *ferdén szimmetrikus, a* $\mathbf{C}$ *egyik osztályba sem tartozik.*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 9 \\ -9 & 2 & 9 \\ -9 & -9 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, akkor minden elemére $a_{ij} = -a_{ji}$, azaz $i = j$ esetén $a_{ii} = -a_{ii}$. Ez csak $a_{ii} = 0$ esetén áll fönn, azaz a ferdén szimmetrikus mátrixok főátlójában csupa 0 áll.

5.33. ÁLLÍTÁS (MŰVELETEK (FERDÉN) SZIMMETRIKUS MÁTRIXOKKAL). *Szimmetrikus mátrixok összege, skalárszorosa, inverze szimmetrikus. Ferdén szimmetrikus mátrixok összege, skalárszorosa, inverze ferdén szimmetrikus.*

Az állítás bizonyítását feladatként az olvasóra hagyjuk.

5.34. TÉTEL (FELBONTÁS SZIMMETRIKUS ÉS FERDÉN SZIMMETRIKUS MÁTRIX ÖSSZEGÉRE). *Minden négyzetes mátrix előáll egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként, nevezetesen minden* $\mathbf{A}$ *négyzetes mátrixra*

$$\mathbf{A} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\mathsf{T}\right)}_{\textit{szimmetrikus}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^\mathsf{T}\right)}_{\textit{ferdén szimm.}}.$$

BIZONYÍTÁS. Ha egy mátrix szimmetrikus, konstansszorosa is, így elég megmutatni, hogy az $\mathbf{A}+\mathbf{A}^\mathsf{T}$ mátrix szimmetrikus:

$$\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T}=\mathbf{A}^\mathsf{T}+\left(\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T}=\mathbf{A}^\mathsf{T}+\mathbf{A}=\mathbf{A}+\mathbf{A}^\mathsf{T}$$

Hasonlóképp $\mathbf{A}-\mathbf{A}^\mathsf{T}$ ferdén szimmetrikus, hiszen

$$\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T}=\mathbf{A}^\mathsf{T}-\left(\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T}=\mathbf{A}^\mathsf{T}-\mathbf{A}=-\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)$$

Végül a két mátrix összege valóban $\mathbf{A}$:

$$\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)+\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)=\frac{1}{2}\mathbf{A}+\frac{1}{2}\mathbf{A}^\mathsf{T}+\frac{1}{2}\mathbf{A}-\frac{1}{2}\mathbf{A}^\mathsf{T}=\mathbf{A}.\qquad\square$$

Fontos következményei lesznek az alábbi egyszerű állításnak.

5.35. TÉTEL ($\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ ÉS $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ SZIMMETRIKUS). *Az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ és az $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ mátrixok tetszőleges $\mathbf{A}$ mátrix esetén szimmetrikusak.*

BIZONYÍTÁS. $\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T}=\left(\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}=\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}$. Az állítás másik fele ugyanígy bizonyítható. □

*Mátrix és diád összegének inverze** Összegmátrix inverzére – a valósok összegének inverzéhez hasonlóan – nincs egyszerű képlet, de speciális mátrixokra nagyon hasznos eredmények vannak. Ilyen a Sherman–Morrison-formula is, melynek segítségével leírhatjuk, hogy hogyan változik egy mátrix inverze, ha egyetlen csak egyetlen elemén változtatunk.

5.36. TÉTEL (SHERMAN–MORRISON-FORMULA). *Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix invertálható, és $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ két olyan vektor, hogy $1+\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\neq 0$. Ekkor $\mathbf{A}+\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}$ invertálható, és*

$$\left(\mathbf{A}+\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}\right)^{-1}=\mathbf{A}^{-1}-\frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}}{1+\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}.$$

BIZONYÍTÁS. Elég megmutatni, hogy

$$\left(\mathbf{A}^{-1}-\frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}}{1+\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}\right)\left(\mathbf{A}+\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}\right)=\mathbf{I},$$

mert ez a formula igazolása mellett azt is bizonyítja, hogy $\mathbf{A}+\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}$

invertálható.

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}}{1+\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}\right)(\mathbf{A}+\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T})\\
&\quad = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}}{1+\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}}{1+\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}\\
&\quad = \mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}1\mathbf{v}^\mathsf{T}}{1+\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\left(\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\right)\mathbf{v}^\mathsf{T}}{1+\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}\\
&\quad = \mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\left(1+\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\right)\mathbf{v}^\mathsf{T}}{1+\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}\\
&\quad \overset{*}{=} \mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}\\
&\quad = \mathbf{I}.
\end{aligned}$$

A $*$-gal jelzett egyenlőségnél azt használtuk ki, hogy 1×1-es mátrixszal való szorzás egybeesik a skalárral való szorzással, a skalár tényező pedig egy mátrixszorzatban áttehető más helyre, így az adott törtkifejezésben egyszerűsíthettünk vele. □

A Sherman – Morrison-formula sokhelyütt használható, mi itt egyet emelünk ki: megvizsgáljuk, hogy hogyan változik egy mátrix inverze, ha a mátrixnak csak egyetlen elemén változtatunk.

5.37. PÉLDA (INVERZ VÁLTOZÁSA). *Legyen* $\mathbf{A}$ *invertálható mátrix, és változtassunk meg az* a_{ij} *elemet* $a_{ij} + \varepsilon$*-ra. Fejezzük ki az így kapott mátrix inverzét* $\mathbf{A}^{-1}$ *segítségével.*

MEGOLDÁS. Első lépésként kifejezzük az új mátrixot $\mathbf{A}$-ból mátrixműveletekkel. Legyen $\mathbf{e}_i$ és $\mathbf{e}_j$ az i-edik és j-edik standard egységvektor. Ekkor a módosított mátrix

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^\mathsf{T}.$$

Erre alkalmazható a Sherman – Morrison-formula az $\mathbf{u} = \mathbf{e}_i$ és $\mathbf{v} = \varepsilon\mathbf{e}_j$ választással.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^{-1} &= \left(\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^\mathsf{T}\right)^{-1}\\
&= \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_i(\varepsilon\mathbf{e}_j)^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}}{1+\varepsilon\mathbf{e}_j^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_i}\\
&= \mathbf{A}^{-1} - \varepsilon\frac{(\mathbf{A}^{-1})_{*i}(\mathbf{A}^{-1})_{j*}}{1+\varepsilon(\mathbf{A}^{-1})_{ji}}
\end{aligned}$$
□

5.38. PÉLDA (INVERZ VÁLTOZÁSA SZÁMPÉLDÁN). *Adva van egy* $\mathbf{A}$ *mátrix és annak inverze:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 0 & 0 & 3\\ 3 & 0 & 0 & 2\\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2/5 & 3/5 & 0\\ -2/5 & 7/5 & -8/5 & 3/5\\ 3/5 & -8/5, & 7/5 & -2/5\\ 0 & 3/5 & -2/5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Változtassuk meg a_{11} értékét 1-ről 11/10-re. Az így kapott mátrixot jelölje $\mathbf{B}$*. Határozzuk meg inverzét!*

MEGOLDÁS. Az előző példa alkalmazásával

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{1}{10}\frac{(\mathbf{A}^{-1})_{*1}(\mathbf{A}^{-1})_{1*}}{1+\frac{1}{10}(\mathbf{A}^{-1})_{11}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2/5 & 3/5 & 0 \\ -2/5 & 7/5 & -8/5 & 3/5 \\ 3/5 & -8/5 & 7/5 & -2/5 \\ 0 & 3/5 & -2/5 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{10}\frac{\begin{bmatrix} 0 \\ -2/5 \\ 3/5 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2/5 & 3/5 & 0 \end{bmatrix}}{1+\frac{1}{10}\cdot 0}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2/5 & 3/5 & 0 \\ -2/5 & 7/5 & -8/5 & 3/5 \\ 3/5 & -8/5 & 7/5 & -2/5 \\ 0 & 3/5 & -2/5 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/25 & -6/25 & 0 \\ 0 & -6/25 & 9/25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2/5 & 3/5 & 0 \\ -2/5 & 173/125 & -197/125 & 3/5 \\ 3/5 & -197/125 & 341/250 & -2/5 \\ 0 & 3/5 & -2/5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tizedestörtekkel számolva:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0 & -0.4 & 0.6 & 0.0 \\ -0.4 & 1.4 & -1.6 & 0.6 \\ 0.6 & -1.6 & 1.4 & -0.4 \\ 0.0 & 0.6 & -0.4 & 0.0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.000 & -0.400 & 0.600 & 0.000 \\ -0.400 & 1.384 & -1.576 & 0.600 \\ 0.600 & -1.576 & 1.364 & -0.400 \\ 0.000 & 0.600 & -0.400 & 0.000 \end{bmatrix}.$$

□

*Gyorsszorzás** Két 2×2-es mátrix szokásos módon való összeszorzásához 8 szorzásra és 4 összeadásra van szükség. Strassen 1969-ben egy olyan módszert talált, mellyel e mátrixszorzást 7 szorzással is el lehet végezni, igaz azon az áron, hogy az összeadások száma 16-ra nő.

5.1 (STRASSEN-FORMULÁK). *Legyen* **A**, **B** *és* **C** *is* 2×2*-es. A* $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ *szorzás elvégezhető a következő formulákkal:*

$$\begin{aligned}
d_1 &= (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22}) & c_{11} &= d_1 + d_4 - d_5 + d_7\\
d_2 &= (a_{21} + a_{22})b_{11} & c_{21} &= d_2 + d_4\\
d_3 &= a_{11}(b_{12} - b_{22}) & c_{12} &= d_3 + d_5\\
d_4 &= a_{22}(-b_{11} + b_{21}) & c_{22} &= d_1 + d_3 - d_2 + d_6\\
d_5 &= (a_{11} + a_{12})b_{22}\\
d_6 &= (-a_{11} + a_{21})(b_{11} + b_{12})\\
d_7 &= (a_{12} - a_{22})(b_{21} + b_{22})
\end{aligned}$$

Az ötlet nagyszerűsége abban van, hogy e módszer kiterjeszthető tetszőleges méretű négyzetes mátrixokra is, és elegendően nagy n-ekre az e módon elvégzett mátrixszorzás műveletigénye kisebb lesz a hagyományos módon elvégzettánél. A standard mátrixszorzás műveletigénye $2n^3 - n^2$ (ebből n^3 szorzás és $n^3 - n^2$ összeadás – gondoljunk utána!), a Strassen-formulákkal való szorzásé $n = 2^k$ esetén legföljebb $7 \cdot 7^k - 6 \cdot 4^k$. Ez $n = 2^{10}$ esetén már kevesebb műveletet ad. Az általánosítás lényege, hogy a Strassen-formulák 2×2-es blokkmátrixokra is használhatók, mert a szorzás kommutativitását nem használják, így ha $M(n)$ jelöli két $n \times n$-es mátrix összeszorzásához szükséges szorzások, és $S(n)$ a szükséges összeadások számát, akkor $M(2n) \leq 7M(n)$ és $S(2n) \leq 18n^2 + 7S(n)$. Az $M(1) = 1$, $S(1) = 0$ kezdeti feltételeket is használva megmutatható, hogy $M(2^k) \leq 7^k$, $S(2^k) \leq 6(7^k - 4^k)$. E képletekből a felső egészrész jelét használva és a $k = \lceil \log_2 n \rceil$ jelöléssel az műveletek összámára a $cn^{\log_2 7} \leq cn^{2.81}$ felső becslést kapjuk, ami a $2n^3 - n^2$ értéknél jobb, függetlenül a c konstans konkrét értékétől. Mivel a két összeszorzandó mátrix mindegyikének mind az n^2 elemét használni kell, ezért a szükséges műveletek számának alsó becslése cn^2. A $cn^{2.81}$ felső becslés mára $cn^{2.376}$-ra lett javítva (Coppersmith és Winograd, 1990), de az a sejtés, hogy a kitevő 2-re, de legalább $2 + \varepsilon$-ra lenyomható, ahol ε tetszőlegesen kis pozitív szám.

A módszer gyengéje numerikus instabilitása, így a gyakorlatban csak bizonyos mátrixokra érdemes használni, például nagyméretű egészelemű mátrixokra tetszőleges pontosságú aritmetika használata esetén.

Feladatok

5.25.• IGAZ – HAMIS Döntsük el, igazak-e az alábbi állítások? Válaszunkat indokoljuk!

a) Szimmetrikus mátrixok összege és skalárszorosa is szimmetrikus, így szimmetrikus mátrixok tetszőleges lineáris kombinációja is szimmetrikus.

b) Ferdén szimmetrikus mátrixok összege és skalárszorosa is ferdén szimmetrikus, így ferdén szimmetrikus mátrixok tetszőleges lineáris kombinációja is ferdén szimmetrikus.

c) Minden lépcsős alakú mátrix felső háromszögmátrix.

d) Minden felső háromszögmátrix lépcsős alakú.

5.26. Számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzeit, négyzetét és köbét!

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.27. Hogyan oldanánk meg a következő egyenletrendszert a lehető legkevesebb lépésben?

$$\begin{aligned} x + 4y + 3z + 5w &= 3 \\ 6x + 3y \phantom{{}+3z+5w} &= 3 \\ 2x + 3y + 2z \phantom{{}+5w} &= 3 \\ 2x + 4y + 3z + 5w &= 4 \end{aligned}$$

5.28. Mutassuk meg, hogy minden permutáló mátrix oszlopcserékkel is megkapható az egységmátrixból, és hogy permutáló mátrixszal jobbról való szorzás a beszorzott mátrix oszlopain ugyanazt a permutációt hajtja végre, mint amellyel a permutáló mátrix az egységmátrixból megkapható.

5.29. Bizonyítsuk be, hogy bármely két azonos méretű kígyó szorzata és egy kígyó bármely pozitív egész kitevős hatványa kígyó.

5.30.• Mutassuk meg, hogy egy $\mathbf{K}$ kígyó pontosan akkor invertálható, ha minden sorában pontosan egy elem nem 0, és ekkor inverze megkapható úgy, hogy minden nemnulla elem helyébe annak reciprokát írjuk, majd az így kapott mátrixot transzponáljuk.

5.31.* GYORSINVERTÁLÁS Legyen $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, mindketten 2×2-es mátrixok. Mutassuk meg, hogy az alábbi eljárással definiált mátrixinvertálás segítségével $n \times n$-es mátrixokra olyan algoritmus készíthető, melynek műveletigénye legföljebb $cn^{2.81}$.

$$\begin{aligned} c_1 &= a_{11}^{-1} & b_{12} &= c_3c_6 \\ c_2 &= a_{21}c_1 & b_{21} &= c_6c_2 \\ c_3 &= c_1a_{12} & c_7 &= c_3b_{21} \\ c_4 &= a_{21}c_3 & b_{11} &= c_1 - c_7 \\ c_5 &= c_4 - a_{22} & b_{22} &= -c_6 \\ c_6 &= c_5^{-1} \end{aligned}$$

Bizonyítások

Mátrixfelbontások

Mátrixfelbontáson egy mátrixnak adott tulajdonságú mátrixok szorzataként való fölírását értjük. Egy ilyen felbontással már találkoztunk, amikor invertálható mátrixot elemi mátrixok szorzatára bontottunk. E szakaszban a kiküszöbölési eljárásra épülő további felbontásokkal találkozunk. Ezek egyike, az LU-felbontás bizonyos lineáris algebrai feladatok számítógépes megoldásának gyakran használt eszköze.

Az LU-felbontás Tegyük fel, hogy egy $\mathbf{A}$ mátrixból el lehet jutni egy $\mathbf{U}$ felső háromszögalakhoz csak olyan sorműveletekkel, melyekben egy sor konstansszorosát valamely alatta lévő sorhoz adjuk. Minden ilyen elemi sorművelethez olyan elemi mátrix tartozik, mely alsó háromszög alakú. Ekkor tehát léteznek olyan $\mathbf{E}_1, \dots \mathbf{E}_k$ elemi alsó háromszögmátrixok, melyekre

$$\mathbf{E}_k \dots \mathbf{E}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}. \tag{5.2}$$

Innen

$$\mathbf{A} = (\mathbf{E}_k \dots \mathbf{E}_1)^{-1} \mathbf{U}, \tag{5.3}$$

ahol $(\mathbf{E}_k \dots \mathbf{E}_1)^{-1}$ alsó háromszögmátrixok szorzatának inverze, tehát maga is alsó háromszögmátrix. Ráadásul mindegyik mátrixban, így szorzatukban, és annak inverzében is a főátló csupa 1-esből áll. Ez a következő definícióhoz vezet:

5.39. DEFINÍCIÓ (LU-FELBONTÁS). *Azt mondjuk, hogy az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix egy $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ alakú tényezőkre bontása* LU-felbontás *(*LU-faktorizáció *vagy* LU-dekompozíció*), ha $\mathbf{L}$ alsó egység háromszögmátrix (tehát a főátlóban* 1*-ek, fölötte* 0*-k vannak), $\mathbf{U}$ pedig felső háromszögmátrix.*

Az *LU-felbontásban* az L és U betűk az *alsó* és *felső* jelentésű angol *lower* és *upper* szavak kezdőbetűi.

- Nincs minden mátrixnak LU-felbontása (ld. **??**. feladat), például az

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & c \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

egyenlőség a paraméterek semmilyen értékére sem áll fönn.

- Az LU-felbontás nem egyértelmű, például

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

felbontás minden a paraméterértékre fönnáll. Megmutatható viszont, hogy ha $\mathbf{A}$ invertálható, és létezik LU-felbontása, akkor az egyértelmű (ld. **??** tétel).

5.40. PÉLDA (AZ LU-FELBONTÁS KISZÁMÍTÁSA). *Elemi sorműveletekkel hozzuk felső háromszögalakra az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \textit{és a} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixot, majd e lépéseket fölhasználva írjuk föl mindkét mátrix egy-egy LU-felbontását!

MEGOLDÁS. Először nézzük az **A** mátrixot! Oszloponként haladva végezzük el a Gauss-kiküszöbölést. Minden elemi sorművelet mellett (zárójelben) megadjuk a hozzá tartozó elemi mátrixot:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{S_2 - 1/2 S_1}{\Longrightarrow} \qquad \left(\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{S_3 - 1/4 S_1}{\Longrightarrow} \qquad \left(\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{S_3 - 1/2 S_2}{\Longrightarrow} \qquad \left(\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{U}.$$

Tehát $\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \mathbf{U}$, amiből az $(\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1)^{-1} = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_3^{-1}$ mátrixszal való beszorzás után $\mathbf{A} = (\mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_3^{-1})\mathbf{U}$. Kiszámoljuk az elemi mátrixok inverzeinek szorzatát, azaz az $\mathbf{L} = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_3^{-1}$ mátrixot. Fölhasználjuk a 197. oldalon mondottakat, miszerint az $S_i + cS_j$ sorművelet mátrixának inverze egyenlő az $S_i - cS_j$ mátrixával:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Meglepő (de általánosítható) módon ezeknek az elemi mátrixoknak a szorzata a főátló alatti számok átmásolásával megkapható. Az eredmény egy alsó egység háromszögmátrix. Így az **A** mátrix LU-felbontása:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

Mivel az **A** átalakítása közben az oszlopok közt nem végeztünk műveletet, és a **B** mátrix az **A**-ból a harmadik oszlopa elhagyásával kapható

```
OCTAVE: A
A =

   4   8   4   8
   2   6   4   4
   1   3   2   4

OCTAVE: [L U]=lu(A)
L =

   1.00   0.00   0.00
   0.50   1.00   0.00
   0.25   0.50   1.00

U =

   4   8   4   8
   0   2   2   0
   0   0   0   2

OCTAVE: B
B =

   4   8   8
   2   6   4
   1   3   4

OCTAVE: [L U]=lu(B)
L =

   1.00   0.00   0.00
   0.50   1.00   0.00
   0.25   0.50   1.00

U =

   4   8   8
   0   2   0
   0   0   2
```

5.3. kód: Egy mátrix LU-felbontásának kiszámítása mátrixalapú nyelvben meg, ezért az előző felbontásból azonnal adódik a $\mathbf{B}$ felbontása is:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

□

Az 5.40. példában követett eljárás egyszerűen általánosítható tetszőleges mátrixra.

Az alábbi algoritmus a Gauss-elimináció lépcsős alak helyett felső háromszögalakú mátrixot adó megváltoztatásával vagy talál egy $m \times m$-es $\mathbf{L}$ és egy $m \times n$-es $\mathbf{U}$ mátrixot, melyekre $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, vagy hibaüzenetet ad.

5.41. ALGORITMUS (EGY LU-FELBONTÁS ELŐÁLLÍTÁSA). *Legyen $\mathbf{A}$ egy tetszőleges $m \times n$-es valós (vagy bármely más test feletti) mátrix.*

Első lépésként tekintsük az $\mathbf{A}$ mátrix első sorának első elemét. Ha ez 0, de az első oszlopban alatta nemnulla elem is van, akkor „a mátrixnak nincs LU-felbontása" üzenettel az algoritmus leáll. Ha alatta minden elem 0, az algoritmust a második sor második elemével folytatjuk (Gauss-kiküszöbölés esetén az első sor második elemével folytatnánk). Végül, ha az első sor első eleme nem 0, akkor az első oszlop további elemei eliminálhatók az $S_2 - l_{21}S_1$, $S_3 - l_{31}S_1, \ldots, S_n - l_{n1}S_1$ sorműveletekkel, ahol $l_{k1} = a_{k1}/a_{11}$.

Az algoritmust hasonlóan folytatjuk sorban haladva a főátló elemein. Ha valamelyikük 0, de alatta van a mátrixnak nemnulla eleme, leállunk, ha alatta már minden elem 0, folytatjuk a következő főátlóbeli elemmel, ha pedig nemnulla, akkor elimináljuk az alatta lévő elemeket. Az i-edik lépésben tehát az $S_{i+1} - l_{i+1,i}S_i$, $S_{i+2} - l_{i+2,i}S_i, \ldots, S_n - l_{ni}S_i$ sorműveleteket hajtjuk végre.

Az elimináció végén megmaradt felső háromszögmátrix lesz $\mathbf{U}$. A kiküszöbölés konstans l_{ij} elemeit írjuk az $\mathbf{I}_m$ egységmátrix i-edik sorának j-edik oszlopába. Ez lesz az $\mathbf{L}$ mátrix, azaz

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ l_{21} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & \ldots & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.6}$$

5.42. TÉTEL (AZ LU-FELBONTÁS LÉTEZÉSE ÉS EGYÉRTELMŰSÉGE). *A fenti algoritmusra igaz, hogy*

a) pontosan akkor áll le hibaüzenettel, ha $\mathbf{A}$-nak nincs LU-felbontása,

b) a megkonstruált $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ mátrixok LU-felbontást adnak,

c) ha $\mathbf{A}$ invertálható, akkor e felbontás egyértelmű.

BIZONYÍTÁS. Csak a *b)* állítást igazoljuk, a többit az Olvasóra hagyjuk (ld. 5.45.. feladat). Jelölje az $S_j - l_{ji}S_i$ sorművelet elemi mátrixát $\mathbf{L}_{ji}$ $(1 \leq i < j \leq m)$. Jelölje e mátrixoknak a végrehajtás sorrendjében jobbról balra vett szorzatát $\mathbf{E}$, azaz legyen

$$\mathbf{E} = (\mathbf{L}_{m-1,m})(\mathbf{L}_{m-2,m}\mathbf{L}_{m-2,m-1})\ldots(\mathbf{L}_{m2}\ldots\mathbf{L}_{42}\mathbf{L}_{32})(\mathbf{L}_{m1}\ldots\mathbf{L}_{31}\mathbf{L}_{21}).$$

Az algoritmus szerint ekkor $\mathbf{EA} = \mathbf{U}$. Vizsgáljuk meg az $\mathbf{EL}$ szorzatot az algoritmusbeli $\mathbf{L}$ mátrixszal. Mivel e mátrix főátlójában csupa 1, ji-edik helyén l_{ji} áll, ezért az elemi $\mathbf{L}_{ji}$ mátrix épp ezt az elemet fogja eliminálni, és így $\mathbf{E}$ minden főátló alatti elemet eliminál, azaz $\mathbf{EL} = \mathbf{I}$. Eszerint $\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{L}$, tehát $\mathbf{A} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{LU}$. □

Egyenletrendszer megoldása LU-felbontással Ha már ismerjük egy $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását, akkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer könnyen megoldható. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldása az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$, $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszerek megoldásával ekvivalens. Ha ugyanis $\mathbf{x}$ megoldása az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek, akkor $\mathbf{LUx} = \mathbf{b}$, és az $\mathbf{y} = \mathbf{Ux}$ jelöléssel $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$. Másrészt, ha $\mathbf{y}$ megoldása az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek, és $\mathbf{x}$ az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszernek, akkor $\mathbf{y}$-t behelyettesítve $\mathbf{L}(\mathbf{Ux}) = \mathbf{b}$, azaz $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Tömören:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ megoldható} \iff \mathbf{Ly} = \mathbf{b},\ \mathbf{Ux} = \mathbf{y} \text{ megoldható.}$$

Az $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ alakjából következik, hogy az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$, és az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszerek egyszerű visszahelyettesítésekkel megoldhatók.

5.43. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA LU-FELBONTÁSSAL). *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!*

$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 + 8x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Mivel ismerjük az együtthatómátrix LU-felbontását – az épp az (5.5)-beli felbontás –, ezért ezt használjuk, és először megoldjuk az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ebből $y_1 = 8$, ezt a második egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $y_2 = 0$, majd ezeket a harmadikba helyettesítve kapjuk, hogy $y_3 = 2$. Ezután megoldjuk az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszert, aminek alakja

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ismét egyszerű visszahelyettesítésekkel kapjuk, hogy $x_3 = 1$, $x_2 = 0$ és $x_1 = 1$. A megoldás $\mathbf{x} = (0, 0, 1)$. □

Mátrix invertálása LU-felbontással Mátrix invertálásához elég megoldanunk az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ egyenletrendszert. Ha $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ egy LU-felbontása $\mathbf{A}$-nak, akkor az $\mathbf{LUX} = \mathbf{I}$ megoldása a vele ekvivalens két mátrixegyenlet megoldásával megkapható:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{I} \iff \mathbf{LY} = \mathbf{I},\ \mathbf{UX} = \mathbf{Y}.$$

E két utóbbi egyenletrendszer viszont megoldható kizárólag visszahelyettesítésekkel is!

5.44. PÉLDA (MÁTRIX INVERTÁLÁSA LU-FELBONTÁSSAL). *Invertáljuk az 5.40. példában megadott*

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixot az LU-felbontása segítségével!

MEGOLDÁS. A $\mathbf{B}$ mátrix LU-felbontását használva először megoldjuk az $\mathbf{LY} = \mathbf{I}$ mátrixegyenletet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{L}$ első sorával való szorzásból: $[y_{11}\ y_{12}\ y_{13}] = [1\ 0\ 0]$. A második sorral való szorzásból $\frac{1}{2}[y_{11}\ y_{12}\ y_{13}] + [y_{21}\ y_{22}\ y_{23}] = [0\ 1\ 0]$. Behelyettesítés után $[y_{21}\ y_{22}\ y_{23}] = [-\frac{1}{2}\ 1\ 0]$. Végül a harmadik sorral való szorzásból:

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} y_{21} & y_{22} & y_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

amiből behelyettesítés után kifejezve $\mathbf{Y}$ harmadik sorát kapjuk, így $[y_{31}\ y_{32}\ y_{33}] = [0\ -\frac{1}{2}\ 1]$. Azaz

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ezután ugyanígy, egyszerű helyettesítésekkel megoldható az $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$, azaz a

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixegyenlet is, melynek megoldása

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/2 & -1 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

□

Az LU-felbontás a gyakorlatban Ismét végigszámoljuk az 5.40. példabeli mátrix felbontását. Először írjunk le egy egységmátrixot, de a főátló alatti helyeket üresen hagyva, ebből lesz **L**. Írjuk mellé az **A** mátrixot, és amikor elvégzünk egy $S_i - l_{ji}S_j$ sorműveletet rajta, akkor az l_{ji} értéket bejegyezzük az **L** mátrix j-edik sorának i-edik oszlopába. Az alábbi számítások bal hasábjában látjuk a fentiek szerinti lépéseket.

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\&1&0\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&1&2\\2&4&1\\1&2&4\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}4.00&1.00&2.00\\2.00&4.00&1.00\\1.00&2.00&4.00\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\\mathbf{1/2}&1&0\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&1&2\\0&7/2&0\\1&2&4\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}4.00&1.00&2.00\\0.50&3.50&0.00\\1.00&2.00&4.00\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\\mathbf{1/2}&1&0\\\mathbf{1/4}&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&1&2\\0&7/2&0\\0&7/4&7/2\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}4.00&1.00&2.00\\0.50&3.50&0.00\\0.25&1.75&3.50\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\\mathbf{1/2}&1&0\\\mathbf{1/4}&\mathbf{1/2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&1&2\\0&7/2&0\\0&0&7/2\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}4.00&1.00&2.00\\0.50&3.50&0.00\\0.25&0.50&3.50\end{bmatrix}$$

Vegyük észre, hogy az **A** mátrixon folytatott elemi átalakítások eredménye és az **L** már kiszámolt elemei egyetlen mátrixban is „elférnek”, ugyanis **L**-ben épp akkor és oda kerül egy elem, amikor és ahova **A**-ban 0. Ezt a számítógépprogramok kihasználják, ha igen nagy méretű **A** mátrixot kell felbontani, és az **L** és **U** mátrixot is az **A** helyében konstruálják meg. A fenti számítások jobb hasábjában ezt a számítógépes technikát alkalmazzuk. Színes háttérrel jelöljük az **L**-beli elemeket.

Az LU-felbontás műveletigénye megegyezik a Gauss-kiküszöbölésével, azaz egy n-edrendű mátrixra nagyságrendileg $2n^3/3$. Egyenletrendszer megoldásánál is azonos a lépésszám, hisz a Gauss-módszernél a kiküszöbölést a jobb oldallal is meg kell csinálni, az LU-felbontásnál viszont az alsó háromszögmátrixhoz tartozó egyenletrendszert is meg kell oldani: mindkettő $n(n-1)/2$ összeadás/kivonás és ugyanennyi szorzás/osztás. Az LU-felbontásnak viszont több olyan előnyös tulajdonsága van, ami miatt használata meghatározó az egyenletrendszerek megoldásában és amellett több más feladatban is. Néhány a legfontosabbak közül:

1. Mivel az egyenletrendszer együtthatómátrixának LU-felbontásához nincs szükség az egyenletrendszer jobb oldalára, ezért használható olyan esetekben, amikor a jobb oldal még nem ismeretes, vagy több

különböző jobb oldallal is dolgozni kell.

2. Az LU-felbontás ismeretében több mátrixokkal kapcsolatos számítás gyorsabban elvégezhető mint egyébként, pl. ilyen a mátrix inverzének, vagy a később tanulandó determinánsának meghatározása.

3. Korábban említettük, hogy az LU-felbontás igen memóriatakarékos, ráadásul vannak olyan speciális mátrixosztályok (pl. a szalagmátrixok, vagy a ritka mátrixok), melyekre létezik a kiküszöbölésnél gyorsabb algoritmus az LU-felbontásra.

4. A komputer algebra programok úgy működnek, hogy ha egy mátrixon valamilyen számítást kell elvégezni, ami megoldható az LU-felbontással (vagy a következő pontban tárgyalandó PLU-felbontással), akkor azzal oldják meg. Így ha később egy másik számítást is el kell e mátrixszal végezni, e felbontás ismeretében az már sokkal gyorsabb lehet.

*PLU-felbontás** Nincs minden $\mathbf{A}$ mátrixnak LU-felbontása, de sorcserékkel – azaz egy permutáló mátrixszal való balról szorzással – olyan alakra hozható, melynek van LU-felbontása. Létezik tehát olyan $\mathbf{P}$ permutáló mátrix, hogy

$$\mathbf{PA} = \mathbf{LU}, \text{ azaz } \mathbf{A} = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{LU}.$$

(Itt kihasználtuk, hogy permutáló mátrix inverze megegyezik transzponáltjával.)

5.45. DEFINÍCIÓ (PLU-FELBONTÁS). *Egy tetszőleges $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixnak egy permutáló, egy egység főátlójú négyzetes alsó háromszög- és egy $m \times n$-es felső háromszögmátrix szorzatára való bontását* PLU-felbontásnak *nevezzük.*

► Szokás – kissé bonyolultabb, de kisebb méretű mátrixokat tartalmazó módon – úgy is definiálni a PLU-felbontást, hogy ha $r = \min(m, n)$, akkor $\mathbf{P}$ $m \times m$-es permutáló mátrix, $\mathbf{L}$ 1-esekből álló főátlójú $m \times r$-es alsó, míg az $\mathbf{U}$ $r \times n$-es felső háromszögmátrix. E definíció az $m > n$ esetben ad más felbontást az általunk adottnál. Például a következő első felbontás a definíciót, a második e megjegyzés szerinti felbontást adja:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

A PLU-felbontást megadó algoritmus minimális változtatással megkapható az LU-felbontáséból. Az algoritmust – épp ahogy a számítógépek is számolnak – az **L** és **U** mátrix elemeit egyetlen mátrixban tárolva fogjuk végrehajtani. Az LU-hoz képest csak annyi a változás, hogy sorcserék elvégzését is megengedjük. Az LU-felbontás algoritmusa akkor akad el, amikor egy főátlóbeli elem 0, de van alatta nem nulla elem az oszlopban. Most ilyen esetben e két sort kicseréljük. Sőt, olyankor is kicserélhetünk egy sort egy alatta lévővel, ha főátlóbeli eleme nem 0. Egy ilyen cserét a kerekítési hibák csökkentése érdekében lehet érdemes megtenni. A korábban már említett részleges főelemkiválasztás szabálya szerint mindig a legnagyobb abszolút értékű elemet érdemes főelemnek választani. Hogy az algoritmus végén tudjuk, hogyan változott a sovektorok sorrendje, a sorindexek változását folyamatosan följegyezzük – praktikusan a mátrix sorvektorai elé írva. Lássunk egy példát. Azt, hogy az **L** és **U** mátrixok összeolvasztásából kapott mátrixon is elvégezhetők a sorcserék, később igazoljuk!

5.46. PÉLDA (PLU-FELBONTÁS). *Határozzuk meg az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 & -7 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5 \\ 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8 \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

mátrix PLU-felbontását úgy, hogy minden lépésben részleges főelemkiválasztással a főátlóbeli elem alatti legnagyobb abszolút értékű elemet választjuk ki.

MEGOLDÁS. A mátrix sorindexeit a következőképp fogjuk jelölni:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 & -7 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5 \\ 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8 \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

Mivel az első oszlopban 4 a legnagyobb abszolút értékű szám, végrehajtunk egy $S_{i \leftrightarrow j}$ sorcserét, majd elimináljuk az első oszlop összes többi elemét:

$$\begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & -7 & 4 \\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8 \end{bmatrix} \to \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 1/4 & 6 & 3 & -9 & 6 \\ -1/4 & 4 & 2 & -5 & 3 \\ 3/4 & 0 & 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

A második oszlop második eleme alatt nincs nagyobb abszolút értékű szám, most nem kell sort cserélni, a negyedik sort eliminálni sem kell,

```
OCTAVE: A = [
> -1  6 1 -7  4
>  1  4 4 -7  5
>  4 -8 4  8 -4
>  3 -6 8  6 -8]
A =

  -1   6   1  -7   4
   1   4   4  -7   5
   4  -8   4   8  -4
   3  -6   8   6  -8

OCTAVE: [L U P] = lu(a)
L =

   1.00   0.00   0.00   0.00
   0.25   1.00   0.00   0.00
   0.75   0.00   1.00   0.00
  -0.25   0.67   0.00   1.00

U =

   4  -8   4   8  -4
   0   6   3  -9   6
   0   0   5   0  -5
   0   0   0   1  -1

P =

Permutation Matrix

   0   0   1   0
   0   1   0   0
   0   0   0   1
   1   0   0   0

OCTAVE: transpose(P)*L*U
ans =

  -1   6   1  -7   4
   1   4   4  -7   5
   4  -8   4   8  -4
   3  -6   8   6  -8
```

5.4. kód: Egy mátrix PLU-felbontásának kiszámítása mátrixalapú nyelvben (azaz kivonhatjuk belőle a második sor 0-szorosát):

$$
\to \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{array}
\begin{bmatrix}
4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\
1/4 & 6 & 3 & -9 & 6 \\
-1/4 & 2/3 & 0 & 1 & -1 \\
3/4 & 0 & 5 & 0 & -5
\end{bmatrix}
$$

A harmadik oszlopban 0 áll a főátlón, kicseréljük a harmadik és negyedik sort. Az eddig még nem indokolt mozzanat: az **L** és az **U** mátrixba eső részén egyaránt végrehajtható e művelet, és épp ezt tesszük a sorindexekkel is:

$$
\to \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{array}
\begin{bmatrix}
4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\
1/4 & 6 & 3 & -9 & 6 \\
3/4 & 0 & 5 & 0 & -5 \\
-1/4 & 2/3 & 0 & 1 & -1
\end{bmatrix}
\to \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{array}
\begin{bmatrix}
4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\
1/4 & 6 & 3 & -9 & 6 \\
3/4 & 0 & 5 & 0 & -5 \\
-1/4 & 2/3 & 0 & 1 & -1
\end{bmatrix}
$$

Az utolsó lépésben nem is volt tennivalónk, mivel a főátló alatt 0 volt, így csak jeleztük, hogy mi kerül az **L** mátrixba e helyen. (Az a két nulla nem ugyanaz a nulla! A második már az **L** eleme!) Végül ebből az alakból leolvasható az **L**, **U** és az indexekből a **P** mátrix. Ezeket egyből a $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ egyenlőségben adjuk meg:

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
-1 & 6 & 1 & -7 & 4 \\
1 & 4 & 4 & -7 & 5 \\
4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\
3 & -6 & 8 & 6 & -8
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
1/4 & 1 & 0 & 0 \\
3/4 & 0 & 1 & 0 \\
-1/4 & 2/3 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\
0 & 6 & 3 & -9 & 6 \\
0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{bmatrix}.
$$

Mindkét oldalt $\mathbf{P}^\mathsf{T}$-tal szorozva megkapjuk a PLU-felbontást, azaz az $\mathbf{A} = \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{LU}$ egyenlőséget:

$$
\begin{bmatrix}
-1 & 6 & 1 & -7 & 4 \\
1 & 4 & 4 & -7 & 5 \\
4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\
3 & -6 & 8 & 6 & -8
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
1/4 & 1 & 0 & 0 \\
3/4 & 0 & 1 & 0 \\
-1/4 & 2/3 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\
0 & 6 & 3 & -9 & 6 \\
0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{bmatrix}.
$$

Ezzel megoldottuk a feladatot! □

E felbontás egy lehetséges használatára mutatunk példát.

5.47. PÉLDA. *Oldjuk meg az*

$$
\begin{bmatrix}
-1 & 6 & 1 & -7 & 4 \\
1 & 4 & 4 & -7 & 5 \\
4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\
3 & -6 & 8 & 6 & -8
\end{bmatrix}
\mathbf{x} =
\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}
$$

egyenletrendszert az együtthatómátrix PLU-felbontását használva!

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletet **P**-vel szorozva és **PA** helyébe **LU**-t írva kapjuk, hogy az $\mathbf{LUx} = \mathbf{Pb}$ egyenletrendszert kell megoldani, ahol $\mathbf{b} = (1,4,4,8)$. Ez – hasonlóan az LU-felbontásnál tanultakhoz – az $\mathbf{Ly} = \mathbf{Pb}$ és az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszerek megoldásával ekvivalens.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása fejben számolva is leolvasható: $\mathbf{y} = (4,3,5,0)$. Az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszer bővített mátrixa, és annak redukált lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & -9 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Innen a megoldás $\mathbf{x} = (-2t, 0, 1+t, t, t)$. □

5.48. ALGORITMUS (EGY PLU-FELBONTÁS ELŐÁLLÍTÁSA). *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy (test fölött értelmezett) tetszőleges* $m \times n$*-es mátrix, legyen* $r = \min(m,n)$*, és képezzük az* $\mathbf{A}_k$*,* $\mathbf{P}_k$*,* $\mathbf{L}_k$*,* $\mathbf{U}_k$ *(*$k = 0,1,\ldots,r$*) mátrixok sorozatát a következő eljárás szerint:*

a) $\mathbf{A}_0 = \mathbf{U}_0 = \mathbf{A}$, $\mathbf{L}_0 = \mathbf{I}$*, így* $\mathbf{A}_0 = \mathbf{L}_0\mathbf{U}_0$*,*

b) a k-adik lépésben az $\mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{L}_{k-1}\mathbf{U}_{k-1}$ *összefüggés mátrixaiból megkonstruáljuk az* $\mathbf{A}_k = \mathbf{L}_k\mathbf{U}_k$ *egyenlőségbeli mátrixokat:*

1. *ha* $\mathbf{U}_{k-1}$ *főátlóján a k-adik elem és alatta minden elem* 0*, akkor legyen* $\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_{k-1}$*,* $\mathbf{L}_k = \mathbf{L}_{k-1}$*,* $\mathbf{U}_k = \mathbf{U}_{k-1}$*,* $\mathbf{P}_k = \mathbf{I}$*, megnöveljük k értékét* 1*-gyel és visszatérünk e pontra, egyébként a következővel folytatjuk.*
2. *ha* $\mathbf{U}_{k-1}$ *főátlóján a k-adik elem* 0*, és van olyan* $i > k$*, hogy az i-edik sorban alatta nem nulla elem van, akkor az* $S_k \leftrightarrow S_i$ *sorcserét végző* $\mathbf{P}_k$ *elemi mátrixszal kicseréljük e két sort, kapjuk az* $\mathbf{U}'_{k-1} = \mathbf{P}_k\mathbf{U}_{k-1}$*. E sorcserét végrehajtjuk az* $\mathbf{A}_{k-1}$ *mátrixon is, Ez lesz* $\mathbf{A}_k$*. Kihasználva, hogy* $\mathbf{P}_k\mathbf{P}_k = \mathbf{I}$*, az* $\mathbf{L}_{k-1}$*-en elvégzendő transzformáció is adódik:*

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k &= \mathbf{P}_k\mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{P}_k\mathbf{L}_{k-1}\mathbf{U}_{k-1} = \mathbf{P}_k\mathbf{L}_{k-1}\mathbf{I}\mathbf{U}_{k-1} \\ &= \mathbf{P}_k\mathbf{L}_{k-1}\mathbf{P}_k\mathbf{P}_k\mathbf{U}_{k-1} = (\mathbf{P}_k\mathbf{L}_{k-1}\mathbf{P}_k)(\mathbf{P}_k\mathbf{U}_{k-1}) \\ &= \mathbf{L}'_k\mathbf{U}'_k. \end{aligned}$$

Itt tehát $\mathbf{L}'_k = \mathbf{P}_k\mathbf{L}_{k-1}\mathbf{P}_k$*, azaz az* $\mathbf{L}_{k-1}$ *mátrix k-adik, és egy* $i \geq k$ *indexre az i-edik sorának főátló alatti részei felcserélődnek. A* $\mathbf{P}_k\mathbf{L}_{k-1}$ *szorzat megcseréli az* $\mathbf{L}_{k-1}$ *mátrix k-adik és i-edik sorát, megcserélve a főátlóbeli* 1*-eseket is. A* $\mathbf{P}_k$*-val való jobbról szorzás eredményeként a k-adik és i-edik oszlopok helyet cserélnek, mivel azonban* $\mathbf{L}_{k-1}$*-ben ezekben az oszlopokban csak zérusok vannak a főátló elemein kívül, ezért e két* 1*-es visszakerül a főátlóra. Szemléltetésként legyen* $m = 5$*,* $k = 3$*,*

$i = 5$:

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L}_{k-1} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \boldsymbol{k_1} & \boldsymbol{k_2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & 0 & 1 & 0 \\ \boldsymbol{i_1} & \boldsymbol{i_2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right]$$

$$\mathbf{P}_k\mathbf{L}_{k-1} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \boldsymbol{i_1} & \boldsymbol{i_2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ * & * & 0 & 1 & 0 \\ \boldsymbol{k_1} & \boldsymbol{k_2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] \quad \mathbf{P}_k\mathbf{L}_{k-1}\mathbf{P}_k = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} \\ * & 1 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} \\ \hline i_1 & i_2 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{0} \\ * & * & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ k_1 & k_2 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right]$$

3. *Ezután az $\mathbf{U}'_{k-1}$ mátrix k-adik oszlopának főátló alatti elemeit egymás után elimináljuk, mindegyiket egy $S_i \leftarrow S_i - cS_k$ elemi sorműveletet végző $\mathbf{E}$ elemi mátrixszal. Ennek inverze a vele való jobbról szorzás esetén az $O_i \leftarrow O_i + cO_k$ oszlopműveletet végzi, így az*

$$\mathbf{L}'_k\mathbf{U}'_k = \mathbf{L}'_k\mathbf{I}\mathbf{U}'_k = \mathbf{L}'_k\mathbf{E}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{U}'_k$$

egyenlőségnek megfelelően az $\mathbf{U}'_k$-n végrehajtott sorművelet mellett az $\mathbf{L}'_k$ mátrix i-edik oszlopának c-szeresét kell a k-adik oszlophoz adni, azaz a c számot beírni az i-edik sor k-adik oszlopába. Az eliminációt a kapott mátrixokon tovább folytatjuk, míg az összes elemet nem elimináltuk a k-adik oszlopban a főátló alatt. $\mathbf{L}_k$ és $\mathbf{U}_k$ jelöli e procedúra végén kapott mátrixokat, tehát $\mathbf{U}_k$-ban már a főátló alatt minden elem 0, és $\mathbf{L}_k$ a párja, melyekre $\mathbf{A}_k = \mathbf{L}_k\mathbf{U}_k$. Megnöveljük k értékét, és ha $k < r$, visszatérünk az 1. pontra, egyébként a következő pontra lépünk.

c) *Legyen $\mathbf{P} = \mathbf{P}_r\mathbf{P}_{r-1}\dots\mathbf{P}_1$, $\mathbf{L} = \mathbf{L}_r$, $\mathbf{U} = \mathbf{U}_r$. Ekkor a fentiek szerint $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ az $\mathbf{A}$ egy PLU-felbontása.*

Az, hogy ez az algoritmus valóban PLU-felbontást ad, az algoritmus leírásában bizonyítottuk, illetve onnan kiolvasható.

Feladatok

Adjuk meg az alábbi mátrixok egy LU-felbontását!

5.32. $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

5.33. $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

5.34. $\begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 4 & -5 & -5 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

5.35. $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

5.36. $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

5.37. $\begin{bmatrix} 2.0 & 2.0 & -2.0 \\ -0.5 & 0.0 & -1.0 \\ 1.0 & 1.5 & 1.0 \end{bmatrix}$

Az előző feladatokban megkonstruált LU-felbontásokat használva oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket, azaz oldjuk meg előbb az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$, majd az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszereket!

5.38. $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

5.39. $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

5.40. $\begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 4 & -5 & -5 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix}$

5.41. $\begin{bmatrix} 2.0 & 2.0 & -2.0 \\ -0.5 & 0.0 & -1.0 \\ 1.0 & 1.5 & 1.0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5.6 \\ -1.0 \\ 4.6 \end{bmatrix}$

5.42. [Végtelen sok megoldás]

$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 8x_4 &= 8 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 4x_4 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Határozzuk meg az alábbi mátrixok inverzét az LU-felbontásuk ismeretében, azaz oldjuk meg az $\mathbf{LY} = \mathbf{I}$ és az $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$ mátrixegyenleteket!

5.43. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

5.44. $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

5.45. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ az $\mathbf{A}$ egy LU-felbontása, és $\mathbf{A}$ invertálható, akkor e felbontás egyértelmű!

Adjuk meg az alábbi mátrixok egy PLU-felbontását! Alkalmazzunk részleges főelemkiválasztást!

5.46. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

5.47. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

5.48. $\begin{bmatrix} 0.0 & -1.0 & 1.5 \\ 0.5 & -2.0 & 2.0 \\ 0.0 & 2.0 & 2.0 \end{bmatrix}$

5.49. Igazoljuk, hogy az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixnak nincs LU-felbontása, és annak a mátrixnak sincs, melyet az $\mathbf{A}$ első két sorának felcserélésével kapunk.

Megoldások

5.4. A bizonyítások közvetlenül következnek a valós számok közti műveletek tulajdonságaiból. Mintaként bebizonyítjuk az *(a)* állítást.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}+\mathbf{B} &= [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij}+b_{ij}] \\ &\overset{*}{=} [b_{ij}+a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}] = \mathbf{B}+\mathbf{A}.\end{aligned}$$

A *-gal jelzett egyenlőségnél használjuk a számok összeadásának kommutativitását. A többi állítás hasonlóan bizonyítható.

5.5. Helyettesítés előtt:

$$\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{u}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\end{bmatrix}\mathbf{u}.$$

Az $\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ helyettesítés elvégzése után

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\end{bmatrix}\mathbf{A}\mathbf{x},$$

ahol

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\ \mathbf{u} = \begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix},\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\1 & -3 & 1\\2 & -1 & -3\end{bmatrix}.$$

5.6. $\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}$

5.7. $\begin{bmatrix}1 & 2\\-2 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$

5.8. $\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}$

5.9. $\begin{bmatrix}2 & 4\\3 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$

5.10. $\begin{bmatrix}2 & 0 & 4\\0 & 2 & 0\\3 & 2 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\3 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

5.11. $\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\1 & 2 & 2\\2 & 4 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

5.12. Legyen $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix}a & b\\c & d\end{smallmatrix}\right]$. Négyzete a zérusmátrix, azaz

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a^2+bc & b(a+d)\\c(a+d) & bc+d^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}.$$

Innen vagy $a = d = 0$ és c vagy d legalább egyike 0, vagy $a \neq 0$, $c \neq 0$ és $b = -a^2/c$, $d = -a$.

5.13. A feladat érdekes, abban a Fibonacci sorozat elemei bukkannak föl. Ez az $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ egyenlőségekkel definiált sorozat, melynek első néhány tagja: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …. Tekintsük $\mathbf{B}$ néhány hatványát:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^2 &= \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f_1 & f_2\\f_2 & f_3\end{bmatrix},\\ \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} &= \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f_2 & f_3\\f_3 & f_4\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Ennek alapján azt sejtjük, hogy

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix}f_{n-1} & f_n\\f_n & f_{n+1}\end{bmatrix}.$$

Az állítás $n = 1, 2, 3$ esetén igaz, és n-ről öröklődik $n+1$-re, ugyanis

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}^n\mathbf{A} &= \begin{bmatrix}f_{n-1} & f_n\\f_n & f_{n+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}f_n & f_{n+1}\\f_{n-1}+f_n & f_n+f_{n+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f_n & f_{n+1}\\f_{n+1} & f_{n+2}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

5.14. $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ Einstein-konvencióval: $c_{ij} = a_{ik}b_{kj}$.

5.17. $\begin{bmatrix}2 & -3 & 0 & 0 & 0\\-1 & 2 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & -5 & 3 & 3\\0 & 0 & -16 & 9 & 10\\0 & 0 & 28 & -16 & -17\end{bmatrix}$

5.18. $\begin{bmatrix}2 & -3 & 7 & -4 & -4\\-1 & 2 & -7 & 4 & 4\\0 & 0 & -5 & 3 & 3\\0 & 0 & -16 & 9 & 10\\0 & 0 & 28 & -16 & -17\end{bmatrix}$

5.19. $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 1 & 1\\2 & -1 & -1 & -1 & -1\\-1 & 1 & 1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0 & 1 & 0\\-1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

5.22. A fölcserélhetőségre vonatkozó $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ egyenletet szorozzuk meg mindkét oldalról $\mathbf{B}^{-1}$-gyel:

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{AB})\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{BA})\mathbf{B}^{-1}.$$

Az asszociativitást használva

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})(\mathbf{BB}^{-1}) = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B})(\mathbf{AB}^{-1}),$$

amiből a $\mathbf{BB}^{-1} = \mathbf{I}$ azonosság fölhasználásával kapjuk, hogy

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AB}^{-1}.$$

5.23. Azt mondjuk, hogy a $\circledcirc$ művelet invertálható a H egy R részhalmazán, ha bármely $a, b, c \in R$ elem esetén az

$$a \circledcirc x = b, \qquad y \circledcirc a = c$$

egyenletek mindegyike megoldható, azaz vannak olyan $x, y \in H$ elemek, melyek kielégítik a fenti egyenleteket. Ha a definícióbeli $\circledcirc$ kommutatív művelet, akkor elég a fenti két egyenlet egyikét tekinteni.

5.24. *a)* Az $e \in H$ semleges elem, ha minden $a \in H$ elemre $a \circledcirc e = e \circledcirc a = a$. *b)* Azt mondjuk, hogy a $\circledcirc$ műveletre nézve a inverze b, ha $a \circledcirc b = b \circledcirc a = e$.

5.27. Az első egyenletet kivonjuk az utolsóból, innen $x = 1$, ezután visszahelyettesítés a második, harmadik, majd az első egyenletbe.

5.32. $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$

5.33. $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5.34. $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4/5 & 1 & 0 \\ -3/5 & 7/9 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 0 & -9/5 & -17/5 \\ 0 & 0 & -23/9 \end{bmatrix}.$

5.35. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{10} \end{bmatrix}$

5.36. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

5.37. $\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.25 & 1.00 & 0.00 \\ 0.50 & 1.00 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.00 & 2.00 & -2.00 \\ 0.00 & 0.50 & -1.50 \\ 0.00 & 0.00 & 3.50 \end{bmatrix}.$

5.38. $\mathbf{y} = (0, 3, 4)$, $\mathbf{x} = (-1, -1, 2)$.

5.39. $\mathbf{y} = (0, 3, 1)$, $\mathbf{x} = (1, -1, 1)$.

5.40. $\mathbf{y} = (3, -17/5, -23/9)$, $\mathbf{x} = (1, 0, 1)$.

5.41. $\mathbf{y} = (5.6, 0.4, 1.4)$, $\mathbf{x} = (1.2, 2.0, 0.4)$.

5.42. Mivel ismerjük az együtthatómátrix LU-felbontását – az épp az (5.4)-beli felbontás –, ezért ezt használjuk, és először megoldjuk az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ebből $y_1 = 8$, ezt a második egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $y_2 = 0$, majd ezeket a harmadikba helyettesítve kapjuk, hogy $y_3 = 2$. Ezután megoldjuk az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszert, aminek alakja

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ismét egyszerű visszahelyettesítésekkel kapjuk, hogy $x_4 = 1$, $x_3 = s$ a szabad változó, $x_2 = -s$ és $x_1 = s$. A megoldás $\mathbf{x} = (s, -s, s, 1) = (0, 0, 0, 1) + s(1, -1, 1, 0)$.

5.43. Az $\mathbf{LY} = \mathbf{I}$ egyenletből

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/12 & -1/3 & 1 \end{bmatrix},$$

míg az $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$ egyenlet megoldása, egyúttal $\mathbf{A}$ inverze

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 5/12 & -1/3 & 0 \\ -1/8 & 1/2 & -1/2 \\ -1/24 & -1/6 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

5.44. $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/12 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1/3 & -5/3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1/12 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}.$

5.45. Tegyük fel, hogy létezik az n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrixnak két LU-felbontása is, azaz $\mathbf{A} = \mathbf{L}_1\mathbf{U}_1 = \mathbf{L}_2\mathbf{U}_2$. Mivel $\mathbf{A}$ invertálható, ezért $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{L}_2$ és $\mathbf{U}_2$ is. Ugyanis ha pl. $\mathbf{L}_1$ nem volna invertálható, akkor az oszlopterének dimenziója kisebb lenne n-nél, és mivel $\mathbf{L}_1\mathbf{U}_1$ oszlopvektorai az $\mathbf{L}_1$ oszlopvektorainak lineáris kombinációi, ezért e szorzat oszlopterének dimenziója is kisebb lenne n-nél, azaz $\mathbf{A}$ nem lenne invertálható. A többi mátrix invertálhatósága hasonlóan igazolható. Balról $\mathbf{L}_1$, jobbról $\mathbf{U}_2$ inverzével szorozva kapjuk, hogy

$$\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2^{-1} = \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2.$$

A bal oldalon két felső háromszögmátrix szorzataként egy felső háromszögmátrix van, míg a jobb oldalon két alsó háromszögmátrix szorzata, ami alsó háromszögmátrix (**??** feladat). Ráadásul a jobb oldal egység főátlójú (**??** feladat). Ez csak akkor állhat fönn, ha $\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2^{-1} = \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2 = \mathbf{I}$, azaz ha $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2$ és $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$.

5.46. $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

5.47. $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 & 9 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{5}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

5.48. $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.5 & 1.0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0.5 & -2.0 & 2.0 \\ 0.0 & 2.0 & 2.0 \\ 0.0 & 0.0 & 2.5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

5.49. Egyrészt $\det \mathbf{A} = 1 \neq 0$, és így $\det \mathbf{U} \neq 0$, tehát $u_{11} \neq 0$, másrészt $\mathbf{A}$ és egy LU-felbontás bal felső elemére $0 = a_{11} = (\mathbf{LU})_{11} = l_{11}u_{11} \neq 0$, ami ellentmondás. Az első két sor felcserélése után kapott mátrixnál hasonló ellentmondásra jutunk az a_{22} elemmel.

6
Determináns

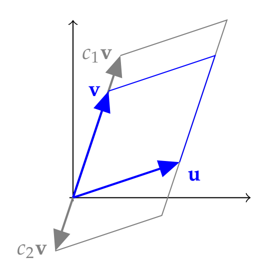
Egy valós négyzetes mátrix sorvektorai által kifeszített parallelepipedon térfogata jó jellemezője lehet a mátrixnak. Ehhez közel áll a determináns fogalma, melyet egy négyzetes mátrixokon értelmezett skalárértékű függvényként definiálunk. E skalár könnyen kiszámolható az elemi sorműveletekkel, sőt definiálni is segítségükkel fogjuk. A determináns fontos tulajdonságainak egyike, hogy pontosan akkor nulla, ha a sorvektorok lineárisan összefüggők.

Parallelogramma előjeles területe A parallelogramma területéről szóló 1.43. példában láttuk, hogy az (a, b) és a (c, d) vektorok által kifeszített parallelogramma területe $|ad - bc|$, és hogy $ad - bc$ pontosan akkor pozitív, ha az (a, b) és a (c, d) vektorok jobbrendszert alkotnak, és pontosan akkor negatív, ha az (a, b) és a (c, d) vektorok balrendszert alkotnak. Ez vezet a következő definícióhoz: Két síkbeli vektor által kifeszített parallelogramma *előjeles területe* megegyezik területével, ha a két vektor jobbrendszert alkot, és a terület -1-szeresével, ha a két vektor balrendszert alkot .

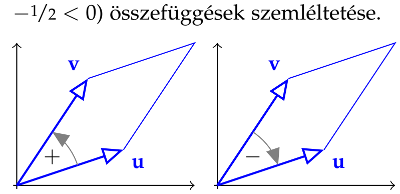
Az előzőek szerint az $\mathbf{u} = (a, b)$ és a $\mathbf{v} = (c, d)$ vektorok által kifeszített parallelogramma előjeles területe $ad - bc$. Az előjeles terület tehát egy vektorpárokon értelmezett valós értékű függvény – jelölje most f –, mely eleget tesz a következő tulajdonságoknak.

1. $f(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = cf(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, és $f(\mathbf{u}, c\mathbf{v}) = cf(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, azaz ha f egyik argumentumát c-vel szorozzuk, a függvényérték is c-szeresére változik. (E tulajdonságot úgy fogjuk kifejezni, hogy f homogén mindkét változójában.) Ez igaz az előjeles területre, hisz egy parallelogramma egyik oldalának c-szeresére növelése c-szerezi a területét is. Ha c negatív, akkor a vektorok körüljárása is változik összhangban azzal, hogy az előjeles területének is megváltozik az előjele (6.1. ábra).

2. $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -f(\mathbf{v}, \mathbf{u})$. Ez nyilvánvaló, hisz a két vektor sorrendjét megcserélve megváltozik orientációjuk (jobbrendszerből balrendszerbe és viszont, ld. 6.2. ábra).



6.1. ábra: Az $f(\mathbf{u}, c_1\mathbf{v}) = c_1 f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ($c_1 = 4/3 > 0$) és az $f(\mathbf{u}, c_2\mathbf{v}) = c_2 f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ($c_2 = -1/2 < 0$) összefüggések szemléltetése.

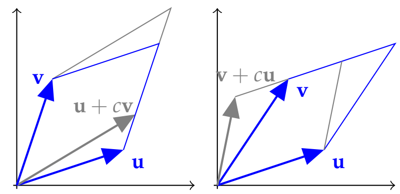


6.2. ábra: Két vektor sorrendjének cseréje megváltoztatja a orientációjukat.

3. $f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}+c\mathbf{v},\mathbf{v}) = f(\mathbf{u},\mathbf{v}+c\mathbf{u})$, azaz az $\left[\begin{smallmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right]$ mátrix sorvektorai által kifeszített parallelogramma területe megegyezik a hozzáadás sorművelete után kapott mátrix sorvektoraihoz tartozó parallelogramma területével (6.3. ábra).

4. $f(\mathbf{u},\mathbf{u}) = 0$, és hasonlóképp $f(\mathbf{u},\mathbf{0}) = f(\mathbf{0},\mathbf{u}) = 0$ tetszőleges $\mathbf{u}$ vektorra, ugyanis az elfajuló parallelogramma területe 0.

5. $f(\mathbf{i},\mathbf{j}) = 1$, azaz a standard bázis által kifeszített egységnégyzet területe 1.



6.3. ábra: Az $f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}+c\mathbf{v},\mathbf{v})$ és az $f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = f(\mathbf{u},\mathbf{v}+c\mathbf{u})$ összefüggések szemléltetése.

Az állítások a fenti ábrákkal szemléltetett egyszerű geometriai érvelések mellett az $f((a,b),(c,d)) = ad - bc$ formulával is bizonyíthatóak. E tulajdonságok segítségével általánosítani tudjuk az előjeles terület fogalmát, és bevezethetjük az előjeles térfogat fogalmát az n-dimenziós valós tér parallelepipedonjaira.

Parallelepipedon előjeles térfogata A vegyes szorzat tárgyalásakor láttuk (1.33. definíció), hogy a valós háromdimenziós térben három vektor vegyes szorzata a vektorok által kifeszített parallelepipedon előjeles térfogatát adja, ahol az előjel aszerint pozitív vagy negatív, hogy a három vektor jobb- vagy balrendszert alkot. A háromdimenziós tér parallelepipedonjainak f előjeles térfogatára a parallelogrammánál látottakhoz hasonló tulajdonságok igazolhatók.

1. f homogén mindhárom argumentumában, azaz egy konstans tényező bármelyik argumentumból kiemelhető, pl. $f(c\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = cf(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$.

2. Bármely két argumentum felcserélése megváltoztatja a függvényérték előjelét, pl. $f(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = -f(\mathbf{w},\mathbf{v},\mathbf{u})$, $f(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = -f(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v})$.

3. f bármely argumentumához hozzáadva egy másik konstansszorosát, a függvényérték nem változik, pl. $f(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = f(\mathbf{u}+c\mathbf{w},\mathbf{v},\mathbf{w})$.

4. Ha f bármely két argumentuma megegyezik, a függvényérték 0, pl. $f(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}) = 0$. Ugyancsak 0 értéket kapunk, ha f bármelyik argumentuma a $\mathbf{0}$-vektor, pl. $f(\mathbf{u},\mathbf{0},\mathbf{w}) = 0$.

5. $f(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}) = 1$, azaz az egységkocka térfogata 1.

Látjuk, hogy f eddig megismert tulajdonságai vagy azonnal megadják f értékét (ha az 0 vagy 1), vagy az argumentumok olyan megváltoztatását tartalmazzák, amelyekhez hasonlókat a mátrixok elemi sorműveleteinél láttunk. Valóban, e tulajdonságok nem csak egy új fogalom – az előjeles térfogat általánosítását –, de egyúttal annak egyszerű kiszámítási módját is lehetővé teszik.

A determináns mint sorvektorainak függvénye

A determináns definíciója Az n darab n-dimenziós vektor által kifeszített parallelepipedon előjeles térfogata helyett olyan fogalmat fogunk definiálni, mely speciális esetként ezt is tartalmazza. Ez lesz a determináns. A determináns tehát olyan függvény, mely n darab n-dimenziós vektorhoz – vagy ami ezzel ekvivalens, a belőlük képzett $n \times n$-es mátrixhoz – egy skalárt rendel. A definícióban csak az előjeles térfogat vizsgálatában megismert függvénytulajdonságokat használjuk.

Az $\mathbf{A} = [a_{ij}]_n$ mátrixhoz rendelt skalárt, azaz determinánsának értékét $\det(\mathbf{A})$, $|\mathbf{A}|$ vagy $|a_{ij}|_n$ jelöli. Részletezve az általános jelölést az $\mathbf{A}$ mátrixra és determinánsára:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

E jelölésnek megfelelően a $\det(\mathbf{A})$ determináns sorain, oszlopain, elemein az $\mathbf{A}$ mátrix sorait, oszlopait, elemeit értjük.

A determinánsokat először SEKI Takakazu (関 孝和, 1642–1708) vizsgálta, eredményei 1683-ban jelentek meg. Seki 2-től 5-ödrendűek értékét tudta kiszámolni. Európában is 1683-ban jelenik meg e fogalom először Leibniz egy l'Hôpitalnak írt levelében, melyet később rezultánsnak hív. A determináns név Gausstól származik. A mátrixok és determinánsok történetének szép összefoglalója olvasható a MacTutor History of Mathematics weboldalon.

6.1. DEFINÍCIÓ (DETERMINÁNS). Determinánson *azt a négyzetes mátrixokon értelmezett és* det*-tel jelölt skalár értékű függvényt értjük, mely eleget tesz a következő feltételeknek:*

D1. értéke c-szeresére változik, ha egy sorát c-vel szorozzuk,

D2. értéke -1*-szeresére változik, ha két különböző sorát fölcseréljük,*

D3. értéke nem változik a hozzáadás elemi sorművelete közben,

D4. az egységmátrixhoz 1*-et rendel.*

► Mint látjuk, a definíció első három feltétele azt mondja ki, hogy hogyan változik a determináns értéke elemi sorműveletek közben. Az egyetlen változás, hogy itt a skalárral való szorzásnál nem kötöttük ki, hogy c nem lehet 0. Látni fogjuk, hogy e kikötés elhagyása nem fog gondot okozni az elemi sorműveletek determinánsokra való alkalmazásában.

► A definícióból nem látszik, hogy e feltételeket kielégítő függvény létezik-e és ha igen, egyértelmű-e. Ezeket később igazolni fogjuk.

► A definícióban nem törekedtünk a feltételek minimalizálására, inkább a természetesség és egyszerűség volt a fontosabb szempont. Például a *D2.* feltétel elhagyható, hisz a sorcsere előállítható a két másik sorművelet segítségével, amint azt a 2.24. feladatból is láthattuk.

► Az 1×1-es $[a]$ mátrix determinánsa $\det([a]) = a$, ugyanis a determináns definíciója szerint $\det([1]) = 1$, és $\det([a]) = \det([a \cdot 1]) = a\det([1]) = a$. A *D2.* és *D3.* feltételek teljesülnek, hisz e determinánsnak csak egy sora van. A jelölésbeli zavarok elkerülésére az 1×1-es $[a]$

mátrix determinánsára csak a $\det([a])$ vagy $\det(a)$ jelölést használjuk, mert $|a|$ az a abszolút értékét jelöli!

► Hamarosan igazolni fogjuk, hogy a fejezet elején említett

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

képlet illeszkedik e definícióhoz.

► A determináns tekinthető olyan n-változós függvénynek, melynek n argumentumába a mátrix n sorvektora kerül. Nem okoz félreértést, ha ezt a függvényt is det jelöli. Ha tehát $\mathbf{A}$ sorvektorai $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n$, akkor $\det(\mathbf{A})$ megegyezik a $\det(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n)$ függvényértékkel. Például a 3×3-as egységmátrix determinánsa az alábbi alakokba írható:

$$\det(\mathbf{I}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \det((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) = \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3),$$

ahol $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ a standard egységvektorokat jelöli. A determináns fenti definíciója könnyen fölírható e jelöléssel is (ld. 6.11. feladat).

Mikor 0 a determináns értéke Gyakran vízválasztó, hogy egy determináns értéke zérus-e.

6.2. TÉTEL (RÁNÉZÉSRE 0 DETERMINÁNSOK). *Ha egy mátrixnak van egy zérussora, akkor determinánsa 0. Ha egy mátrixnak van két azonos sora, akkor determinánsa 0.*

BIZONYÍTÁS. Ha egy mátrixnak van egy zérussora, akkor e sort bármely c számmal beszorozva e sor nem változik, így a determináns értéke sem. Másrészt a determináns definíciójának *D1.* pontja szerint a determináns értéke c-szeresére változik. E két feltétel csak úgy állhat fönn minden c skalárra, ha $\det(\mathbf{A}) = 0$. (Ennek következményeként a definíció *D1.* pontjában nem kell a $c = 0$ lehetőséget kizárni.)

Ha egy determinánsnak két azonos sora van, akkor *D3.* szerint értéke nem változik, ha az egyik sort a másikból kivonjuk, így egy zérussort kapunk, akkor pedig a determináns értéke 0. □

6.3. TÉTEL (ZÉRUS ÉRTÉKŰ DETERMINÁNS). *Legyen* $\mathbf{A}$ *négyzetes mátrix. A következő állítások ekvivalensek:*

1. $\det(\mathbf{A}) = 0$,
2. $\mathbf{A}$ *sorvektorai lineárisan összefüggők,*
3. $\mathbf{A}$ *szinguláris,*
4. *a homogén lineáris* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása.*

BIZONYÍTÁS. Az 5.20. tételben láttuk, hogy négyzetes mátrix sorvektorai pontosan akkor lineárisan összefüggők, ha a mátrix szinguláris, azaz ha a lépcsős alakra hozás során keletkezik egy 0-sor, ez pedig azzal ekvivalens, hogy a determináns értéke 0. Az utolsó állítás ekvivalenciája a mátrix invertálhatóságáról szóló 5.15. tétel közvetlen következménye. □

6.4. PÉLDA (ZÉRUS ÉRTÉKŰ DETERMINÁNSOK). *A sorvektorok lineáris összefüggőségének igazolásával mutassuk meg, hogy*

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

MEGOLDÁS. Az első determináns első sora a második és a harmadik összege. De fogalmazhatunk úgy is, hogy az első sorból kivonva a másodikat és a harmadikat, a nullvektort kapjuk. Tehát az első mátrix sorvektorai lineárisan összefüggők, így determinánsa 0.

A második determináns sorvektorainak összege a nullvektor, tehát ezek is lineárisan összefüggőek, így ez a determináns is 0. □

Az előző 6.3. tétel, valamit az 5.15. tétel fontos következménye a determinánsnak az egyenletrendszerek megoldhatóságával való kapcsolatáról szól:

6.5. TÉTEL (EGYENLETRENDSZER MEGOLDHATÓSÁGA ÉS A DETERMINÁNS). *Legyen* $\mathbf{A}$ *négyzetes mátrix. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

1. $\det \mathbf{A} \neq 0$,
2. *az* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *egyenletrendszer tetszőleges* $\mathbf{b}$*-re egyértelműen megoldható,*
3. *az* $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ *egyenletrendszernek csak triviális megoldása van.*

► A legegyszerűbb eseteket leszámítva a sorvektorok lineáris összefüggősége „ránézésre” nem látható, de az összefüggőséget bizonyító skalárok – ha szükségünk van rá – megkaphatók az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer nemtriviális megoldásaiból.

► A gyakorlatban – például mért vagy közelítő számítással kapott adatok esetén – annak eldöntése, hogy egy determináns nulla-e, nagy óvatosságot igényel! Az, hogy egy mátrix „közel szinguláris”, nem feltétlenül olvasható le abból, hogy a determináns értéke „közel van a nullához”. Például az

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix} = 1, \quad \text{és az} \quad \begin{vmatrix} \frac12 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac12 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac12 \end{vmatrix} = \frac{1}{2^n}$$

determinánsok közül az első értéke tetszőlegesen nagy n-re is 1, pedig $\frac{1}{n}$ tetszőlegesen közel lehet 0-hoz, és az $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & n \end{smallmatrix}\right]$ mátrix már szinguláris. A második determinánsbeli $\frac{1}{2}\mathbf{I}_n$ mátrix nem szinguláris, pedig determinánsának értéke tetszőlegesen közel lehet 0-hoz, igaz, csak elegendően nagy n esetén.

► A véletlen valós mátrixok determinánsa 1 valószínűséggel nem 0, ha a mátrix elemeit valamely folytonos valószínűségeloszlás szerint választjuk. Másként fogalmazva, ha egy valós elemű mátrix determinánsa 0, akkor annak különleges oka van! Ez az ok, a sorvektorok közti lineáris kapcsolat, ami „igen ritkán” esik meg „véletlenül”.

A determináns értékének kiszámítása A determináns kiszámításához az elemi sorműveleteket fogjuk használni. A 6.1. definíció pontosan megmondja, hogyan változik a determináns értéke az elemi sorműveletek közben. Ha a lépcsős alakra hozás közben nem keletkezik zérussor, akkor a lépcsős alak háromszög alakú, illetve a redukált lépcsős alak diagonális. Ezek értékéről szól a következő tétel:

6.6. TÉTEL (HÁROMSZÖGMÁTRIX DETERMINÁNSA). *Az alsó vagy felső háromszögmátrix, s így a diagonális mátrix determinánsa megegyezik a főátlóbeli elemek szorzatával.*

BIZONYÍTÁS. Ha egy háromszögmátrix főátlójában van 0, akkor a redukált lépcsős alakra hozás után a főelemek száma kevesebb lesz, mint a sorok száma, azaz a mátrixban lesz egy zérussor, így determinánsának értéke 0. Ha nincs 0-elem a főátlóban, mind az alsó, mind a felső háromszögmátrix csak a hozzáadás sorműveletével – azaz a determináns értékének megváltoztatása nélkül – diagonálissá alakítható a főátlón kívüli elemek kiküszöbölésével, azaz

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ ? & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ? & ? & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & ? & \dots & ? \\ 0 & a_{22} & \dots & ? \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Egy diagonális mátrix determinánsában minden sorból kiemelve a főátlóban szereplő számot kapjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{D1}{=} a_{11}a_{22}\dots a_{nn} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn},$$

tehát a determináns értéke valóban a főátlóbeli elemek szorzata. □

Például az alábbi determináns értéke egyetlen sorcsere után azonnal leolvasható:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = -72$$

A determináns kézzel való kiszámításának módja tehát a következő: elemi sorműveletekkel hozzuk a determinánst olyan alakra, melynek vagy van egy zérussora, vagy háromszög alakú. Az elemi sorműveletek közben pedig gondosan adminisztráljuk hatásukat, azaz

- két sor cseréjekor szorozzuk meg a determinánst -1-gyel,
- egy sorának c-vel való szorzásakor pedig szorozzuk meg a determinánst $1/c$-vel.

A háttérben lényegében ezt teszik a számítógépek is (ld. a 6.4. kódot).

```
sage: M = matrix(3,range(9))
sage: M[2,2]=9
sage: M
[0 1 2]
[3 4 5]
[6 7 9]
sage: M.det()
-3
sage: det(M)
-3
```

6.4. kód: Determináns kiszámítása

6.7. PÉLDA (DETERMINÁNS KISZÁMÍTÁSA HÁROMSZÖG ALAKRA HOZÁSSAL). *Számítsuk ki a*

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \\ 4 & 5 & -6 \end{vmatrix} \quad \textit{és a} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

determinánsok értékét!

MEGOLDÁS. Elemi sorműveletekkel kapjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \\ 4 & 5 & -6 \end{vmatrix} \overset{\substack{S_2 - S_1 \\ S_3 - 2S_1}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{S_2 \leftrightarrow S_3}{=} - \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-2) = 2.$$

A következő determinánsnál sorcsere nélkül eliminálhatók a főátló alatti elemek, ezért a sorműveleteket nem is jelezzük.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Egy érdekes észrevétel: a fenti determinánsban és sorlécsős alakjában is a Pascal-háromszög számai találhatók. Ez nem véletlen, erről szólnak a 6.15. és a 6.16. feladatok. □

Elemi mátrixok determinánsa Az elemi mátrixok egyetlen sorművelettel kaphatók az egységmátrixból, így ezek determinánsa könnyen számolható.

6.8. KÖVETKEZMÉNY (ELEMI MÁTRIXOK DETERMINÁNSA). *A hozzáadás sorműveletével kapott elemi mátrix determinánsa* 1, *a sorcserével kapotté* -1, *egy sor c-vel való szorzásával kapotté c.*

BIZONYÍTÁS. Az állítás abból következik, hogy az elemi mátrixok az 1 determinánsú egységmátrixból kaphatók egyetlen sorművelettel. □

Például:

$$\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&4&0&1\end{vmatrix}=1,\quad \begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\end{vmatrix}=-1,\quad \begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{vmatrix}=3.$$

*Permutáló mátrix determinánsa** A permutáló mátrix minden sorában és oszlopában egyetlen 1-es van, így csak elemi sorcserékkel megkapható az egységmátrixból. A sorcsere csak a determináns előjelét változtatja meg, ezért permutáló mátrix determinánsa 1, ha páros sok sorcserére volt szükség, -1, ha páratlan sokra. Például az alábbi determinánsok közül az első determináns két sorcserével, a második három sorcserével kapható meg az egységmátrixból, tehát

$$\begin{vmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{vmatrix}=1,\quad \begin{vmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{vmatrix}=-1.$$

Azt mondjuk, hogy egy permutáló mátrix két sora *inverzióban* áll, ha az előbb álló sorbeli 1-es hátrébb van, mint a másik sorbeli. A

$$\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

mátrix inverzióinak száma például 4, ugyanis az első-második, első-negyedik, második-negyedik, harmadik-negyedik sorpárok inverzióban vannak.

6.9. TÉTEL (PERMUTÁLÓ MÁTRIX DETERMINÁNSA). *A permutáló mátrix aszerint* $+1$ *vagy* -1, *hogy inverzióban álló sorpárjainak száma páros vagy páratlan.*

BIZONYÍTÁS. Elég megmutatni, hogy egy sorcsere mindig megváltoztatja az inverziók számának paritását, vagyis azok száma párosból páratlanra, páratlanból párosra változik. Így ha egy permutáló mátrix inverzióinak száma páros, akkor csak páros sok sorcserével vihető az identikus mátrixba. Hasonlóan, ha az inverziók száma páratlan, akkor csak páratlan sokkal.

Ha a két megcserélendő sor szomszédos, akkor a sorcsere megváltoztatja e két sor viszonyát: ha inverzióban álltak, akkor ezután nem fognak, és fordítva. Az előttük és mögöttük álló sorokhoz való viszonyuk nem változott. Eszerint az inverziók száma eggyel nőtt vagy eggyel csökkent, azaz paritása megváltozott.

Ezután cseréljük fel az i-edik és j-edik sorokat (legyen $i < j$). Az inverziók számának nyomon követése érdekében ezt szomszédos sorok cseréjével valósítjuk meg. Cseréljük ki az i-ediket az $(i+1)$-edikkel, majd azt az $(i+2)$-edikkel,..., míg az eredetileg i-edik sor a j-edik helyére nem kerül. Ehhez $j-i$ sorcserére van szükség. Ezután az eredetileg j-edik sort $j-i-1$ sorcserével az i-edik helyre visszük. Ez összesen $2(j-i)-1$, azaz páratlan sok sorcsere, ami a paritást valóban ellenkezőjére változtatja. □

Mátrixműveletek és determináns Kérdés, hogy milyen kapcsolat van a mátrixműveletek és a determináns között. Fontos megjegyezni, hogy a determinánsfüggvénynek *nincs* a mátrixösszeadásra és a skalárral való szorzásra nézve művelettartó tulajdonsága, azaz általában $\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \neq \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$, és $\det(c\mathbf{A}) \neq c\det(\mathbf{A})$.

A skalárral való szorzás esetén mondható valami: mivel egy mátrix c-szeresének determinánsa minden sorából kiemelhető c, ez annyi kiemelést jelent, ahány sora van a mátrixnak. Így tetszőleges $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra és tetszőleges c skalárra $\det(c\mathbf{A}) = c^n \det(\mathbf{A})$. Ez az $\mathbb{R}^2$- vagy $\mathbb{R}^3$-beli geometriai interpretációból is világos: egy parallelogramma előjeles területe 4-szeresére, egy parallelepipedon előjeles térfogata 8-szorosára nő, ha minden élét 2-szeresére növeljük.

A determináns művelettartó a négyzetes mátrixok szorzására nézve. Ezt mondja ki a következő állítás.

6.10. ÁLLÍTÁS (DETERMINÁNSOK SZORZÁSSZABÁLYA). *Ha* $\mathbf{A}$ *és* $\mathbf{B}$ *azonos méretű négyzetes mátrixok, akkor* $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$.

BIZONYÍTÁS. A 6.8. tétel következtében egy elemi mátrixszal való balról szorzás egy mátrixon olyan sorműveletet hajt végre, mely determinánsát épp annyiszorosára változtatja, amennyi az elemi mátrix determinánsa. Így egy $\mathbf{E}$ elemi mátrix és egy tetszőleges négyzetes $\mathbf{B}$ mátrix szorzatának determinánsa megegyezik determinánsaik szorzatával, azaz

$$\det(\mathbf{EB}) = \det(\mathbf{E})\det(\mathbf{B}).$$

Tudjuk, hogy ha $\mathbf{A}$ szinguláris, akkor $\mathbf{AB}$ is, azaz ha $\det(\mathbf{A}) = 0$, akkor $\det(\mathbf{AB})$ is 0, tehát $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$. Ha $\mathbf{A}$ nem szinguláris, akkor felbontható elemi mátrixok szorzatára: $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\ldots\mathbf{E}_k$, így $\mathbf{AB} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\ldots\mathbf{E}_k\mathbf{B}$. A $\det(\mathbf{EB}) = \det(\mathbf{E})\det(\mathbf{B})$ összefüggést az $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\ldots\mathbf{E}_k$-ra és $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\ldots\mathbf{E}_k\mathbf{B}$-re is használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) &= \det(\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\ldots\mathbf{E}_k)\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{E}_1)\det(\mathbf{E}_2)\ldots\mathbf{E}_k)\det(\mathbf{B})\\
&= \det(\mathbf{E}_1)\det(\mathbf{E}_2)\det(\mathbf{E}_3\ldots\mathbf{E}_k)\det(\mathbf{B}) = \ldots =\\
&= \det(\mathbf{E}_1)\det(\mathbf{E}_2)\ldots\det(\mathbf{E}_k)\det(\mathbf{B}),\ \text{másrészt}\\
\det(\mathbf{AB}) &= \det(\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\ldots\mathbf{E}_k\mathbf{B}) = \det(\mathbf{E}_1)\det(\mathbf{E}_2\ldots\mathbf{E}_k\mathbf{B})\\
&= \det(\mathbf{E}_1)\det(\mathbf{E}_2)\det(\mathbf{E}_3\ldots\mathbf{E}_k\mathbf{B}) = \ldots =\\
&= \det(\mathbf{E}_1)\det(\mathbf{E}_2)\ldots\det(\mathbf{E}_k)\det(\mathbf{B}),
\end{aligned}$$

ami bizonyítja az állítást. Egy másik, nagyon szép bizonyítás található a 6.12. feladatban. □

A determinánsok szorzásszabályának egy fontos alkalmazása a determináns értékének kiszámítása PLU-felbontással (ld. 6.5. kód).

6.11. PÉLDA (DETERMINÁNS KISZÁMOLÁSA PLU-FELBONTÁSBÓL). *Hogyan határozzuk meg egy* $\mathbf{A}$ *mátrix determinánsát, ha ismerjük PLU-felbontását? Konkrétan mennyi a következő mátrix determinánsa?*

$$\begin{bmatrix}0&1&2\\3&5&6\\4&7&9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3/4&-1/4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&7&9\\0&1&2\\0&0&-1/4\end{bmatrix}$$

MEGOLDÁS. Egy PLU-felbontásban szereplő mindegyik mátrix determinánsa könnyen meghatározható. $\mathbf{P}$ két sorcserével egységmátrixszá válik, tehát $\det\mathbf{P} = 1$. $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ háromszögmátrixok, amelyek determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata, ami $\mathbf{L}$ esetén mindig 1. A megadott konkrét esetben tehát $\det\mathbf{A} = 4\cdot 1\cdot(-1/4) = -1$. □

```
sage: M = matrix(3,range(9))
sage: M[2,2]=9
sage: N=M.change_ring(RDF)
sage: N
[0.0 1.0 2.0]
[3.0 4.0 5.0]
[6.0 7.0 9.0]
sage: N.det()
-3.0
sage: P,L,U = N.LU()
sage: P
[0.0 0.0 1.0]
[1.0 0.0 0.0]
[0.0 1.0 0.0]
sage: U
[ 6.0  7.0  9.0]
[ 0.0  1.0  2.0]
[ 0.0  0.0 -0.5]
sage: P.det()
1.0
sage: U.det()
-3.0
```

6.5. kód: Determináns kiszámítása a PLU-felbontásból. A felbontás az egészek gyűrűjében nem működik, ezért gyűrűt váltunk és dupla pontosságú lebegőpontos számokkal számolunk (RDF).

Mátrix determinánsa és transzponáltjának determinánsa megegyezik. Ez lehetővé teszi, hogy a determináns kiszámításához nem csak az elemi sor-, de az elemi oszlopműveleteket is használjuk, hisz egy mátrixon végzett oszlopművelet a transzponált sorművelete.

6.12. ÁLLÍTÁS (TRANSZPONÁLT DETERMINÁNSA). *Mátrix determinánsa megegyezik transzponáltjának determinánsával, azaz bármely négyzetes* $\mathbf{A}$ *mátrixra* $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\mathsf{T})$.

BIZONYÍTÁS. Az $\mathbf{A}$ mátrix redukált lépcsős alakra hozásának mátrixszorzatos alakja legyen $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\ldots\mathbf{E}_k\mathbf{R}$, ahol $\mathbf{E}_i$ elemi mátrix, $\mathbf{R}$ az $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja. A transzponált determinánsa

$$|\mathbf{A}^\mathsf{T}| = |\mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{E}_k^\mathsf{T}\ldots\mathbf{E}_2^\mathsf{T}\mathbf{E}_1^\mathsf{T}| = |\mathbf{R}^\mathsf{T}||\mathbf{E}_k^\mathsf{T}|\ldots|\mathbf{E}_2^\mathsf{T}||\mathbf{E}_1^\mathsf{T}|.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy minden elemi mátrix determinánsa megegyezik transzponáltjának determinánsával (ellenőrizzük!). Mivel $\mathbf{R}$

redukált lépcsős alak, ezért $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, vagy $\mathbf{R}$-nek van egy zérus sora. Ha $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, akkor $|\mathbf{R}^\mathsf{T}| = |\mathbf{R}| = |\mathbf{I}| = 1$, ha pedig $\mathbf{R}$-nek van zérus sora, akkor $\mathbf{R}^\mathsf{T}$-nak zérus oszlopa, és egy ilyen mátrix nem alakítható elemi sorműveletekkel egységmátrixszá, tehát determinánsa 0. Azaz $|\mathbf{R}| = |\mathbf{R}^\mathsf{T}|$ ekkor is fönnáll. Ekkor pedig

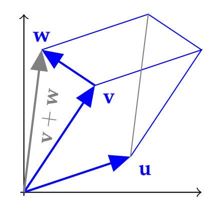
$$\begin{aligned}|\mathbf{A}^\mathsf{T}| &= |\mathbf{R}^\mathsf{T}||\mathbf{E}_k^\mathsf{T}|\dots|\mathbf{E}_2^\mathsf{T}||\mathbf{E}_1^\mathsf{T}| = |\mathbf{R}||\mathbf{E}_k|\dots|\mathbf{E}_2||\mathbf{E}_1|\\ &= |\mathbf{E}_1||\mathbf{E}_2|\dots|\mathbf{E}_k||\mathbf{R}| = |\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\dots\mathbf{E}_k\mathbf{R}| = |\mathbf{A}|.\end{aligned}$$

Tehát $|\mathbf{A}^\mathsf{T}| = |\mathbf{A}|$. □

6.13. PÉLDA (DETERMINÁNS KISZÁMÍTÁSA ELEMI OSZLOPMŰVELETEKKEL). *Az alábbi determinánst elemi sor- és oszlopműveletek alkalmazásával 2 lépésben is kiszámíthatjuk:*

$$\begin{vmatrix}1&0&0&1&0\\2&2&1&3&1\\1&1&1&1&0\\1&1&1&2&0\\1&1&1&2&1\end{vmatrix} \overset{S_2-S_5}{=} \begin{vmatrix}1&0&0&1&0\\1&1&0&1&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&2&0\\1&1&1&2&1\end{vmatrix} \overset{O_4-O_1}{=} \begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1\end{vmatrix} = 1$$

Determinánsok soronkénti additivitása A determinánsok egy fontos tulajdonságát a parallelogramma előjeles területével szemléltetünk. Tekintsük a síkban az $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorokat, valamint az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ által, valamint az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{w}$ által kifeszített parallelogrammákat, ahogy azt a 6.6. ábra mutatja. Igazolható, de az ábráról is leolvasható, hogy (előjeles) területük összege megegyezik az $\mathbf{u}$ és a $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ vektorok által kifeszített parallelogramma (előjeles) területével. Az előjeles területet f-fel jelölve igaz tehát az $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w})$ összefüggés. Hasonlóképp igaz, hogy $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v})$ bármely három $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vektorra. Szavakban kifejezve f additív mindkét változójában.



6.6. ábra: Az $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w})$ összefüggés szemléltetése.

6.14. TÉTEL (SORONKÉNTI ADDITIVITÁS). *Legyen* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *és* $\mathbf{C}$ *három olyan mátrix, melyek i-edik sorukat kivéve megegyeznek egymással. A három mátrix i-edik sorvektora legyen rendre* $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ *és* $\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i$. *Ekkor* $|\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| = |\mathbf{C}|$, *azaz*

$$\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\\\vdots\\\mathbf{a}_i\\\vdots\\\mathbf{a}_n\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\\\vdots\\\mathbf{b}_i\\\vdots\\\mathbf{a}_n\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\\\vdots\\\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i\\\vdots\\\mathbf{a}_n\end{vmatrix}$$

Bizonyítás. Ha az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok lineárisan összefüggők, akkor $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| = |\mathbf{C}| = 0$, így a tétel állítása fönnáll. Ugyanez igaz akkor is, ha $\mathbf{a}_i$ és $\mathbf{b}_i$ is előáll a fenti vektorok lineáris kombinációjaként, mert akkor összegük is előáll, és így ismét mindhárom determináns 0. Feltesszük tehát, hogy $\mathbf{a}_i$ és $\mathbf{b}_i$ legalább egyike független a többi sorvektortól. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $\mathbf{a}_i$ független a többi sorvektortól, vagyis $\mathbf{A}$ sorvektorai függetlenek, így bázist alkotnak. Ekkor $\mathbf{b}_i$ előáll lineáris kombinációjukként:

$$\mathbf{b}_i = b_1\mathbf{a}_1 + b_2\mathbf{a}_2 + \ldots + b_i\mathbf{a}_i + \ldots + b_n\mathbf{a}_n.$$

Vonjuk ki a $|\mathbf{B}|$ determináns i-edik sorából a $b_k\mathbf{a}_k$ sorokat, ahol $k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$. E műveletek közben a determináns értéke nem változik, és az i-edik sorban csak a $b_i\mathbf{a}_i$ vektor marad. Ezután emeljük ki az i-edik sorból a b_i konstanst, kapjuk, hogy $|\mathbf{B}| = b_i|\mathbf{A}|$. A $\mathbf{C}$ mátrixszal is megismételjük e műveleteket, csak ott a végén az i-edik sorban az $(1+b_i)\mathbf{a}_i$ vektor marad, így kapjuk, hogy $|\mathbf{C}| = (1+b_i)|\mathbf{A}|$. Innen pedig

$$|\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + b_i|\mathbf{A}| = (1+b_i)|\mathbf{A}| = |\mathbf{C}|,$$

és ezzel kész a bizonyítás. □

► Az előbbi tételt használva a determinánsok második soraira, a determinánsok kiszámítása nélkül is látjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 9 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 6 \end{vmatrix}.$$

► A tétel indukcióvak kettőnél több sorra is igazolható, így például a következő egyenlőség is igaz:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 9 & 8 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 9 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 6 \\ 9 & 8 & 6 \end{vmatrix}.$$

► A tételbeli képletet fordított irányban is használni fogjuk, nevezetesen egy determináns fölbontható több determináns összegére. Például:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 0 \end{vmatrix}.$$

mivel $(1,2,3) = (1,0,0) + (0,2,0) + (0,0,3)$.

► Mivel a transzponálás nem változtat a determináns értékén, e tétel sorvektorok helyett oszlopvektorokra is kimondható.

► E tétel a determináns definíciójának *D1.* feltételével együtt azt mondja, hogy a determináns olyan függvénye bármelyik sorának (a többi sor rögzítése mellett), mely megőrzi a lineáris kombinációt. Ezen azt értjük, hogy ha egy determináns i-edig sorvektora egyenlő a $c\mathbf{x} + d\mathbf{y}$ vektorral, akkor a determináns felbontható a következő képlet szerint:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i-1} \\ c\mathbf{x} + d\mathbf{y} \\ \mathbf{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i-1} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i-1} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}.$$

E tulajdonsággal rendelkező függvényeket *lineárisaknak* fogjuk nevezni, azokat a többváltozós függvényeket pedig, amelyek minden változójukban lineárisak, *multilineárisaknak*. Tehát a determináns, mint n-változós függvényt multilineáris, ugyanis bármely i-re ($i = 1, 2, \ldots, n$):

$$\begin{aligned} &\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, c\mathbf{x} + d\mathbf{y}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) \\ &= c\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{x}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) + d\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{y}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n). \end{aligned}$$

Feladatok

6.1.• Melyek igazak az alábbi állítások közül? (Az $\mathbf{A}$ itt mindig négyzetes mátrixot jelöl.)

1. Ha egy determináns értéke 0, akkor van két azonos sora.
2. Ha egy determináns értéke nem 0, akkor oszlopvektorai lineárisan függetlenek.
3. Ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása, akkor $|\mathbf{A}| \neq 0$.
4. $|\mathbf{A}| \neq 0$ pontosan akkor igaz, ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer nem oldható meg.
5. $|\mathbf{A}| = 0$ pontosan akkor igaz, ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

6.2.♥ Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét fejben!

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ *c)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ *e)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ *f)* $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 1 & 5 & 4 \\ 6 & 5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$

6.3.♥ Mutassuk meg – lineáris összefüggőséget keresve a sorok közt –, hogy az alábbi determinánsok értéke 0.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ *c)* $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ *e)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ *f)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}$ *h)* $\begin{vmatrix} \ln 10 & \ln 4 & \ln 40 \\ \ln 5 & \ln 4 & \ln 20 \\ \ln 2 & 0 & \ln 2 \end{vmatrix}$

6.4.♥ Fölhasználva, hogy

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2.$$

számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét:

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ *d)* $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} a & 3b & c \\ d & 3e & f \\ g & 3h & i \end{vmatrix}$ *f)* $\begin{vmatrix} a & b & c+a \\ d & e & f+d \\ g & h & i+g \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 2a & 3b & c+a \\ 2d & 3e & f+d \\ 2g & 3h & i+g \end{vmatrix}$ *h)* $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3d & 3e & 3f \\ g+4a & h+4b & i+4c \end{vmatrix}$

6.5.♥ Legyen $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ két 3×3-as mátrix, és legyen $\det(\mathbf{A}) = 5$, $\det(\mathbf{B}) = 4$. Számítsuk ki a következő determinánsok értékét!

a) $\det(\mathbf{A}^2)$ *b)* $\det(2\mathbf{A})$ *c)* $\det((2\mathbf{A})^2)$
d) $\det(\mathbf{A}^{-1})$ *e)* $\det(5\mathbf{A}^{-1})$ *f)* $\det((5\mathbf{A})^{-1})$
g) $\det(\mathbf{AB}^{-1})$ *h)* $\det(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{B})$ *i)* $|\mathbf{A}^{-1}||\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}||\mathbf{B}|$

6.6.♥ Csak sorcserék segítségével hozzuk egyszerűbb alakra (például háromszögalakra) az alábbi determinánsokat, és így számítsuk ki értéküket:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 & 8 \\ 4 & 7 & 9 & 2 \end{vmatrix}$ *e)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ *g)* $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

6.7.♥ Számítsuk ki elemi sorműveletekkel az alábbi determinánsokat!

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 8 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ *d)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

6.8. MELLÉKÁTLÓBAN EGYESEK Hány sor áll inverzióban abban a mátrixban, melynek mellékátlójában egyesek, egyebütt nullák állnak, és mennyi ennek determinánsa?

6.9.* Számítsuk ki elemi sorműveletekkel az alábbi n-edrendű determinánsokat!

a) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \dots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a & a^2 & a^3 & \dots & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ c & a & b & \dots & b \\ c & c & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \dots & a \end{vmatrix}$

6.10.■ Számítsuk ki a Petersen-gráf szomszédsági mátrixának (ld. **??** feladat) determinánsát!

6.11.• Írjuk fel a determináns definícióját oly módon, hogy det egy n-változós, n-dimenziós vektorokon értelmezett skalár értékű függvény legyen.

6.12. Adjunk új bizonyítást a determinánsok szorzásszabályára azt igazolva, hogy az $\mathbf{A} \mapsto \det(\mathbf{AB}) / \det(\mathbf{B})$ leképezés eleget tesz a determináns definíciójában kirótt feltételeknek.

6.13.* Bizonyítsuk be az LU-felbontás fölhasználásával a transzponált determinánsára vonatkozó 6.12. állítást.

6.14. Fejezzük ki az elemi mátrixokra használt jelöléseket használva ($\mathbf{E}_{S_i+cS_j}$, $\mathbf{E}_{S_i\leftrightarrow S_j}$, $\mathbf{E}_{cS_i}$) azok determinánsát!

6.15. Számítsuk ki a 6.7. példa Pascal-háromszöget tartalmazó

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

determinánsának értékét úgy, hogy az első oszlop főátló alatti elemeinek kinullázásához először vonjuk ki az utolsó előtti sort az utolsóból, majd a második sort a harmadikból, végül az elsőt a másodikból, és kövessük e módszert a többi főátló alatti elemre is.

6.16.* Számítsuk ki az

$$\left|\binom{i+j-2}{j-1}\right|_{n\times n} = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \dots & \binom{n-1}{n-1} \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{n}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix}$$

determináns értékét! (Útmutatás: az utolsó sorral kezdve mindegyik sorból vonjuk ki az előzőt, majd mindegyik oszlopból az előzőt!)

6.17. Mutassuk meg, hogy egy legalább 3-adrendű determináns értéke 0, ha elemei sorfolytonosan olvasva számtani sorozatot adnak. Például

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

6.18. Mutassuk meg, hogy egy legalább 3-adrendű determináns értéke 0, ha minden sora számtani sorozat, például

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

6.19. Mutassuk meg, hogy ha egy determináns elemei sorfolytonosan olvasva mértani sorozatot alkotnak, akkor értéke 0. Például

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 4 \\ 8 & 16 & 32 \end{vmatrix} = 0.$$

6.20. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b, c és d valósokra

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

6.21.• Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{C}$ invertálható, akkor $\det(\mathbf{CAC}^{-1}) = \det(\mathbf{A})$ tetszőleges azonos méretű $\mathbf{A}$ mátrixra fennáll.

6.22.• VEKTOROK DETERMINÁNSA MÁSIK BÁZISBANIgazoljuk, hogy ha $\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ az áttérés mátrixa, akkor a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_n$ vektorok $\mathcal{B}$- és $\mathcal{C}$-beli koordinátás alakjaiból képzett $\mathbf{V}_\mathcal{B}$ és $\mathbf{V}_\mathcal{C}$ mátrixok determinánsára $|\mathbf{V}_\mathcal{C}| = |\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}||\mathbf{V}_\mathcal{B}|$.

6.23.• Igazoljuk, hogy páratlan rendű ferdén szimmetrikus mátrix determinánsa 0.

6.24.• MÁTRIX NÉGYZETÉNEK DETERMINÁNSA Igazoljuk, hogy bármely négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixra $|\mathbf{A}^2| = |\mathbf{AA}^\mathsf{T}|$.

6.25. A determináns négyzetének kiszámításával (6.24. feladat) és a determinánsok szorzástételének alkalmazásával számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ b & -a & -d & c & f & -e & h & -g \\ c & d & -a & -b & g & -h & -e & f \\ d & -c & b & -a & h & g & -f & -e \\ e & -f & -g & -h & -a & b & c & d \\ f & e & h & -g & -b & -a & d & -c \\ g & -h & e & f & -c & -d & -a & b \\ h & g & -f & e & -d & c & -b & -a \end{vmatrix}.$$

6.26. Mutassuk meg, hogy az $(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)$ szorzat előállítható két szám négyzetének összegeként, azaz

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = (z_1^2 + z_2^2),$$

ahol z_1 és z_2 mindegyike külön az x_i és külön az y_i változóknak is lineáris kifejezése ($i = 1, 2$). (Hasonló összefüggések bizonyíthatóak négy illetve nyolc négyzetszám összegéről is. Például a négy szám négyzetösszegére vonatkozó képlet

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2),$$

ahol z_i az x_i és az y_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ változókban lineáris. A megoldáshoz használjuk fel az előző feladat állítását.)

6.27. TÉGLALAP KÉPÉNEK TERÜLETE Legyen egy téglalap négy csúcsa (p, q), $(p + x, q)$, $(p, q + y)$, $(p + x, q + y)$, ahol $x, y > 0$. Tehát a téglalap oldalhossza x és y, területe xy. Mekkora lesz a területe annak a síkidomnak, mely e téglalapból keletkezik az $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ mátrixú lineáris transzformáció hatására.

6.28.* ORIENTÁCIÓ Azt mondjuk, hogy $\mathbb{R}^n$ két bázisa azonos orientációjú, ha az egyiket a másikba vivő lineáris transzformáció determinánsa pozitív. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^n$ bázisain az „azonos orientációjú" reláció ekvivalencia reláció, amely így az összes bázist két osztályba sorolja.

A determináns mint elemeinek függvénye

A determinánst eddig sorvektorainak függvényeként kezeltük, a következőkben elemeinek függvényeként fogjuk. Ehhez két olyan módszerrel fogunk megismerkedni, melyekben a determináns kiszámítását egyszerűbb determinánsok kiszámítására vezetjük vissza.

Eddig nagyvonalúan bántunk a determináns elemeinek mibenlétével. Annyit feltételeztünk róluk kimondatlanul, hogy azonos algebrai struktúrából valók, és az összeadás, kivonás, szorzás és osztás elvégezhető köztük. Az elemi sorműveletek elvégzéséhez épp e négy műveletre volt szükség. E szakaszban ki fog derülni, hogy a determináns kiszámolható osztás nélkül is. Ennek következménye például, hogy egészelemű mátrix determinánsa egész szám, akkor is, ha számolás közben racionálisokba botlunk.[1]

[1] Általánosan fogalmazva: nem csak testek pl. a valós $\mathbb{R}$, a racionális $\mathbb{Q}$, a komplex $\mathbb{C}$ számtestek vagy a véges $\mathbb{F}_q$ testek elemeiből álló determinánst számolhatunk ki az adott struktúrán belül, hanem pl. az egészek $\mathbb{Z}$ gyűrűjének vagy a polinomok gyűrűjének elemeiből képzett determinánsokat is. További részletekért lásd a függelék 13 szakaszát.

Kígyók determinánsa A 2×2-es determináns kiszámítására ismerjük azt a formulát, amely a determináns értékét a determináns elemeinek függvényében írja fel: $\det\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] = ad - bc$. Itt tehát csak az összeadásra, kivonásra és a szorzásra van szükség. Hasonló formulát keresünk az n-edrendű determinánsokra. Ehhez az ún. *kígyókat* – más nevén *transzverzálisokat* – használjuk. A kígyók a diagonális mátrixok sorainak permutációjával származtatott mátrixok, azaz minden $\mathbf{K}$ kígyó felírható $\mathbf{K} = \mathbf{P}\,\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ alakban, ahol $\mathbf{P}$ egy permutáló mátrix. Ezt a *kígyóhoz tartozó permutáló mátrixnak* fogjuk nevezni. Mivel $\mathbf{P}$ determinánsa 1 vagy -1, ezért $|\mathbf{K}| = a_1 a_2 \ldots a_n$ vagy $|\mathbf{K}| = -a_1 a_2 \ldots a_n$.

A determinánsok soronkénti linearitását használva érdekes felbontását kapjuk a determinánsnak. Tekintsük példaként az

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

determinánst. Első sorvektorának $(a, b, c) = (a, 0, 0) + (0, b, 0) + (0, 0, c)$ felbontását fölhasználva bontsuk fel a determinánst három determináns összegére:

$$\begin{vmatrix} a+0+0 & 0+b+0 & 0+0+c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Ezután folytassuk e felbontást a második sorvektorral, így már az eredeti determinánst 9 determináns összegére bontottuk. Végül tegyük ugyanezt az utolsó sorral is. Az így kapott 27 determinánst nem írjuk föl, de szemléltetésül egy sematikus ábrán megmutatjuk a felbontás lépéseit (6.7 ábra). Tömör négyzet jelöli azokat a helyeket, ahol megtartjuk a determináns eredeti elemét, üres kör azokat, ahová zérust írunk. A 27 determináns mindegyikének minden sorában egy elem az eredeti determinánsból való, a többi zérus. Közöttük azonban csak 6 kígyó van. A többinek van zérus oszlopa, így azok értéke 0, vagyis az eredeti determinánst 6 kígyó összegére bontottuk (a 0 értékű determinánsokat szürke színnel jeleztük).

Hasonló módon bármely n-edrendű determináns fölbomlik n^n olyan determináns összegére, melynek minden sorában egyetlen elem az eredeti determinánsból való, a többi 0, de ezek közül csak azok lesznek kígyók determinánsai, melyek minden oszlopában is van egy elem az eredetiből. (Ezeket nevezzük a mátrixból/determinánsból kiválasztható kígyóknak.) Ezek száma $n!$, mert az első sorból n-féleképp választhatunk egy elemet, a második sorból minden esetben már csak $n-1$-féleképp,..., és ez összesen $n(n-1)\dots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$ eset. Igaz tehát a következő állítás:

6.15. ÁLLÍTÁS (FELBONTÁS KÍGYÓK DETERMINÁNSAINAK ÖSSZEGÉRE). *Minden n-edrendű determináns fölbomlik az összes belőle kiválasztható kígyó determinánsának összegére. Jelölje $d_{j_1 j_2 \dots j_n}$ annak a permutáló mátrixnak a determinánsát, mely az a_{1j_1}, a_{2j_2},..., a_{nj_n} elemekből álló kígyóhoz tartozik. Ekkor*

$$\det([a_{ij}]) = \sum d_{j_1 j_2 \dots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

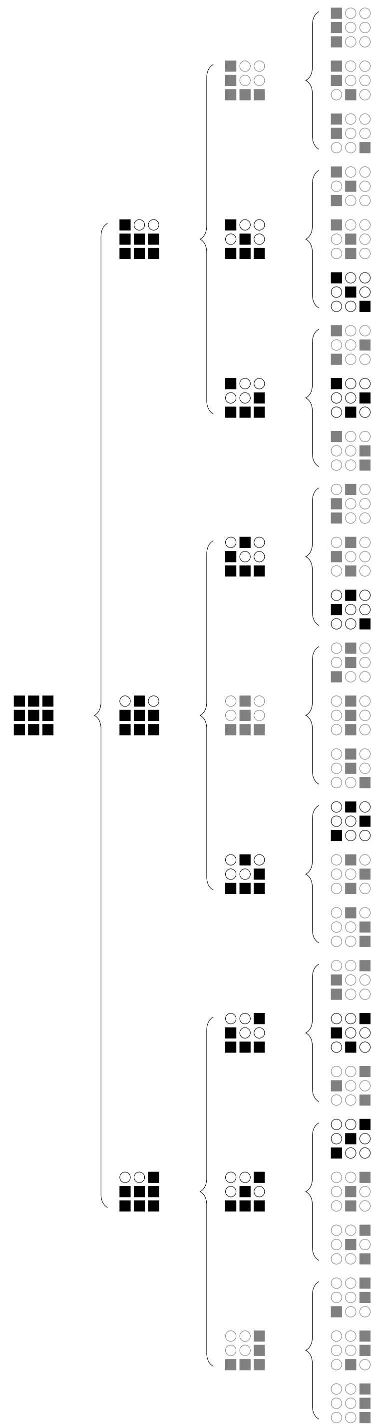
ahol az összegzés az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz összes lehetséges $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ permutációján végigfut.

Az $n!$ az n növekedtével rendkívül gyorsan nő (pl. $10! = 3628800$, $20! = 2432902008176640000$), determináns ilyen módon való számítása viszonylag kis rend esetén már számítógéppel sem lehetséges emberi idő alatt. E felbontást a determinánsok tulajdonságainak vizsgálatában használjuk. Számításhoz csak az $n = 2$ és $n = 3$ esetekben használjuk, igaz, azokra gyakran. $n = 2$ esetén az előző állítás szerint

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} = ad - bc,$$

mivel a második determináns egyetlen sorcserével hozható diagonális alakra. $n = 3$ esetén – felhasználva a 6.7 ábrát is – kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & h & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & f \\ g & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg \\ &= aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg\end{aligned}$$



6.7. ábra: Egy 3×3-as determináns felbontása 3^3 determináns összegére, melyek közül $3! = 6$ darabot kivéve mindegyikben van egy zérusoszlop – ezek sematikus ábráját szürke szín jelöli.

E két formula könnyen megjegyezhető egy egyszerű szabállyal, amelyet az $n = 2$ és $n = 3$ esetben *Sarrus-szabálynak* is neveznek: a főátló irányú szorzatok összegéből vonjuk ki a mellékátló irányú szorzatokat. (Hogy mit értsünk főátló és mellékátló irányú szorzaton, a 6.8. és a 6.9. ábrákról megérthető.) Fontos, hogy hasonló szabály $n > 3$ esetén már *nem érvényes* (ld. a 6.33. feladatot)!

A determináns 6.15. tételbeli felbontása a determináns értékét a determináns elemeinek függvényeként állítja elő. Ennek sok szép és fontos következménye van.

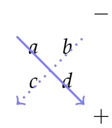
6.16. KÖVETKEZMÉNY (DETERMINÁNSFÜGGVÉNY LÉTEZÉSE). *A determinánsfüggvény létezik, és egyértelmű.*

BIZONYÍTÁS. Mivel a definícióból következőleg minden determináns egyenlő a belőle kiválasztható kígyók determinánsainak összegével, és minden kígyó determinánsa létezik és egyértelmű, ezért minden négyzetes mátrix determinánsa létezik és egyértelmű. □

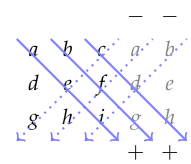
Íme további két fontos következménye a kígyókra bontásnak:

► Egy algebrai következmény: a determináns kiszámolásához elég csak az összeadás és szorzás művelete, az osztásra, melyet az elemi sorműveletek során használhatunk, nincs szükség. Eszerint egész számokból álló determináns értéke egész szám.

► Egy függvényanalízis körébe tartozó következmény: a determináns értéke folytonos függvénye elemeinek. Eszerint bármely kis pozitív ε-hoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy ha a determináns bármely eleme legföljebb δ értékkel megváltozik, akkor a determináns értéke legföljebb ε-nyit változik. Sőt, mivel a determináns kifejtésében csak az összeadás és a szorzás művelete szerepel, a determináns differenciálható függvénye elemeinek.

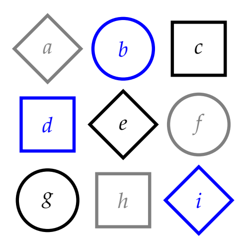


(a) $ad - bc$



(b) $aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$

6.8. ábra: Az *(a)* másod- és a *(b)* harmadrendű determináns kiszámítása: a főátló irányú szorzatok összegéből vonjuk ki a mellékátló irányú szorzatokat. Harmadrendű esetben kezdetben könnyíthetünk magunknak a determináns első két oszlopának a determináns utáni megismétlésével.



6.9. ábra: A harmadrendű determináns kiszámítására egy – IQ-tesztek típuskérdésére emlékeztető – másik módszer: az egyforma alakúak szorzatának összegéből ki kell vonni az egyforma színűek szorzatait.

Előjeles aldetermináns Ha az első sor elemeit kiemeljük a 3×3-as determinánst kifejtő képletből, érdekes sejtést fogalmazhatunk meg:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg \\
&= a(ei - fh) - b(fg - di) + c(dh - eg) \\
&= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Mielőtt ezt megtennénk, némi előkészítés következik.

6.17. DEFINÍCIÓ (ELŐJELES ALDETERMINÁNS). *Az n-edrendű $|\mathbf{A}|$ determináns i-edik sorának és j-edik oszlopának elhagyásával kapott $(n-1)$-*

edrendű determináns $(-1)^{i+j}$*-szeresét az* $|\mathbf{A}|$ *determináns* a_{ij} *eleméhez tartozó* előjeles aldeterminánsának *nevezzük.*

Az előjeles aldeterminánshoz kiszámítandó előjel a mátrixon sakktáblaszerűen változik, azaz a bal felső sarokban $+$, és két egymás melletti vagy alatti mezőben ellenkező előjelű. Ezt nevezik *sakktáblaszabálynak*.

+	−	+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+	−	+

6.10. ábra: Sakktáblaszabály: a $(-1)^{i+j}$ előjele a bal felső sarokban, vagyis az első sor első oszlopában $+$, él mentén szomszédos mezőkben pedig ellentétes.

6.18. PÉLDA (ELŐJELES ALDETERMINÁNS). *Számítsuk ki az*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 9 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

determináns második sor harmadik eleméhez tartozó előjeles aldeterminánsát!

MEGOLDÁS. A determináns második sorát és harmadik oszlopát kiemeltük

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 9 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Az ezek elhagyása után megmaradó aldetermináns és -1 megfelelő hatványának szorzata, vagyis a kért előjeles aldetermináns

$$(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot 6 = -6.$$

Tehát a determináns második sor harmadik eleméhez tartozó előjeles aldeterminánsa -6. □

6.19. ÁLLÍTÁS (DETERMINÁNS RENDJÉNEK CSÖKKENTÉSE). *Tegyük fel, hogy az* n*-edrendű* $|\mathbf{A}|$ *determináns* a_{ij} *elemének sorában vagy oszlopában minden további elem* 0*. Jelölje* A_{ij} *az* a_{ij} *elemhez tartozó előjeles aldeterminánst. Ekkor*

$$|\mathbf{A}| = a_{ij}A_{ij}.$$

BIZONYÍTÁS. Legyen az $|\mathbf{A}|$ determináns i-edik sorában az a_{ij}-n kívül minden elem 0 (hasonlóan tárgyalható, ha a j-edik oszlopban vannak nullák). Cseréljük ki a j-edik oszlopot a $(j-1)$-edikkel, majd ezt a $(j-2)$-edikkel..., addig, míg az $\mathbf{A}_{*j}$ oszlop az első oszlopba nem kerül. Ez $j-1$ oszlopcserét jelent, azaz a determináns értéke $(-1)^{j-1}$-szeresére változik. Ezután hasonlóképp vigyük az i-edik sort szomszédos sorok cseréjével az első sorba. Ehhez $i-1$ csere szükséges, miközben a determináns értéke $(-1)^{i-1}$-szeresére változik.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{ij} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i-1}(-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{*}{=} (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{**}{=} (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{ij} A_{ij}.$$

Az *-os egyenlőségnél kihasználtuk, hogy $i+j-2$ és $i+j$ paritása azonos, tehát -1 kitevőjeként is azonos eredményt adnak, továbbá kiemeltük a_{ij}-t az első sorból. A **-os egyenlőség előtt álló determináns kiszámításához csak a másodiktól lefelé lévő sorokat kell használni, a végeredményt az első oszlop elemei nem befolyásolják, így az első sor és első oszlop elhagyásával kapott determináns értéke ugyanaz. Végül az így kapott determináns az előjellel együtt épp A_{ij}, és ezzel bizonyítottuk az állítást. □

6.20. PÉLDA (DETERMINÁNS RENDJÉNEK CSÖKKENTÉSE). *A determináns rendjének csökkentésével számítsuk ki az alábbi determináns értékét!*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 8 & 4 \\ 6 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 8 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

MEGOLDÁS. Minden lépésben – esetleg egy apró átalakítás után – találunk egy sort vagy oszlopot, melyben csak egy nemnulla szám áll, így a determináns könnyen számolható:

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 8 & 4 \\ 6 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 8 & 9 & \boxed{8} & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} &= (-1)^{4+3} \cdot 8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 8 & 4 \\ 6 & 0 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\
(S_2 - S_1) \qquad &= (-8) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (-8) \cdot (-1)^{2+3} \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \boxed{6} & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (-8) \cdot (-5) \cdot (-1)^{2+1} \cdot 6 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (-8) \cdot (-5) \cdot (-6) \cdot (-12) \\
&= 2880.
\end{aligned}
$$

□

Determináns kifejtése Ritkán adódik, hogy a determináns rendje az előző (6.19.) állítás segítségével csökkenthető, viszont fölhasználásával a determinánsok egy gyönyörű kifejtési tételét kapjuk.

E kifejtési tételt egyes könyvek *Laplace-féle kifejtési tételnek* nevezik, míg más könyvek csak ennek egy – a feladatok közt megtalálható – általánosítását hívják így, sok könyv pedig e tételbeli összefüggéssel definiálja a determinánst.

6.21. TÉTEL (DETERMINÁNSOK KIFEJTÉSI TÉTELE). *Egy determináns értéke megkapható úgy, hogy egy tetszőleges sorának vagy oszlopának minden elemét beszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és e szorzatokat összeadjuk. Képletben, az n-edrendű $|\mathbf{A}|$ determináns értéke i-edik sora szerint kifejtve*

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik},$$

és j-edik oszlopa szerint kifejtve

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}.$$

BIZONYÍTÁS. Hasonlóan a korábbiakban látottakhoz, az i-edik sorvektor felbontásával a determinánst n olyan determináns összegére bontjuk, amelyek i-edik sorában csak egy elem származik az eredeti determinánsból, a többi 0. Az egyszerűség kedvéért e felbontást csak $n = 3$ és $i = 2$ esetére írjuk fel, de tetszőleges n-re ugyanígy megy. Ezután a 6.19. állítást alkalmazzuk mindegyik új determinánsra:

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\
&= \sum_{k=1}^{3} a_{2k}A_{2k}.
\end{aligned}
$$

A bizonyítás ugyanígy megy az oszlopokra is, amit példaként az $n = 3$, $j = 3$ esettel szemléltetünk:

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \\
&= \sum_{k=1}^{3} a_{k3}A_{k3}.
\end{aligned}
$$

□

6.22. példa (Kifejtési tétel). *Számítsuk ki az alábbi determináns értékét a kifejtési tételt használva!*

$$
\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.
$$

Megoldás. Érdemes e determinánst a harmadik oszlopa szerint kifejteni, mert ott két 0 is van, így a velük megszorzott aldeterminánsokat le sem kell írni.

$$
\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1.
$$

□

Vandermonde-determináns Bemutatunk egy fontos determinánst. Számtalan alkalmazása van, melyek egyike a polinominterpoláció.

6.23. példa (Interpoláció másodfokú polinomokra). *Legyen x, y és z három különböző valós, a, b és c három tetszőleges valós. Mutassuk meg, hogy egyetlen olyan legföljebb másodfokú f polinom létezik, melyre $f(x) = a$, $f(y) = b$ és $f(z) = c$.*

MEGOLDÁS. Legyen $f : x \mapsto p + qx + rx^2$, ahol p, q és r a polinom ismeretlen együtthatói. Az $f(x) = a$, $f(y) = b$ és $f(z) = c$ egyenlőségek a következő egyenletrendszerre vezetnek:

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Ez az egyenletrendszer a 6.5. tétel szerint pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha az együtthatómátrix determinánsa nem 0. Oszlopműveletekkel kezdjük az átalakítást:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \overset{O_3 - xO_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 1 & y & y^2 - xy \\ 1 & z & z^2 - xz \end{vmatrix} \overset{O_2 - xO_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & y - x & y^2 - xy \\ 1 & z - x & z^2 - xz \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} y - x & y^2 - xy \\ z - x & z^2 - xz \end{vmatrix} = (y - x) \begin{vmatrix} 1 & y \\ z - x & z^2 - xz \end{vmatrix} = (y - x)(z - x) \begin{vmatrix} 1 & y \\ 1 & z \end{vmatrix}$$
$$= (y - x)(z - x)(z - y)$$

Mivel x, y és z három különböző valós, ezért a determináns értéke nem 0, tehát az egyenletrendszer egyértelműen megoldható, vagyis egyetlen olyan polinom létezik, mely a feltételeket teljesíti. □

E probléma, és a benne szereplő determináns általánosítása a következő definícióhoz vezet:

6.24. DEFINÍCIÓ (VANDERMONDE-DETERMINÁNS). *Az x_1, x_2,... x_n számokhoz tartozó* Vandermonde-determinánson *a*

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{6.1}$$

determinánst vagy ennek

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

transzponáltját értjük. A hozzá tartozó mátrixot Vandermonde-mátrixnak *nevezzük.*

Mivel egy determináns értéke megegyezik transzponáltjának értékével, ezért a definícióbeli két determináns értéke is azonos, így mindegy melyik alakot használjuk.

6.25. TÉTEL (VANDERMONDE-DETERMINÁNS ÉRTÉKE). *Az x_1, x_2,… x_n ($n > 1$) számokhoz tartozó Vandermonde-determináns értéke megegyezik az olyan $(x_j - x_i)$ alakú különbségek szorzatával, ahol $i < j$, azaz*

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i<j}(x_j - x_i).$$

BIZONYÍTÁS. A determináns utolsó oszlopával kezdve minden oszlopból vonjuk ki az előző oszlop x_1-szeresét.

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1x_2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1x_n & \dots & x_n^{n-1} - x_1x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

ami az első sora szerinti kifejtés, majd minden sorból kiemelve az első oszlopbeli elemet, a következő alakra vezet:

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1x_2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1x_n & \dots & x_n^{n-1} - x_1x_n^{n-2} \end{vmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1)V_{n-1}(x_2, \dots, x_n) \\
&= \prod_{j>1}(x_j - x_1) \cdot V_{n-1}(x_2, \dots, x_n).
\end{aligned}$$

Eredményül egy rekurzív képletet kaptunk, melyet önmagába helyettesítve, és a $V_2(x_{n-1}, x_n) = x_n - x_{n-1}$ képletet is fölhasználva a tételbeli összefüggésre jutunk. □

Cramer-szabály és a mátrix inverze Eddig akár az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldására, akár az $\mathbf{A}$ mátrix inverzének kiszámítására olyan módszert használtunk, mely az elemi sorműveletek használatával csak egy algoritmust ad a számításokra, de nem adja meg a kapcsolatot (képletet) az adatok és a kiszámítandók közt. E paragrafusban ezt pótoljuk!

Jelölje $\mathbf{A}_{i,\mathbf{b}}$ azt a mátrixot, melyet akkor kapunk, ha az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik oszlopának helyére a $\mathbf{b}$ vektort írjuk. Kifejtve

$$\mathbf{A}_{i,\mathbf{b}} = [\mathbf{a}_{*1} \ \dots \ \mathbf{a}_{*,i-1} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a}_{*,i+1} \ \dots \ \mathbf{a}_{*n}].$$

E jelöléssel $\mathbf{I}_{i,\mathbf{x}}$ mátrixon az $[\mathbf{e}_{*1} \ \dots \ \mathbf{e}_{*,i-1} \ \mathbf{x} \ \mathbf{e}_{*,i+1} \ \dots \ \mathbf{e}_{*n}]$ mátrixot értjük.

6.26. TÉTEL (CRAMER-SZABÁLY). *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy* $n \times n$*-es mátrix. Az* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha* $\det \mathbf{A} \neq 0$. *Ekkor a megoldás:*

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}}}{\det \mathbf{A}}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Gabriel Cramer (1704–1752) genfi születésű svájci matematikus, akinek az algebrai görbékről szóló „Introduction à l'analyse des lignes courbes algébraique" című, 1750-ben publikált munkájában szerepelt a ma Cramer-szabály néven ismert tétel. A szabályt korábban már mások is ismerték.

BIZONYÍTÁS. Az állítás első felét már bizonyítottuk a 6.5. tételben. Ebből felhasználjuk, hogy mivel az egyenletrendszer megoldható, $\det \mathbf{A} \neq 0$. Kihasználva, hogy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, továbbá hogy $\mathbf{Ae}_i = \mathbf{a}_{*i}$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbf{AI}_{i,\mathbf{x}} &= \mathbf{A}[\mathbf{e}_{*1} \ \dots \ \mathbf{e}_{*,i-1} \ \mathbf{x} \ \mathbf{e}_{*,i+1} \ \dots \ \mathbf{e}_{*n}] \\
&= [\mathbf{Ae}_{*1} \ \dots \ \mathbf{Ae}_{*,i-1} \ \mathbf{Ax} \ \mathbf{Ae}_{*,i+1} \ \dots \ \mathbf{Ae}_{*n}] \\
&= [\mathbf{a}_{*1} \ \dots \ \mathbf{a}_{*,i-1} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a}_{*,i+1} \ \dots \ \mathbf{a}_{*n}] \\
&= \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}}
\end{aligned}$$

Mivel az $\mathbf{I}_{i,\mathbf{x}}$ mátrix i-edik sorának és oszlopának elhagyása után egy identikus mátrix marad, ezért az i-edik sora szerint kifejtve

$$\det \mathbf{I}_{i,\mathbf{x}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & x_1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n & \dots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{i+i} x_i = x_i.$$

Így a determinánsok szorzási szabályát is használva $\det(\mathbf{AI}_{i,\mathbf{x}}) = \det \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}}$, amiből $x_i \det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}}$, azaz $x_i = \det \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}} / \det \mathbf{A}$. □

6.27. PÉLDA (CRAMER-SZABÁLY). *Oldjuk meg az*

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 4 \\ 5x + 3y &= 6 \end{aligned}$$

egyenletrendszert a Cramer-szabállyal!

MEGOLDÁS. A kiszámolandó determinánsok a $\mathbf{b} = \left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 6 \end{smallmatrix}\right]$ jelöléssel:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -19, \quad \mathbf{A}_{1,\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -18, \quad \mathbf{A}_{2,\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -8.$$

Innen $x = \frac{-18}{-19} = \frac{18}{19}$, $y = \frac{-8}{-19} = \frac{8}{19}$. □

Ha egyenletrendszert meg tudunk oldani, akkor szimultán egyenletrendszert is, és így pl. az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ megoldásával a mátrix inverzét is ki tudjuk számítani. Az $\mathbf{x}_{ij}$ elem kiszámításához az $\mathbf{Ax}_{*j} = \mathbf{e}_j$ egyenletrendszert kell megoldani. A megoldás i-edik koordinátája az $\mathbf{x}_{ij}$ elem. A Cramer-szabály szerint

$$\mathbf{x}_{ij} = \frac{\det \mathbf{A}_{i,\mathbf{e}_j}}{\det \mathbf{A}}$$

Mivel az $\mathbf{A}_{i,\mathbf{e}_j}$ mátrix i-edik oszlopában csak egy elem nem 0, a kifejtési tétel szerint

$$\det \mathbf{A}_{i,\mathbf{e}_j} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & 1 & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = A_{ji},$$

vagyis e determináns megegyezik az $\mathbf{A}$ egy előjeles aldeterminánsával, tehát

$$\mathbf{x}_{ij} = \frac{\det \mathbf{A}_{i,\mathbf{e}_j}}{\det \mathbf{A}} = \frac{\det \mathbf{A}_{ji}}{\det \mathbf{A}}.$$

Mint látjuk, az $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$ előállításához az $\mathbf{A}$ előjeles aldeterminánsai mátrixának transzponáltjára van szükség. E mátrixot az $\mathbf{A}$ *klasszikus adjungáltjának* nevezzük és $\operatorname{adj}(\mathbf{A})$-val jelöljük. A klasszikus jelzőre azért van szükség, mert az adjungált szót komplex elemű mátrix konjugált transzponáltjára is használjuk, és ez félreértésekhez vezethet. Képletben tehát

$$\operatorname{adj} \mathbf{A} = [A_{ij}]^\mathsf{T} = [A_{ji}]. \tag{6.2}$$

Így a következő tételt kapjuk:

6.28. TÉTEL (MÁTRIX INVERZÉNEK ELEMEI). *Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ egy invertálható mátrix. Ekkor inverzének ij indexű eleme az a_{ji} elemhez tartozó előjeles aldetermináns és az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsának hányadosa, azaz*

$$[\mathbf{A}^{-1}]_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det \mathbf{A}}.$$

Így az inverz mátrix az

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}[A_{ij}]^\mathsf{T} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \operatorname{adj} \mathbf{A}. \tag{6.3}$$

alakba írható.

► Könnyen ellenőrizhető, hogy az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ mátrix klasszikus adjungáltja

$$\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$$

így inverze

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \operatorname{adj} \mathbf{A} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

► A mátrix inverzének e kifejezése azt mutatja, hogy az inverz mátrix minden eleme folytonos függvénye a mátrix minden elemének minden olyan helyen, ahol a determináns nem 0, azaz minden olyan helyen, ahol az inverz egyáltalán létezik.
► Az előző megjegyzésből az is következik, hogy egy n-ismeretlenes n egyenletből álló egyenletrendszer megoldásvektorának minden koordinátája folytonos függvénye az egyenletrendszer együtthatóinak és a jobb oldalán álló vektor koordinátáinak, hisz a megoldás az inverzzel való szorzással megkapható.
► Egészelemű mátrix inverze pontosan akkor egészelemű, ha determinánsa 1 vagy -1. Ez abból adódik, hogy $\det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}^{-1}) = \det \mathbf{I} = 1$, tehát ha $|\det \mathbf{A}| \neq 1$, akkor $\det(\mathbf{A}^{-1})$ nem egész szám, tehát $\mathbf{A}^{-1}$ nem lehet egészelemű, ha pedig $|\det \mathbf{A}| = 1$, akkor a (6.3) képlet szerint $\mathbf{A}^{-1}$ minden eleme egész szám.
► A tételbeli képlet könnyen kiterjeszthető szinguláris mátrixokra is, vagyis amikor a determináns 0, ugyanis

$$\mathbf{A} \operatorname{adj} \mathbf{A} = \det(\mathbf{A})\mathbf{I} \tag{6.4}$$

minden négyzetes mátrixra fennáll (ld. a 6.44. feladatot).

6.29. PÉLDA (MÁTRIX INVERZE). *Számítsuk ki a szemléltetés céljából csupa különböző elemet tartalmazó*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

mátrix inverzét!

MEGOLDÁS. Az $\operatorname{adj} \mathbf{A}$ determinánst olyan alakba írjuk föl, ahonnan látszik minden elem kiszámításának módja. Szürke színnel szedjük az elhagyandó elemeket:

$$\operatorname{adj}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}
+\begin{vmatrix}0&1&2\\3&5&6\\4&7&9\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&1&2\\3&5&6\\4&7&9\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0&1&2\\3&5&6\\4&7&9\end{vmatrix}\\
-\begin{vmatrix}0&1&2\\3&5&6\\4&7&9\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0&1&2\\3&5&6\\4&7&9\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&1&2\\3&5&6\\4&7&9\end{vmatrix}\\
+\begin{vmatrix}0&1&2\\3&5&6\\4&7&9\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&1&2\\3&5&6\\4&7&9\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0&1&2\\3&5&6\\4&7&9\end{vmatrix}
\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

$$=\begin{bmatrix}
+\begin{vmatrix}5&6\\7&9\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3&6\\4&9\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3&5\\4&7\end{vmatrix}\\
-\begin{vmatrix}1&2\\7&9\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0&2\\4&9\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&1\\4&7\end{vmatrix}\\
+\begin{vmatrix}1&2\\5&6\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&2\\3&6\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0&1\\3&5\end{vmatrix}
\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

$$=\begin{bmatrix}3&-3&1\\5&-8&4\\-4&6&-3\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

Mivel $\det\mathbf{A}=-1$, ezért

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\operatorname{adj}\mathbf{A}=-\begin{bmatrix}3&-3&1\\5&-8&4\\-4&6&-3\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}=\begin{bmatrix}-3&-5&4\\3&8&-6\\-1&-4&3\end{bmatrix}\qquad\square$$

Már ezekből az egyszerű példákból is látszik, hogy mátrix invertálása e módszerrel igen műveletigényes. Valóban, gyakorlati számításokhoz nem használjuk, elméleti okfejtésekben vesszük nagy hasznát.

*Blokkmátrixok determinánsa** Az $\mathbf{M}=\left[\begin{smallmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{B}\\\mathbf{C}&\mathbf{D}\end{smallmatrix}\right]$ mátrix általában még négyzetes részmátrixok esetén sem számítható az $\mathbf{AD}-\mathbf{BC}$ képlettel (ld. a **??** feladatban)! Először egy speciális, de fontos esettel kezdjük.

6.30. TÉTEL (DETERMINÁNSOK SZORZATA BLOKKMÁTRIXBAN). *Legyenek* $\mathbf{A}$ *és* $\mathbf{D}$ *négyzetes mátrixok. Ekkor*

$$\begin{vmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{B}\\\mathbf{O}&\mathbf{D}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{O}\\\mathbf{C}&\mathbf{D}\end{vmatrix}=|\mathbf{A}||\mathbf{D}|.$$

BIZONYÍTÁS. Megmutatjuk, hogy minden olyan kígyó, melynek nincs eleme a $\mathbf{O}$-mátrixból, egy $\mathbf{A}$-beli és egy $\mathbf{D}$-beli kígyó szorzata. Ehhez elég megmutatni, hogy ha egy kígyónak van eleme a $\mathbf{B}$, illetve a $\mathbf{C}$ mátrixból, akkor az $\mathbf{O}$-ból is. Valóban, ha pl. $\mathbf{B}$ egy eleme benne van egy kígyóban, akkor oszlopában nincs elem $\mathbf{D}$-ben, így $\mathbf{D}$-ben marad egy sor is üresen, amelyet csak egy $\mathbf{O}$-beli elem foghat le. Ellenőrizni kell még, hogy az $\mathbf{A}$- és $\mathbf{D}$-beli kígyók előjeleinek szorzata megegyezik-e az egyesítésükkel kapott kígyó előjelével. Ez nyilván igaz, hisz egy $\mathbf{A}$-t és egy $\mathbf{D}$-t metsző sor nem lehet inverzióban, így az egyesített kígyó inverzióinak száma megegyezik a két kígyó inverzióinak összegével, az előjelet pedig a -1-nek az inverziók számára emelt hatványa adja. □

6.31. TÉTEL (2×2-ES BLOKKMÁTRIX DETERMINÁNSA). *Legyen*

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{A}$ *és* $\mathbf{D}$ *négyzetes mátrixok.*

1. *Ha* $|\mathbf{A}| \neq 0$, *akkor* $|\mathbf{M}| = |\mathbf{A}||\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}|$.
2. *Ha* $|\mathbf{D}| \neq 0$, *akkor* $|\mathbf{M}| = |\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}||\mathbf{D}|$.

BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{A}$ invertálható, akkor $\mathbf{M}$ alábbi alsó és felső blokkháromszögmátrix szorzatára való bontása segít:

$$\begin{aligned}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Az utóbbi három mátrix közül a szélsők determinánsa 1, a középsőé pedig a bizonyítandó kifejezés. Az

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

felbontás bizonyítja a második összefüggést. □

Feladatok

6.29. Melyek igazak az alábbi állítások közül? (Az **A** itt mindig négyzetes mátrixot jelöl.)

1. A determináns folytonos függvénye minden elemének.
2. A determináns differenciálható függvénye minden elemének.
3. Ha egy determináns minden eleme racionális szám, akkor értéke is racionális.
4. Ha egy determináns minden sorában és minden oszlopában pontosan egy elem nem 0, akkor a determináns értéke nem 0.
5. Ha egy mátrix két kígyó összege, akkor determinánsa is két kígyó determinánsának összege.
6. Ha $i+j$ páratlan szám, akkor az előjeles A_{ij} aldetermináns negatív.
7. Ha egy determináns minden eleme pozitív, akkor értéke nem lehet negatív.
8. Mátrix inverze folytonos függvénye minden elemének.

Felbontás kígyók determinánsainak összegére

6.30. Válasszuk ki az alábbi determinánsokból az összes nemnulla determinánsú kígyót, és ezek segítségével számítsuk ki a determináns értékét!

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

6.31. A determináns értékének kiszámítása nélkül mutassuk meg, hogy osztható 30-cal:

$$\begin{vmatrix} 24 & 40 & 68 \\ 27 & 15 & 31 \\ 51 & 55 & 53 \end{vmatrix}$$

6.32. Az alábbi – lottótippekből álló – determináns elemeinek csak a paritását vizsgálva minden számolás nélkül igazoljuk, hogy

$$\begin{vmatrix} 12 & 25 & 28 & 44 & 56 \\ 21 & 34 & 54 & 68 & 80 \\ 10 & 40 & 52 & 69 & 72 \\ 24 & 36 & 53 & 56 & 84 \\ 18 & 24 & 28 & 58 & 87 \end{vmatrix} \neq 0.$$

6.33. A 4-edrendű determinánsok $4! = 24$ kígyó determinánsának összegére bonthatók. Soroljuk fel közülük azt a 12 darabot, melyet elemei szorzata után -1-gyel kell szorozni! (A Sarrus-szabály 4-edrendű determinánsra csak 8 kígyóból állna, ezért nem használható!)

Kifejtési tétel

6.34. Tudjuk, hogy 504, 747 és 855 egyaránt oszthatók 9-cel. Ezt fölhasználva, a determináns értékének kiszámítása nélkül mutassuk meg, hogy az alábbi determináns osztható 9-cel:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 7 \\ 8 & 5 & 5 \end{vmatrix}.$$

6.35. Konstruáljunk olyan nemnulla értékű determinánst, melynek van olyan eleme, amelyet tetszőlegesen változtatva a determináns értéke nem változik.

Blokkdeterminánsok

6.36. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét kihasználva blokkstruktúrájukat!

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Speciális mátrixok determinánsa

6.37. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét!

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 8 & -1 & -8 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 9 & -27 & 81 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d+e & d^2+e^2 & d^3+e^3 \end{vmatrix}$

6.38. Bizonyítsuk be, hogy

$$D = \begin{vmatrix} p^2 & p & 1 & qrs \\ q^2 & q & 1 & prs \\ r^2 & r & 1 & pqs \\ s^2 & s & 1 & pqr \end{vmatrix} = (p-q)(p-r)(p-s)(q-r)(q-s)(r-s).$$

6.39. Igazoljuk, hogy az $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ képletekkel definiált Fibonacci-sorozat n-edik eleme egyenlő az alábbi $n \times n$-es tridiagonális determinánssal:

$$a_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

6.40. Legyen

$$P_n = \begin{vmatrix} a_n & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_{n-1} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{n-2} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_1 \end{vmatrix}$$

Mutassuk meg, hogy

$$\frac{P_k}{P_{k-1}} = a_k + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_{k-2} + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{}{a_2 + \cfrac{1}{a_1}}}}}.$$

Vegyes feladatok

6.41. Elérhető-e egyetlen elem megváltoztatásával, hogy egy tetszőleges $n \times n$-es nem szinguláris mátrix determinánsa 0-vá váljon?

6.42. Ferde kifejtés Vegyük egy determináns egy sorának elemeit, és szorozzuk meg mindegyiket egy másik sor azonos oszlopbeli eleméhez tartozó előjeles aldeterminánsával, majd képezzük ezek összegét. Ez mindig 0. Hasonló állítás igaz a determináns minden oszlopára is. Tehát az i-edik és u-adik sorra ($i \neq u$) és a j-edik és v-edik oszlopra ($j \neq v$):

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{uk} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kv} = 0.$$

6.43. Foglaljuk egyetlen állításba a kifejtési és a ferde kifejtési tételeket!

6.44. Mátrix inverze a kifejtési tételekkel A kifejtési és a ferde kifejtési (ld. az előző és a 6.42. feladatokat) segítségével adjunk új bizonyítást a mátrix inverzére vonatkozó (6.3) formulára!

6.45. Legyen x_0, x_1, x_2,…, x_n $n+1$ darab különböző valós, y_0, y_1,…, y_n ugyanannyi tetszőleges valós. Mutassuk meg, hogy egyetlen olyan legföljebb n-edfokú p polinom van, melyre $p(x_i) = y_i$ minden $i = 0, \dots, n$ esetén.

Cramer-szabály és mátrix inverze

6.46.♥ Oldjuk meg Cramer-szabállyal az alábbi egyenletrendszereket!

a)
$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - 2y &= 4 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 4 \\ 3x + 4y - 2z &= 11 \\ 3x - 2y + 4z &= 11 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x + 2y + 4z &= 31 \\ 5x + y + 2z &= 29 \\ 3x - y + z &= 10 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x + y \qquad &= 1 \\ x + 2y + z \qquad &= 2 \\ y + 2z + w &= 3 \\ z + 2w &= 4 \end{aligned}$$

6.47.♥ Határozzuk meg a megadott mátrixok inverzének megadott indexű elemét!

a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $a_{23} = ?$ *b)* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $a_{24} = ?$

6.48.♥ Határozzuk meg a megadott mátrixok inverzét a klasszikus adjungált kiszámolásával:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -7 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ $(abc \neq 0)$ *f)* $\begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *h)* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6.49. Igazoljuk, hogy tetszőleges négyzetes mátrixra $\mathbf{A}\,\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})\mathbf{I}$.

*Véges testek fölötti mátrixok determinánsa**

6.50. A determináns kiszámításának megismert technikái véges testek fölött is működnek. Számítsuk ki az alábbi – a megadott test fölött értelmezett – mátrixok determinánsát!

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_5$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbb{F}_{11}$

6.51. VÉLETLEN BITMÁTRIX DETERMINÁNSA Számítsuk ki $\mathbb{F}_2$ fölötti véletlen mátrixok determinánsát! Egy $\mathbb{F}_2^{5\times 5}$-beli mátrix determinánsa mekkora valószínűséggel 0? Kísérletezzünk számítógéppel, majd válaszoljuk meg a kérdést pontosan.

Projekt: a vektori szorzás általánosítása

6.52. Bizonyított tény, hogy nem lehet olyan bináris vektorműveletet definiálni az n-dimenziós tér vektorain ($n > 3$), mely eredményül ugyanannak a térnek egy vektorát adja és rendelkezik a vektori szorzás műveleti tulajdonságaival. E feladatsorban egy másik irányú általánosítást dolgozunk fel, mely nem a bináris műveleti tulajdonságokat, hanem az eredménynek a vektorokra való merőlegességét tarja meg.

a) Fogalmazzuk meg, hogy mit kapunk eredményül, ha a vektori szorzásra vonatkozó formális

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \mathbf{i} \\ a_2 & b_2 & \mathbf{j} \\ a_3 & b_3 & \mathbf{k} \end{vmatrix}$$

összefüggést 2×2-es vagy 4×4-es formális determinánsokra írjuk föl, vagyis mit ad eredményül az

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} \end{vmatrix} \quad \text{és az} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{vmatrix}$$

kifejezés?

b) Igazoljuk, hogy az n-dimenziós

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \\ \mathbf{a}_2 &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_{n-1} &= (a_{n-1,1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{n-1,n}) \end{aligned}$$

vektorok által kifeszített $n-1$-dimenziós paralelepipedon térfogata megegyezik az

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_n \end{vmatrix}$$

vektor abszolút értékével.

c) Ha a fentiek alapján általánosított képlettel $n-1$ darab n-dimenziós vektorhoz egy n-ediket rendelünk, akkor mit mondhatunk az így kapott n vektor körüljárásáról?

6.53. Határozzuk meg azt a vektort, mely merőleges az $(1,1,1,1)$, $(1,2,2,2)$, $(1,2,3,3)$ vektorokra, hossza megegyezik a három vektor által kifeszített parallelepipedon térfogatával, és e három vektor mellé negyediknek véve velük jobbrendszert alkot.

Megoldások

6.1. 1. Hamis. 2. Igaz. 3. Hamis. 4. Hamis. Az $|\mathbf{A}| \neq 0$ azzal ekvivalens, hogy az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer nem oldható meg egyértelműen, vagyis vagy nem oldható meg, vagy több megoldása is van. 5. Hamis.

6.2.
a) -2.
b) 0, mert van két azonos sora.
c) 0, mert a második sor az első konstansszorosa.
d) 1, mert háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.
e) 6, mert háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.
f) 0, mert van két azonos oszlopa.

6.3.
a) a második sor az első -1-szerese.
b) a harmadik sor egyenlő az első kettő összegével.
c) a harmadik sor egyenlő az első kettő összegével.
d) a második sor az első és a harmadik számtani közepe (másként: a harmadik sorból kivonva a másodikat, majd a másodikból az elsőt, mindkétszer az $(1, 1, 1)$ vektort kapjuk, azaz így van két azonos sor).
e) a második sor az első és a harmadik számtani közepe.
f) a három sorvektor összege a zérusvektor.
g) $\sin(\xi + \delta) = \sin\xi \cos\delta + \cos\xi \sin\delta$, így a harmadik oszlop az első és a második oszlop lineáris kombinációja, vagyis az oszlopvektorok lineárisan összefüggőek, tehát a determináns értéke 0.
h) Az első és második oszlop összege a harmadik oszlop (ill. az első és a második sor különbsége a harmadik sor), tehát az oszlopvektorok (ill. sorvektorok) lineárisan összefüggőek.

6.5. *a)* 125, *b)* 40, *c)* 1600, *d)* $1/5$, *e)* 25, *f)* $1/625$, *g)* $5/4$, *h)* 20, *i)* 1.

6.6.
a)
$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$
b) Az 1. és 2., azután az 1. és 3., végül az 1. és 5. sorokat felcserélve:
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -120.$$
c) $-1, -1, 1$.
d) 24.
e) 24.
f) Az első sort cseréljük fel az utolsóval, a másodikat az utolsó előttivel, ..., így $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ sorcserét hajtottunk végre, tehát a determináns értéke $(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}$ (itt $\lfloor . \rfloor$ az egészrész-függvényt jelöli). Ennek értéke 1, ha $n = 4k$ vagy $n = 4k + 1$, és -1, ha $n = 4k + 2$ vagy $n = 4k + 3$ valamilyen k természetes számra. Más alakban kapjuk meg az eredményt, ha csak szomszédos sorokat cserélünk: először az első sort visszük (szomszédos sorok cseréjével) az utolsóba, majd az eredeti determináns második sorát az utolsó előttibe, ..., azaz az alábbi sorpárok cseréjét hajtjuk végre:
$(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$,..., $(n - 1, n)$,
$(1, 2)$, $(2, 3)$,..., $(n - 2, n - 1)$,
...
$(1, 2)$, $(2, 3)$,
$(1, 2)$.
Ez összesen $(n - 1) + (n - 2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ sorcsere. Minden sorcserével (-1)-szeresére változik a determináns értéke, így a végeredmény $(-1)^{n(n-1)/2}$. Természetesen e hatvány értéke is akkor 1, ha $n = 4k$ vagy $4k + 1$, és akkor -1, ha $n = 4k + 2$ vagy $4k + 3$. (Ugyanilyen gondolatmenettel kimutatható, hogy ha egy determináns mellékátlója felett csupa 0 áll, akkor a determináns értéke a mellékátlóbeli elemek szorzatának $(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}$-szerese vagy más alakban $(-1)^{n(n-1)/2}$-szerese.)
g) ld. az előző pontot.

6.7.
a) Az első sort kivonjuk a másodikból és a harmadikból, majd a másodikat a harmadikból:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

b) Az első sort kivonva a többi sorból, majd a második sor kétszeresét kivonva a harmadikból, kapjuk, hogy

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&2&4&6\\0&3&6&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&3&6&9\end{vmatrix}=0.$$

c) $$\begin{vmatrix}3&8&6&3\\1&2&0&1\\1&1&-1&2\\2&5&1&5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&0&1\\3&8&6&3\\1&1&-1&2\\2&5&1&5\end{vmatrix}=$$
$$-\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&2&6&0\\0&-1&-1&1\\0&1&1&3\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&1&3&0\\0&-1&-1&1\\0&1&1&3\end{vmatrix}=$$
$$-2\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&1&3&0\\0&0&2&1\\0&0&-2&3\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&1&3&0\\0&0&2&1\\0&0&0&4\end{vmatrix}=-16.$$ Részletezzük a megoldás lépéseit:

1\. lépés: Cseréljük ki az első és második sort, hogy az első sor első eleme 1 legyen, s így ne kelljen törtekkel számolni. A determináns értéke (-1)-szeresére változik.

2\. lépés: Az első sor (-3)-, (-1)- ill. (-2)-szeresét adjuk a második, harmadik ill. negyedik sorhoz.

3\. lépés: Hogy a második sor második eleme is 1 legyen, emeljünk ki 2-t a második sorból.

4\. lépés: A második sort ill. (-1)-szeresét adjuk a harmadik ill. negyedik sorhoz.

5\. lépés: Adjuk a harmadik sort a negyedikhez. A determináns értéke -16.

d) 144.

6.8. E mátrixban bármely két sor inverzióban áll egymással, így ha a sorok száma n, a sorpároké $n(n-1)/2$. Eszerint e mátrix determinánsa $(-1)^{n(n-1)/2}$. (Az egységmátrix $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ sorcserével is megkapható e mátrixból, így determinánsát $(-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$ alakban is ki lehet fejezni, ld. még a 6.6. feladatban).

6.9.

a) $n=1$ esetén $1+x_1y_1$, $n=2$ esetén $x_1y_1+x_2y_2-x_1y_2-x_2y_1$ a determináns értéke. Ha $n\ge 3$, akkor a determináns értéke 0. Ezt úgy bizonyítjuk, hogy először a determinánst két determináns összegére bontjuk, majd mindkettőről belátjuk, hogy értékük 0. Az első determináns csupa 1-esből álló első sorát kivonjuk az összes többi sorból, az így kapott determináns értéke pedig valóban 0, hisz ha $x_2=0$, akkor a második sor csupa 0-ból áll, ha pedig $x_2\ne 0$, akkor a második sorának x_3/x_2-szerese egyenlő a harmadik sorral. A második determináns értéke is 0, hiszen ha $x_1=0$, akkor az első sor csupa 0-ból áll, ha pedig $x_1\ne 0$, akkor az első sor x_i/x_1-szeresét kivonva az i-edik sorból egy olyan determinánst kapunk, amelyben a második sortól kezdve minden sor 1-esekből áll, tehát a determinánsnak van két azonos sora.

$$\begin{vmatrix}1&1&\dots&1\\1+x_2y_1&1+x_2y_2&\dots&1+x_2y_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1+x_ny_1&1+x_ny_2&\dots&1+x_ny_n\end{vmatrix}$$
$$+\begin{vmatrix}x_1y_1&x_1y_2&\dots&x_1y_n\\1+x_2y_1&1+x_2y_2&\dots&1+x_2y_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1+x_ny_1&1+x_ny_2&\dots&1+x_ny_n\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}1&1&\dots&1\\x_2y_1&x_2y_2&\dots&x_2y_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_ny_1&x_ny_2&\dots&x_ny_n\end{vmatrix}$$
$$+\begin{vmatrix}x_1y_1&x_1y_2&\dots&x_1y_n\\1&1&\dots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\dots&1\end{vmatrix}$$
$$=0.$$

b) $(1-a^n)^{n-1}$. Vonjuk ki az első sor a^{n-1}-szeresét a második sorból, a^{n-2}-szeresét a harmadik sorból, …, a-szorosát az utolsó sorból: így a főátló alatt csak nullák lesznek, a determináns értéke.

c) $(a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$. Első megoldás: adjunk minden sort az elsőhöz, emeljük ki a közös $a+(n-1)b$ értéket, majd e sor b-szeresét vonjuk ki minden sorból. Másik megoldás: az utolsó sorral kezdve mindegyik sorból vonjuk ki a fölötte lévőt, majd jobbról kezdve mindegyik oszlopot adjuk a megelőzőhöz.

6.10. Az eredmény 48. Megoldás Sage-ben:

```
g = graphs.PetersenGraph()
G = matrix(g)
G.det()
```

6.13. Az $\mathbf{A}$ előáll $\mathbf{PLU}$ alakban, ahol $\mathbf{P}$ permutáló mátrix, $\mathbf{L}$ alsó, $\mathbf{U}$ felső háromszögmátrix. Az $\mathbf{L}$ és az $\mathbf{U}$ háromszögmátrixok, így determinánsuk megegyezik transzponáltjuk determinánsával, hisz a főátlóbeli elemek helyben maradnak a transzponálás során. A $\mathbf{P}$ permutáló mátrix determinánsa 1 vagy -1, transzponáltja pedig megegyezik inverzével, így $\det(\mathbf{I})=\det(\mathbf{PP}^\top)=\det(\mathbf{P})\det(\mathbf{P}^\top)=1$, azaz $\mathbf{P}$ és $\mathbf{P}^{-1}$ egyszerre 1 vagy -1, tehát megegyeznek. Végül $\det(\mathbf{A})=\det(\mathbf{PLU})=\det(\mathbf{P})\det(\mathbf{L})\det(\mathbf{U})$, és $\det(\mathbf{A}^\top)=$

$\det((\mathbf{PLU})^\mathsf{T}) = \det(\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{L}^\mathsf{T}\mathbf{P}^\mathsf{T}) = \det(\mathbf{U})\det(\mathbf{L})\det(\mathbf{P})$ összevetése bizonyítja az állítást.

6.14. $\det(\mathbf{E}_{S_i+cS_j}) = 1$, $\det(\mathbf{E}_{S_i\leftrightarrow S_j}) = -1$, $\det(\mathbf{E}_{cS_i}) = c$.

6.15.

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\1&4&10&20\end{vmatrix} \overset{S_4-S_3}{=} \begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\0&1&4&10\end{vmatrix}$$

$$\overset{S_3-S_2}{=} \begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\0&1&3&6\\0&1&4&10\end{vmatrix} \overset{S_2-S_1}{=} \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&1&3&6\\0&1&4&10\end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{S_4-S_3\\S_3-S_2}}{=} \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&1&4\end{vmatrix} \overset{S_4-S_3}{=} \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{vmatrix} = 1.$$

Ld. még a 6.16. feladatot!

6.16. Felhasználva, hogy $\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{k-1}$, elvégezve az ajánlott sor-, majd oszlopműveleteket, majd azt megismételve az egyre kisebb bal alsó részdeterminánssal kapjuk, hogy

$$D = \begin{vmatrix}1&0&0&\dots&0\\1&\binom{1}{0}&\binom{2}{0}&\dots&\binom{n-1}{0}\\1&\binom{2}{1}&\binom{3}{1}&\dots&\binom{n}{1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&\binom{n-1}{n-2}&\binom{n}{n-2}&\dots&\binom{2n-3}{n-2}\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}1&0&0&\dots&0\\0&\binom{0}{0}&\binom{1}{0}&\dots&\binom{n-2}{0}\\0&\binom{1}{1}&\binom{2}{1}&\dots&\binom{n-1}{1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\binom{n-2}{n-2}&\binom{n-1}{n-2}&\dots&\binom{2n-4}{n-2}\end{vmatrix}$$

$$= \dots = \begin{vmatrix}1&0&0&\dots&0\\0&1&0&\dots&0\\0&0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&\binom{0}{0}\end{vmatrix} = 1.$$

6.17. Az első sort kivonva a másodikból és a harmadikból két konstans sort kapunk, melyek egymás konstansszorosai, tehát a determináns értéke 0.

6.18. Vonjuk ki az első oszlopot a másodikból és a harmadikból. Az így kapott harmadik oszlop kétszerese a másodiknak, tehát a determináns értéke 0.

6.20. Első megoldás: vonjuk ki az első oszlopot a többiből, ezzel eltüntetve azokból a négyzetes tagot, majd vonjuk a második oszlop megfelelő skalárszorosát a harmadik és negyedik oszlopból, hogy elimináljuk azok lineáris tagját, végül a harmadik oszlop konstansszorosát vonjuk ki a negyedikből, hogy ott csak 0-k maradjanak.

Második megoldás: Elég megmutatnunk, hogy a determináns oszlopai lineárisan összefüggőek. Az $a^2x + (a+1)^2y + (a+2)^2z + (a+3)^2w = 0$ egyenlet a homogén

$$\begin{aligned} x + \ y + \ z + \ w &= 0\\ 2y + 4z + 6w &= 0\\ y + 4z + 9w &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerre vezet, aminek biztosan van nemtriviális megoldása, hisz 4 ismeretlenhez csak 3 egyenlet van adva. (Megoldani már szükségtelen, elég a megoldás létezését igazolni, de például az $(x, y, z, w) = (1, -3, 3, -1)$ egy megoldás).

6.22. Mivel a koordináták báziscserében való változásáról szóló 4.26. állításban láttuk, hogy a koordinátás alakokat a $[\mathbf{v}_i]_\mathcal{C} = \mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}_i]_\mathcal{B}$ képlet kapcsolja össze, ezért a $\mathbf{v}$ vektorok koordinátás alakjaiból, mint oszlopvektorokból képzett mátrixokra $\mathbf{V}_\mathcal{C} = \mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{V}_\mathcal{B}$, így determinánsaikra $|\mathbf{V}_\mathcal{C}| = |\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}||\mathbf{V}_\mathcal{B}|$.

6.23. Egyrészt $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, másrészt mivel $\mathbf{A}^\mathsf{T} = -\mathbf{A}$, ezért $\det(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = (-1)^n\det(\mathbf{A})$, azaz $\det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{A})$, amiből $\det(\mathbf{A}) = 0$.

6.24. $|\mathbf{A}^2| = |\mathbf{A}|^2 = |\mathbf{A}||\mathbf{A}| = |\mathbf{A}||\mathbf{A}^\mathsf{T}| = |\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}|$.

6.25. Mindhárom determinánst a következőképpen számítjuk ki. Legyen $\mathbf{A}$ a determinánshoz tartozó mátrix. Tekintsük az $|\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}|$ determinánst. Ezt könnyű kiszámítani (hisz a főátlón kívül csak nullák állnak), s ennek négyzetgyöke lesz a determináns értéke. Ezek alapján a három determináns értéke: $a^2 + b^2$, $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$, $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2)^4$.

6.26. A determinánsok szorzási szabályát is felhasználva:

$$\begin{aligned}(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) &= \begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ -x_2 & x_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ -y_2 & y_1\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}x_1y_1 - x_2y_2 & x_1y_2 + x_2y_1\\ -x_2y_1 - x_1y_2 & -x_2y_2 + x_1y_1\end{vmatrix}\\ &= (x_1y_1 - x_2y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2.\end{aligned}$$

A négy illetve a nyolc négyzet összegére vonatkozó analóg összefüggések hasonlóan bizonyíthatóak. (Hurwitz bebizonyította, hogy ha n négyzetszám összegére igaz a feladatbelivel analóg összefüggés, akkor $n = 1, 2, 4$ vagy 8.)

6.27. Minthogy lineáris transzformáció alteret altérbe, eltolt alteret eltolt altérbe visz, e téglalap képe egy (esetleg elfajuló) téglalap lesz. Ezért elég kiszámolni csak a téglalap

4 csúcsának képét. Ez kiszámolható egyetlen mátrixszorzással:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & p+x & p & p+x \\ q & q & q+y & q+y \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} ap+bq & ap+ax+bq & ap+bq+by & ap+ax+bq+by \\ cp+dq & cp+cx+dq & cp+dq+dy & cp+cx+dq+dy \end{bmatrix}$$

Innen leolvasható, hogy a téglalap képeként kapott parallelogramma oldalvektorai (ax, cx) és (by, dy), és így területe

$$|(ax)(dy) - (cx)(by)| = |ad - bc|xy.$$

Eszerint tehát a téglalap képének területe független a téglalap helyzetétől, és mindig a téglalap területének $|ad - bc|$-szerese.

6.29. 1. Igaz. 2. Igaz. 3. Igaz. 4. Igaz. 5. Hamis. Mátrixok összegének determinánsa általában nem egyenlő determinánsaik összegével (ld. a 6.30. feladatot). 6. Hamis. Egy aldetermináns értéke bármilyen előjelű lehet, az előjeles aldeterminánst belőle úgy kapjuk, hogy páratlan $i + j$ esetén megszorozzuk -1-gyel. 7. Hamis. 8. Hamis. Csak azokon a helyeken folytonos függvénye a mátrix elemeinek, ahol a determinánsa nem 0.

6.30.

a) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 8$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 16 - 4 - 4 = 9$$

c) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

6.31. Az első sor minden eleme páros, az első oszlop minden eleme osztható 3-mal, a második oszlop minden eleme osztható 5-tel, tehát minden kígyó osztható $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$-cal, így az összegük is.

6.32. Csak egyetlen kígyó áll csupa páratlan számból, így a kígyók összegére bontásnál csak annak determinánsa páratlan, a többié páros, összegük tehát páratlan, vagyis nem lehet 0.

6.33. Megadjuk, hogy melyik sorban hányadik elem lesz a kígyóba választva. A 12 kígyó: 1243, 1324, 1432, 2134, 2341, 2413, 3142, 3214, 3421, 4123, 4231, 4312. Ezek alapján a 12 determináns – a kígyó elemeit négyzettel jelölve:

$$\begin{vmatrix} \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

6.34. Adjuk a harmadik oszlophoz az első 100-szorosát és a második 10-szeresét. Így az utolsó sorban a megadott, 9-cel osztható számok szerepelnek. Ha e sor szerint fejtjük ki a determinánst, akkor minden összeadandó osztható lesz 9-tel, tehát a determináns is.

6.35. Egy olyan determinánst kell konstruálni, melynek van egy nulla értékű aldeterminánsa. például a

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

determináns értéke 1, de a 9-hez tartozó aldetermináns értéke 0, így a második sor vagy oszlop szerinti kifejtésben e szám 0-val szorzódik, vagyis nem befolyásolja a determináns értékét.

6.36.

a) $-6 \cdot 6 = -36$, mert a blokkmátrixok determinánsára vonatkozó tétel szerint a bal felső 2×2-es és a jobb alsó 3×3-as determinánsok szorzata adja az eredményt.

b) 24, mert a bal felső 1×1-es és a jobb alsó 4×4-es determinánsok értéke 1, illetve 24, és ezek szorzata 24. Másik megoldáshoz jutunk, ha a determinánst az első oszlopa, az egyetlen kiszámítandó aldeterminánst az első sora… szerint fejtjük ki.

6.37.

a) A determináns a 2, -1, -2, 1 számokból képezett Vandermonde-determináns, így értéke: $(-1-2)(-2-2)(1-2)(-2-(-1))(1-(-1))(1-(-2)) = 72$.

b) Vandermonde-determináns; értéke -2880.

c) A determináns két Vandermonde-determináns összegére bomlik:

$$\begin{vmatrix}1 & a & a^2 & a^3\\1 & b & b^2 & b^3\\1 & c & c^2 & c^3\\1 & d & d^2 & d^3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & a & a^2 & a^3\\1 & b & b^2 & b^3\\1 & c & c^2 & c^3\\1 & e & e^2 & e^3\end{vmatrix}$$
$$= (b-a)(c-a)(c-b)$$
$$\times [(d-a)(d-b)(d-c) + (e-a)(e-b)(e-c)] .$$

6.38. Ha $pqrs \neq 0$, akkor szorozzuk be az első sort p-vel, a másodikat q-val, a harmadikat r-rel, a negyediket s-sel, majd a negyedik oszlopból emeljünk ki $pqrs$-t; így egy Vandermonde-determinánst kapunk:

$$D = \frac{pqrs}{pqrs}\begin{vmatrix}p^3 & p^2 & p & 1\\q^3 & q^2 & q & 1\\r^3 & r^2 & r & 1\\s^3 & s^2 & s & 1\end{vmatrix}$$
$$= (q-p)(r-p)(s-p)(r-q)(s-q)(s-r).$$

Ha $pqrs = 0$, például $s = 0$, akkor az eredeti determináns negyedik oszlopa szerinti kifejtéssel kapjuk, hogy

$$D = pqr\begin{vmatrix}p^2 & p & 1\\q^2 & q & 1\\r^2 & r & 1\end{vmatrix}.$$

Ezekből rövid átalakítás után látható, hogy az összefüggés ebben az esetben is fennáll.

6.39. $a_1 = \det[1] = 1$, $a_2 = \left[\begin{smallmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{smallmatrix}\right] = 2$, az $(n \times n)$-es determinánst első sora szerint kifejtve kapjuk, hogy $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

6.41. Igen. Tekintsük a determináns első sor szerinti kifejtését! Ha mindegyik elemhez tartozó előjeles aldetermináns 0 lenne, akkor a mátrix szinguláris lenne, így valamelyik elemhez tartozó aldetermináns nem 0. Legyen pl. $A_{1j} \neq 0$. Ekkor a kifejtés összes többi tagját összevonva kapjuk, hogy $\det \mathbf{A} = a_{1j}A_{1j} + c$. Mivel $A_{1j} \neq 0$, ezért az $a_{1j}A_{1j} + c = 0$ egyenlet megoldható a_{ij}-re, tehát ennek az elemnek a megváltoztatása 0-vá teszi a determinánst.

6.42. Ha az i-edik sor elemeit az u-adik sorhoz tartozó előjeles aldeterminánsokkal szorozzuk, akkor az u-adik sor elemeit nem használjuk, tehát szabadon megváltoztathatjuk. Másoljuk az i-edik sort az u-adik helyére, tehát minden k-ra $a_{ik} = a_{uk}$. Ekkor egyrészt $\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{uk} = \sum_{k=1}^n a_{uk}A_{uk}$, azaz e determináns u-adik sor szerinti kifejtését kaptuk, másrészt e determinánsnak van két azonos sora, tehát determinánsa 0. Az oszlopokra vonatkozó állítás egy transzponálással visszavezethető erre.

6.43. A két tétel képletei közös képletbe foglalhatók. Sorokra:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{uk} = \begin{cases}\det \mathbf{A}, & \text{ha } i = u,\\ 0, & \text{ha } i \neq u,\end{cases} \tag{6.5}$$

oszlopokra:

$$\sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kv} = \begin{cases}\det \mathbf{A}, & \text{ha } j = v,\\ 0, & \text{ha } j \neq v.\end{cases} \tag{6.6}$$

6.44. A két kifejtési tételből adódik, hogy

$$[a_{ij}][A_{ij}]^\mathsf{T} = \det(\mathbf{A})\mathbf{I},$$

ugyanis $[a_{ij}]$ i-edik sorának és $[A_{ij}]^\mathsf{T}$ u-adik oszlopának, azaz $[A_{ij}]$ u-adik sorának skaláris szorzata a (6.5) képlet szerint $\det(\mathbf{A})$, ha $i = u$, azaz a szorzat főátlójában, egyebütt pedig 0. Ebből pedig mindkét képlet adódik.

6.48.

a) Az előjeles aldeterminánsok mátrixának transzponáltja:

$$\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}2 & 7\\1 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-7 & 7\\2 & 4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-7 & 2\\2 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 4\\1 & 4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & 4\\2 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 1\\2 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 4\\2 & 7\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 4\\-7 & 7\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & 1\\-7 & 2\end{vmatrix}\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\42 & 4 & -49\\-11 & -1 & 13\end{bmatrix}$$

Mivel a mátrix determinánsa 1, ezért inverze megegyezik az előjeles aldeterminánsok előbb kiszámolt mátrixával.

b) Az előjeles aldeterminánsok mátrixának transzponáltja:

$$\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}0 & 2\\2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 2\\3 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 0\\3 & 2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 3\\2 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 3\\3 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & 3\\0 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 0\end{vmatrix}\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}-4 & 4 & 4\\4 & -8 & 4\\4 & 4 & -4\end{bmatrix}.$$

Mivel a mátrix determinánsa 16, ezért az inverz mátrix

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\1 & -2 & 1\\1 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

c) Mivel $\det(\mathbf{A}) = 1$, ezért $\mathbf{A}^{-1}$ megegyezik az előjeles aldeterminánsok mátrixának transzponáltjával. Ennek mind a 16 elemét nem kell kiszámolni, mert felső háromszögmátrix inverze felső háromszögmátrix. Hasonlóan könnyen látható, hogy a főátlóbeli elemekhez tartozó előjeles aldeterminánsok értéke 1. Tehát csak a főátló alatti elemek előjeles aldeterminánsait kell kiszámolni. Példaként egyet mutatunk:

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 2 & 3\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = -2.$$

Hasonlóan kiszámolva a többit is kapjuk, hogy

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\1&-2&1&0\\-1&3&-3&1\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}=\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&-2&3\\0&0&1&-3\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Mi lehet e feladat általánosítása, és mi a válasz?

d) A mátrixból csak egy nemnulla kígyó választható ki, így determinánsa könnyen számolható: $\det\mathbf{B}=16$. Az inverz kiszámításához nem kell sok aldeterminánst számolni, mert nagy részük láthatóan 0 értékű. Vegyük figyelembe a számolásnál azt is, hogy $\mathbf{B}$ szimmetrikus, így egyrészt a szimmetrikusan elhelyezkedő elemek közül csak az egyiket kell kiszámolni, másrészt a szimmetria miatt a végén szükségtelen a transzponálás.

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}0&8&0&-8\\8&0&0&0\\0&0&0&8\\-8&0&8&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac12&0&-\frac12\\\frac12&0&0&0\\0&0&0&\frac12\\-\frac12&0&\frac12&0\end{bmatrix}.$$

e) Az inverz

$$\frac{1}{abc}\begin{bmatrix}bc&0&0\\0&ac&0\\0&0&ab\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}=\begin{bmatrix}\frac1a&0&0\\0&\frac1b&0\\0&0&\frac1c\end{bmatrix},$$

ha $abc\neq 0$. Az $abc=0$ esetben a mátrix nem invertálható.

f) $\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1-i\end{bmatrix}$.

g) Az inverz $\begin{bmatrix}0&0&0&1/4\\1&0&0&0\\0&0&1/3&0\\0&1/2&0&0\end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

6.50. *a)* A három eredmény: 1, 2, 4. Mivel mindhárom test esetén ugyanazokat a számolásokat kell elvégezni, csak más modulus szerinti maradék lesz az eredmény, legegyszerűbb, ha az egészek fölött számolunk, és annak maradékait tekintjük. Valóban, az egészek fölött -1 a determináns, és $-1 \bmod 2=1$, $-1 \bmod 3=2$, $-1 \bmod 5=4$.

b) 5. Legegyszerűbb, ha az első sor 2-szeresét hozzáadjuk a második, és 3-szorosát a harmadik sorhoz.

6.51. Sage-kód egy $\mathbb{F}_2$ fölötti véletlen mátrix kiírására:

```
sage: random_matrix(GF(2), 5)
[1 0 0 1 1]
[1 1 1 0 1]
[1 1 1 0 0]
[1 0 0 0 0]
[0 0 1 0 0]
sage: _.det()
1
```

Hány olyan $\mathbb{F}_2^{5\times5}$-beli mátrix van, amelynek determinánsa nem 0? Az első sora bármelyik vektor lehet, kivéve a $\mathbf{0}$-vektort, így 2^5-1 lehetőség van. A második sor nem lehet ez a vektor és a $\mathbf{0}$-vektor, ez 2^5-2 lehetőség. A harmadik vektor nem lehet az előző két vektor által kifeszített altér, melynek a $\mathbf{0}$-vektorral együtt $2^2=4$ eleme van, e vektor kiválasztására tehát 2^5-2^2 lehetőség adódik. Hasonlóan folytatva kapjuk, hogy az összes független vektorötösök – azaz a nemnulla értékű determinánsok – száma $(2^5-2^0)(2^5-2^1)(2^5-2^2)(2^5-2^3)(2^5-2^4)$. Ha ezt elosztjuk az összes $\mathbb{F}_2^{5\times5}$-beli mátrixok számával, 0.2980-t kapunk, így a determináns 0.7020 valószínűséggel lesz 0.

6.52.

a) Egy vektort, mely merőleges a megadott vektorokra, és azzal/azokkal jobbrendszert alkot.

b) Segítség: használjuk fel, hogy egy $n-1$-dimenziós P parallelepipedon térfogata megegyezik annak az n-dimenziós Q parallelepipedonnak a térfogatával, melyet a P-ből úgy kapunk, hogy a P-t kifeszítő vektorokhoz n-edik vektorként egy egységvektort adunk, mely merőleges a többire.

c) Pozitív. Ehhez épp az kellett, hogy a bázisvektorokat ne az első, hanem az utolsó sorba vagy oszlopba írjuk.

6.53. Az előző feladat szerint a kért vektort a következőképp kaphatjuk meg:

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&3&3\\\mathbf{e}_1&\mathbf{e}_2&\mathbf{e}_3&\mathbf{e}_4\end{vmatrix}=\mathbf{e}_4-\mathbf{e}_3$$

azaz a negyedik vektor $(0,0,-1,1)$.

7 Mátrixleképezések és geometriájuk

E fejezetet a lineáris leképezések mátrixműveletekből való származtatását, majd általános fogalmának főként szemléletes, geometriai indíttatású megalapozását tárgyalja. Merőlegesség, távolság, vetítés, forgatás, és ezek általánosításai lesznek az alapfogalmak.

Mátrixleképezés, lineáris leképezés

Minden $\mathbf{A}$ *mátrixhoz tartozik egy* $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ *leképezés. E leképezések épp egybeesnek a lineáris kombinációt megtartó leképezésekkel, melyeket lineáris leképezéseknek nevezünk. A lineáris leképezés nem csak a lineáris algebrának, de az egész matematikának egyik legfontosabb fogalma.*

A mátrixleképezés fogalma *Mátrixhoz tartozó leképezésen*, vagy egyszerűen *mátrixleképezésen* az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezést értjük, ahol $\mathbf{A}$ egy mátrix. Egy $m \times n$-es $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixhoz így egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés tartozik, ugyanis ha $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$, akkor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$.

A mátrixok jelölésére félkövér betűket használunk, a leképezésekére dőlt (kurzív) betűket. A továbbiakban azt a konvenciót követjük, hogy egy mátrixhoz tartozó mátrixleképezést ugyanannak a betűnek a dőlt változatával jelöljük, például az $\mathbf{A}$ mátrixhoz tartozó mátrixleképezést A jelöli, azaz

$$A : \mathbf{x} \mapsto A(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}.$$

Az $A(\mathbf{x})$ mellett az $A\mathbf{x}$ jelölés is használatos.

Az A leképezés értékkészletét $\mathrm{Im}(A)$ jelöli, mely az $\mathbb{R}^m$ altere (gondoljuk meg, miért?). Ezt szokás *képtérnek* is nevezni, minthogy ez az $\mathbb{R}^n$ tér képe. Ez megegyezik az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopterével, azaz $\mathcal{O}(\mathbf{A})$-val. Azoknak a vektoroknak az alterét, melyet A a nullvektorba visz, az A leképezés *magterének* nevezzük. Magtérre a *kernel* szó is használatos. $\mathrm{Ker}(A)$-val jelöljük. Ez megegyezik a hozzá tartozó $\mathbf{A}$ mátrix nullterével. Tehát

$$\operatorname{Im}(A) = \mathcal{O}(\mathbf{A}), \qquad \operatorname{Ker}(A) = \mathcal{N}(\mathbf{A}).$$

Az Im rövidítés a kép jelentésű *image*, a Ker a mag jelentésű *kernel* szóból származik.

7.1. PÉLDA (VEKTORI SZORZÁSSAL DEFINIÁLT MÁTRIXLEKÉPEZÉS). *Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ egy adott $\mathbb{R}^3$-beli vektor. Legyen A az a transzformáció, mely a tér tetszőleges $\mathbf{x}$ vektorához az $\mathbf{a} \times \mathbf{x}$ vektort rendeli. Tehát*

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{x}.$$

Mutassuk meg, hogy az A függvény egy mátrixleképezés, azaz létezik egy olyan $\mathbf{A}$ mátrix, hogy $A(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{a} \times \mathbf{x}$ vektori szorzat koordinátás alakban:

$$\mathbf{y} = \mathbf{a} \times \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{bmatrix}.$$

Az eredményből azonnal látszik, hogy e transzformáció mátrixleképezés, hisz $\mathbf{y}$ minden koordinátája $\mathbf{x}$ koordinátáinak lineáris kifejezése. A szorzatot $\mathbf{x}$ koordinátái szerint rendezzük, ahonnan azonnal leolvasható a transzformáció mátrixa, amit a továbbiakban $[\mathbf{a}]_\times$ jelöl. Segítségével fölírható a transzformáció mátrixszorzatos alakja:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \begin{bmatrix} & -a_3x_2 & +a_2x_3 \\ a_3x_1 & & -a_1x_3 \\ -a_2x_1 & +a_1x_2 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Tehát

$$[\mathbf{a}]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.1}$$

E feladat eredménye különösen fontos a 3-dimenziós tér transzformációinak vizsgálatánál, így pl. az anyagtranszformációk fizikai/mérnöki vizsgálatában. □

Műveletek mátrixleképezések között A következőkben megvizsgáljuk, hogy mi a kapcsolat a mátrixműveletek, és a mátrixokhoz tartozó mátrixleképezések közti műveletek között.

7.2. TÉTEL (MÁTRIXLEKÉPEZÉSEK ALAPMŰVELETEI). *Legyen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ három $m \times n$-es mátrix, legyen A, B és C a hozzájuk tartozó három mátrixleképezés és legyen c egy skalár. Ekkor*

a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$ *pontosan akkor igaz, ha* $A + B = C$, *és*

b) $c\mathbf{A} = \mathbf{C}$ *pontosan akkor igaz, ha* $cA = C$.

Ha $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ *és* $\mathbf{Z}$ *típusa rendre* $m \times k$, $k \times n$, *illetve* $m \times n$, *és* X, Y *és* Z *a hozzájuk tartozó három mátrixleképezés, akkor*

c) $\mathbf{XY} = \mathbf{Z}$ *pontosan akkor igaz, ha* $X \circ Y = Z$, *azaz mátrixok szorzásának a függvények kompozíciója felel meg.*

Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvénynek a $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény inverze, ha minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ helyen $(f(g(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ és $(g(f(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$, azaz ha kompozícióik az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvények megegyeznek az identikus leképezéssel.

7.3. TÉTEL (INVERZ MÁTRIXLEKÉPEZÉSEK). *Legyenek* A *és* B *az* $n \times n$*-es* $\mathbf{A}$ *és* $\mathbf{B}$ *mátrixokhoz tartozó mátrixleképezések. Ekkor az* $\mathbf{A}$ *mátrix inverze pontosan akkor a* $\mathbf{B}$ *mátrix, ha az* A *leképezés inverze a* B *leképezés.*

A fenti két tétel bizonyítását az Olvasóra hagyjuk (ld. 7.5. és 7.6. feladatok)!

Mátrixleképezések tulajdonságai A mátrixleképezések megőrzik a lineáris kombinációt, a nullvektort nullvektorba, alteret altérbe visznek.

7.4. TÉTEL (MÁTRIXLEKÉPEZÉSEK ALAPTULAJDONSÁGAI). *Legyen* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *egy tetszőleges mátrixleképezés,* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $c, d \in \mathbb{R}$.

a) $A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + dA(\mathbf{y})$, *azaz* A *megőrzi a lineáris kombinációt.*

b) Az A *homogén és additív leképezés, azaz*

$$\begin{aligned} A(c\mathbf{x}) &= cA(\mathbf{x}), && \text{(a leképezés homogén), és} \\ A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y}), && \text{(a leképezés additív).} \end{aligned}$$

c) $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

d) Tetszőleges altér képe altér.

e) Tetszőleges affin altér képe affin altér.

BIZONYÍTÁS. *a)* Bármely $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorra és $c, d \in \mathbb{R}$ valósra

$$A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = \mathbf{A}(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = c\mathbf{A}\mathbf{x} + d\mathbf{A}\mathbf{y} = cA(\mathbf{x}) + dA(\mathbf{y}).$$

b) Az előző egyenlőség $d = 0$ esetén a homogenitást, $c = d = 1$ esetén az additivitást bizonyítja. *c)* igaz, mert bármely $\mathbf{x}$ vektorra $A\mathbf{0} = A(0\mathbf{x}) = 0A(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. *d)* abból következik, hogy ha $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k$ egy $\mathcal{U}$ altér bázisa, akkor ezek összes lineáris kombinációjának, vagyis az altér vektorainak képe

$$A(c_1\mathbf{b}_1 + \ldots + c_k\mathbf{b}_k) = c_1A(\mathbf{b}_1) + \ldots + c_kA(\mathbf{b}_k).$$

Világos, hogy e vektorok kiadják az $A\mathbf{b}_1, \ldots, A\mathbf{b}_k$ vektorok által kifeszített altér minden vektorát, tehát $A(\mathcal{U})$ altér. Hasonlóan *e)*-ben, ha

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ egy tetszőleges vektor és $\mathcal{U}$ a fenti altér, akkor

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}+\mathcal{U}) &= A(u + c_1\mathbf{b}_1 + \ldots + c_k\mathbf{b}_k) \\ &= A(\mathbf{u}) + c_1A(\mathbf{b}_1) + \ldots + c_kA(\mathbf{b}_k) \\ &= A(\mathbf{u}) + A(\mathcal{U}), \end{aligned}$$

ami egy altér eltoltja, azaz affin altér. □

Lineáris leképezés A mátrixleképezések alaptulajdonságai a lineáris leképezés fogalmához vezetnek.

7.5. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS LEKÉPEZÉS). *Legyen H_1 és H_2 mindegyike olyan halmaz, melynek elemein értelmezve van egy asszociatív összeadás és egy „skalárral való szorzás" művelet. Azt mondjuk, hogy egy $A : H_1 \to H_2$ leképezés* lineáris, *ha homogén és additív, azaz ha tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H_1$ elemre és c skalárra*

$$\begin{aligned} A(c\mathbf{x}) &= cA(\mathbf{x}) && (A \textit{ homogén,}) \\ A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= A\mathbf{x} + A\mathbf{y} && (A \textit{ additív.}) \end{aligned}$$

$H_1 = H_2$ esetén a lineáris leképezéseket lineáris transzformációknak *is nevezzük.*

Azt a későbbiekben fogjuk részletezni, hogy milyen algebrai tulajdonságokat érdemes a skalárokról, valamint H_1 és H_2 elemeiről föltenni. Most csak néhány pédát mutatunk lineáris leképezésekre.

7.6. PÉLDA (A DERIVÁLÁS ÉS AZ INTEGRÁLÁS LINEÁRIS LEKÉPEZÉS). *Legyen H_1 az egyváltozós valós, és minden valós helyen differenciálható függvények halmaza, H_2 pedig az egyváltozós valós függvények halmaza. Világos, hogy H_1 és H_2 is olyan halmaz, melynek elemei közt értelmezve van az összeadás és a skalárral való szorzás művelete. A deriválás, azaz a $D : H_1 \to H_2 : f \mapsto D(f) = f'$ leképezés lineáris. Fogalmazzunk meg hasonló állítást az integrálra is.*

MEGOLDÁS. Tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ skalárra és $f, g \in H_1$ függvényre

$$\begin{aligned} D(cf) &= (cf)' = cf' = cD(f), \text{ és} \\ D(f+g) &= (f+g)' = f' + g' = D(f) + D(g). \end{aligned}$$

Hasonló összefüggések állnak fönn az integrálokra is, például legyen H_1 a $[0,1]$ intervallumon Riemann-integrálható függvények halmaza, és legyen $H_2 = \mathbb{R}$. Ekkor az $f \mapsto \int_0^1 f$ leképezés lineáris, ugyanis tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ skalárra és tetszőleges $f, g \in H_1$ függvényre

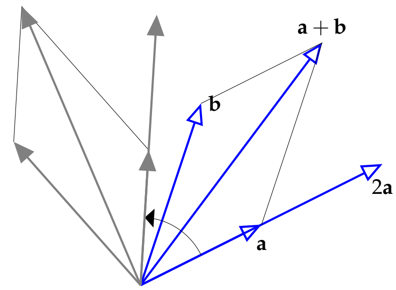
$$\int_0^1 cf = c\int_0^1 f, \text{ és } \int_0^1 (f+g) = \int_0^1 f + \int_0^1 g. \qquad \square$$

7.7. állítás (Síkbeli forgatás, tükrözés, vetítés). *A síkbeli vektorok egy rögzített O pont körüli forgatása, egy egyenesre való tükrözése és merőleges vetítése lineáris leképezés.*

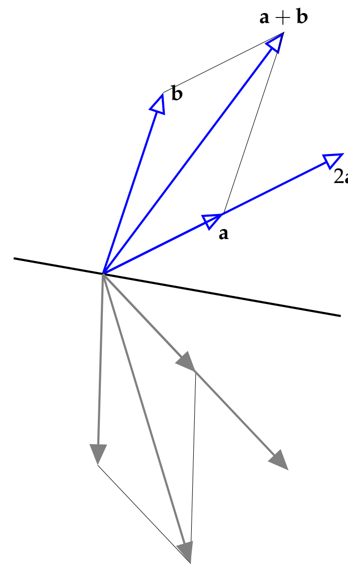
Bizonyítás. A precíz bizonyításokat mellőzük, csak a tényt szemléltetjük. A síkbeli vektorok pont körüli forgatása lineáris leképezés, ugyanis könnyen látható, hogy egy vektor c-szeresének ($c \in \mathbb{R}$) elforgatottja megegyezik a vektor elforgatottjának c-szeresével, valamint hogy két vektor összegének elforgatottja megegyezik a vektorok elforgatottjainak összegével (ld. 7.1. ábra).

Hasonlóan egyszerűen látszik, hogy egy egyenesre való tükrözés egy vektor c-szeresét a vektor tükörképének c-szeresébe viszi, és két vektor összegét a két vektor tükörképének összegébe (ld. 7.2 ábra).

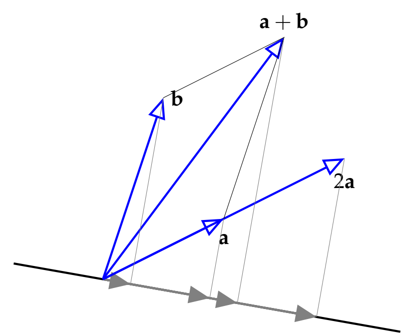
Végül ugyanígy megmutatható, hogy egy egyenesre való merőleges vetítés egy vektor c-szeresét vetületének c-szeresébe viszi, és két vektor összegét a két vektor vetületének összegébe (ld. 7.3 ábra). □



7.1. ábra: A pont körüli elforgatás lineáris leképezés



7.2. ábra: Az egyenesre való tükrözés lineáris leképezés



7.3. ábra: Az egyenesre való merőleges vetítés lineáris leképezés

$\mathbb{R}^n$-ből $\mathbb{R}^m$-be képző lineáris leképezések E fejezet további részében csak lineáris $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezésekkel foglalkozunk, ahol a skalárok a valós számok. Megmutatjuk, hogy ezek mátrixleképezések.

7.8. tétel (Lineáris leképezés ekvivalens definíciói). *Egy tetszőleges $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezésre az alábbi állítások ekvivalensek:*

1. *A lineáris, azaz homogén és additív.*
2. *Tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ és $c, d \in \mathbb{R}$ esetén*
$$A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + dA(\mathbf{y})$$
3. *Tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén*
$$A(c\mathbf{x} + \mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$$
4. *„Megőrzi" a lineáris kombinációt, azaz tetszőleges $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorokra és $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ skalárra*
$$A(c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k) = c_1A\mathbf{x}_1 + \cdots + c_kA\mathbf{x}_k.$$

A bizonyítást az Olvasóra hagyjuk (ld. 7.7. feladat).

7.9. tétel (Az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezések mátrixleképezések). *Legyen $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ egy tetszőleges függvény. Az A pontosan akkor lineáris, ha létezik egy olyan $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix, hogy az A függvény megegyezik az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ leképezéssel. Ekkor*
$$\mathbf{A} = [A\mathbf{e}_1 | A\mathbf{e}_2 | \ldots | A\mathbf{e}_n],$$
ahol $\mathbf{e}_i$ az i-edik standard egységvektor ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Bizonyítás. Minden mátrixleképezés lineáris, ez bizonyítja az állítás egyik felét. A állítás másik felének bizonyításához tekintsük $\mathbb{R}^n$ standard bázisát és az $A\mathbf{e}_i$ vektorokból képzett

$$\mathbf{A} = [A\mathbf{e}_1|A\mathbf{e}_2|\dots|A\mathbf{e}_n] \tag{7.2}$$

mátrixot, valamint legyen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ egy tetszőleges vektor. Ha A lineáris leképezés, azaz megőrzi a lineáris kombinációt, akkor

$$\begin{aligned}
A\mathbf{x} &= A(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) \\
&= x_1A\mathbf{e}_1 + x_2A\mathbf{e}_2 + \dots + x_nA\mathbf{e}_n \\
&= \begin{bmatrix} A\mathbf{e}_1 & A\mathbf{e}_2 & \dots & A\mathbf{e}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{A}\mathbf{x}
\end{aligned}$$

Tehát valóban létezik olyan $\mathbf{A}$ mátrix, hogy $A\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Ráadásul ilyen mátrix csak ez az egy van, mert bármely $\mathbf{e}_i$ bázisvektorra és bármely $\mathbf{A}$ mátrixra $\mathbf{A}\mathbf{e}_i = \mathbf{A}_{*i}$, tehát az $\mathbf{A}_{*i}$ oszlopvektor csak $A\mathbf{e}_i$ lehet. □

7.10. PÉLDA. *Mutassuk meg, hogy az*

$$\begin{aligned}
&A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; (x, y) \mapsto (x - y, 2x + y, -x + 1) \text{ és} \\
&L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; (x, y) \mapsto (x - y, 2x + y, -x)
\end{aligned}$$

leképezések közül az A nem lineáris leképezés, de az L igen. Utóbbinak írjuk föl a mátrixát!

Megoldás. Az A leképezés nem lineáris, mert a 7.4. tétel következtében $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ kellene, de $A : (0, 0) \mapsto (0, 0, 1)$.

Alakítsuk át a függvényértékéül kapott vektort:

$$L\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ 2x+y \\ -x \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

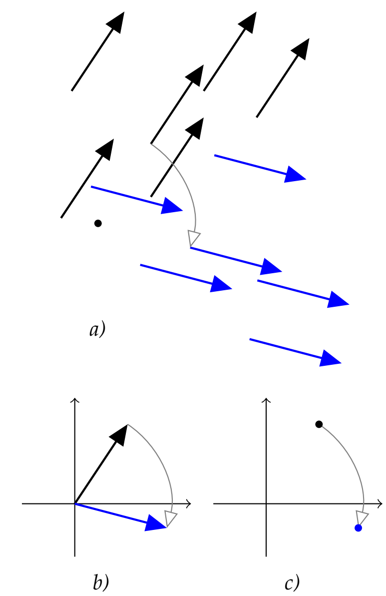
ami igazolja, hogy L mátrixleképezés, és mátrixa

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A mátrixleképezések pedig lineáris leképezések, tehát L is. □

► Mint azt a 7.6. példa mutatja, lineáris leképezésekről olyan esetben is beszélhetünk, amikor a leképezésnek nincs mátrixa, azaz a lineáris leképezés általánosabb fogalom.

► Különbség van a lineáris leképezés és a mátrixleképezés közt $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvények esetén is. A lineáris leképezés független a bázistól, az csak maga a függvény, mely megadja, hogy melyik vektornak melyik vektor a képe. A mátrixleképezés mindig valamely bázisra vonatkozik. Egy lineáris leképezéshez minden bázisban tartozik egy mátrixleképezés, melynek mátrixa függ a bázistól.
► Keressük meg a lineáris $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ transzformációkat. Itt $\mathbb{R}$ elemei az 1-dimenziós vektorok (azonosíthatók a számokkal). E térben az $e = 1$ vektor (szám) a bázis. Az előző tétel szerint egy lineáris $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ transzformáció mátrixa $[Le] = [L(1)]$, ami egy szám, jelölje ezt $c := L(1)$. Így $L(x) = L(1x) = L(x1) = xc = cx$, azaz a lineáris $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ transzformációk azonosak az $x \mapsto cx$ függvényekkel, ahol c egy tetszőleges konstans. Az ilyen leképezések grafikonja egy origón átmenő (függőlegestől különböző) egyenes. (Az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezések tehát nem azonosak a lineáris $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekkel, melyek általános alakja $f(x) = cx + d$, ahol $c, d \in \mathbb{R}$.)

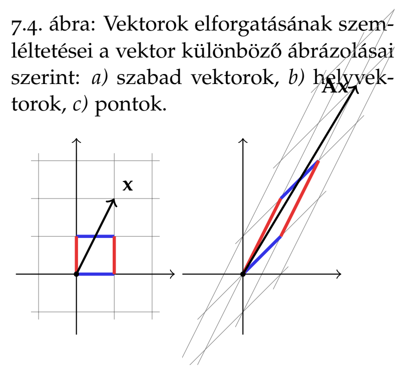


7.4. ábra: Vektorok elforgatásának szemléltetései a vektor különböző ábrázolásai szerint: *a)* szabad vektorok, *b)* helyvektorok, *c)* pontok.

A mátrixleképezés hatásának szemléltetései Egy mátrixszal való szorzás hatásának megértését még egy adott konkrét alkalmazásban is segítheti, ha vizuálisan is megjeleníthető képünk van róla.

Egy vektor és egy mátrixleképezés általi képe – akár szabad vektorokkal, akár helyvektorokkal, akár a helyvektorok végpontjával – egyszerűen ábrázolható. A 7.4. ábra például a forgatómátrix hatását szemlélteti e három módon. (Szabad vektorok esetén a szabad vektorok mellett a forgatás középpontja is szabadon megválasztható, helyvektorok esetén a forgatás középpontja az origó!)

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leképezések esetén a legegyszerűbb szemléltetéshez elég csak az egységnégyzet képét megrajzolni, amint azt a 7.5. ábra mutatja. A kép mindig egy parallelogramma (esetleg elfajuló), melynek körüljárását is jelölni kell valahogy. Ezt az ábrán az oldalak különböző színezése megteszi. A parallelogramma területe és körüljárása a mátrix determinánsból olvasható ki. Az egységnézetrács képe parallelogrammarács. Ennek segítségével egy tetszőleges vektor képének megszerkesztése egyszerű, hisz a lineáris leképezés megtartja a lineáris kombinációt (ld. 7.5. ábra).

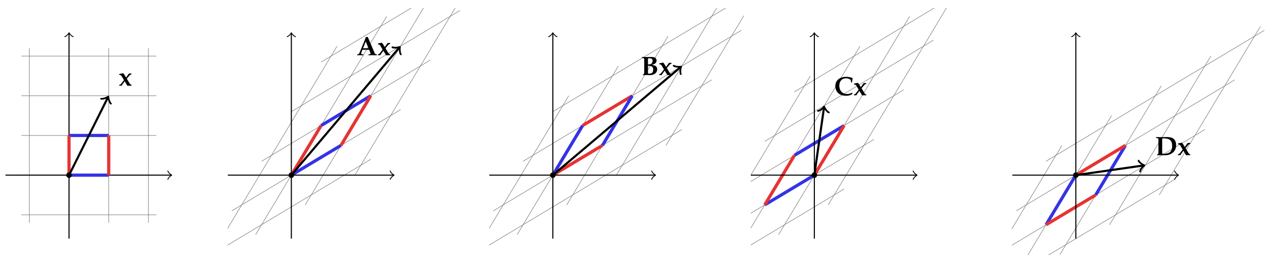


7.5. ábra: Az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{smallmatrix}\right]$ mátrix hatása az egységnégyzetrácson, és az $\mathbf{x} = (1, 2)$ vektoron. Az $\mathbf{Ax}$ vektor végpontja a parallelogrammarácson 1 lépés az x-tengely képének irányába, és 2 lépés az y-tengely képének irányába.

7.11. PÉLDA (MÁTRIXLEKÉPEZÉS ÁBRÁZOLÁSA AZ EGYSÉGNÉGYZETRÁCS KÉPÉVEL). *Ábrázoljuk az egységnégyzet és az egységnégyzetrács, valamint az* $(1, 2)$ *vektor képét az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

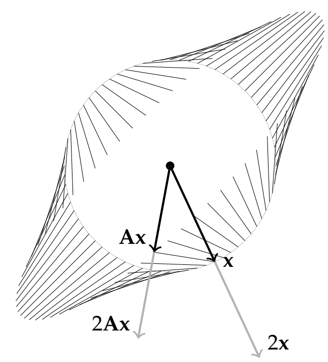
mátrixokkal megadott leképezések esetén.



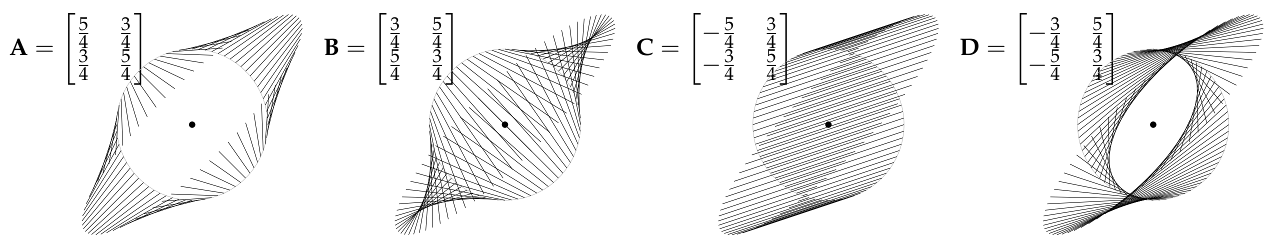
7.6. ábra: Az egységnégyzet és az egységnégyzetrács képe a megadott négy mátrix esetén, és az $(1,2)$ vektor képe.

Egy másik ábrázolási lehetőséget kapunk az egységvektorok képének megszerkesztésével. Mivel a mátrixleképezés homogén, azaz egy vektor c-szereséhez a vektor képének c-szeresét rendeli, ezért elég minden irányból egyetlen vektor – például az egységvektor – képének megszerkesztése. Hogy a kép áttekinthető legyen, helyvektorok helyett csak az őket reprezentáló pontokat tekintjük, és az egységkör összes pontja helyett csak néhányat (pl. 50–100-at). Mivel a kör lineáris leképezés általi képe mindig egy ellipszis (esetleg elfajuló), ezért a leképezés szemléltetéséhez elég összekötni az egységkörön kiválasztott pontot a képével ahhoz, hogy nagyjából a sík bármelyik vektorának „lássuk”, hogy mi a képe. Az így kialakuló ábra sokat elmond a leképezésről. Ezt mutatja a 7.7 ábra, ahol a $-65°$-os irányhoz tartozó $\mathbf{x}$ egységvektort és $\mathbf{Ax}$ képét külön berajzoltuk, és azt is megmutattuk, hogy pl. hogyan kapható meg $2\mathbf{x}$ képe.

A 7.8 ábra az előző példabeli mátrixleképezések egységkör-ábráját mutatja.

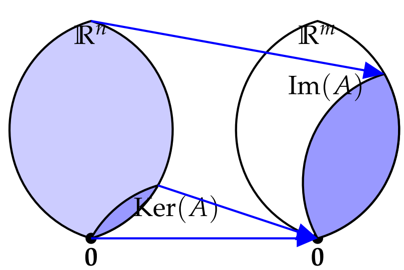


7.7. ábra: Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 3/4 & 5/4 \end{bmatrix}$ mátrix hatását szemlélteti oly módon, hogy az egységkör néhány pontját összeköti a képükkel. Az ábrán egy egységnyi $\mathbf{x}$ vektort és $\mathbf{Ax}$ képét, valamint a $2\mathbf{x}$ vektort és képét a $\mathbf{A}(2\mathbf{x}) = 2\mathbf{Ax}$ vektort kiemeltük.



7.8. ábra: Négy leképezés egységkör-ábrája.

Egy általános $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés megjelenítéséhez a levéldiagramot hívjuk segítségül. Itt elsőként a képteret és a magteret tudjuk szemléltetni, amint azt a 7.9. ábra mutatja.



7.9. ábra: Egy $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ mátrixleképezés levéldiagrammja. Az ábrán három altér színezéssel ki van emelve – az értelmezési tartomány $(\mathbb{R}^n)$, az értékkészlet $(\mathrm{Im}(A) = \mathcal{O}(\mathbf{A}))$ és a magtér $(\mathrm{Ker}(A) = \mathcal{N}(\mathbf{A}))$.

Lineáris leképezés mátrixa különböző bázisokban Tegyük fel, hogy az L lineáris leképezés mátrixa az $\mathcal{A}$ bázisban $\mathbf{L}_\mathcal{A}$, a $\mathcal{B}$ bázisban $\mathbf{L}_\mathcal{B}$, és az $\mathcal{A}$ bázisról a $\mathcal{B}$-re való áttérés mátrixa $\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$. Kérdés, hogy mi a kapcsolat e három mátrix között.

A válasz egyszerűen megadható, ha megvizsgáljuk egy tetszőleges $\mathbf{x}$ vektornak és $L\mathbf{x}$ képének koordinátás alakját. Ezeket jelölje $[\mathbf{x}]_\mathcal{A}$, $[\mathbf{x}]_\mathcal{B}$, $[L\mathbf{x}]_\mathcal{A}$, $[L\mathbf{x}]_\mathcal{B}$. Az áttérés mátrixa köztük a következő kapcsolatokat létesíti:

$$[\mathbf{x}]_\mathcal{B} = \mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}[\mathbf{x}]_\mathcal{A}, \quad [L\mathbf{x}]_\mathcal{B} = \mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}[L\mathbf{x}]_\mathcal{A},$$

az $\mathbf{L}_\mathcal{A}$ és $\mathbf{L}_\mathcal{B}$ mátrixok pedig a következőket:

$$\mathbf{L}_\mathcal{A}[\mathbf{x}]_\mathcal{A} = [L\mathbf{x}]_\mathcal{A}, \quad \mathbf{L}_\mathcal{B}[\mathbf{x}]_\mathcal{B} = [L\mathbf{x}]_\mathcal{B}.$$

Ezeket összevetve kapjuk, hogy

$$\mathbf{L}_\mathcal{B}[\mathbf{x}]_\mathcal{B} = [L\mathbf{x}]_\mathcal{B} = \mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}[L\mathbf{x}]_\mathcal{A} = \mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathbf{L}_\mathcal{A}[\mathbf{x}]_\mathcal{A},$$

azaz

$$\mathbf{L}_\mathcal{B}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}[\mathbf{x}]_\mathcal{A} = \mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathbf{L}_\mathcal{A}[\mathbf{x}]_\mathcal{A}$$

vagyis csak mátrixokra fölírva:

$$\mathbf{L}_\mathcal{B}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} = \mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathbf{L}_\mathcal{A} \text{ vagy átrendezve } \mathbf{L}_\mathcal{A} = \mathbf{C}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathbf{L}_\mathcal{B}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}.$$

A bizonyítás – és általában e mátrixok közti összefüggés – egy diagrammon is szemléltethető. A diagramm csúcsaiban az $\mathbf{x}$ és az $L\mathbf{x}$ vektorok szerepelnek. A függőleges nyilak az $\mathcal{A}$ bázisról a $\mathcal{B}$-re való áttérés irányát mutatják. Ebbe az irányba lépve az eredmény a $\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ mátrixszal való szorzással kapható meg. A vízszintes nyilak az L leképezés hatását mutatják. Ezirányba lépve az $\mathbf{L}_\mathcal{A}$, illetve $\mathbf{L}_\mathcal{B}$ mátrixszal való szorzás adja meg az eredményt. A bal alsó sarokban lévő $[\mathbf{x}]_\mathcal{A}$ vektorból a jobb felsőben lévő $[L\mathbf{x}]_\mathcal{B}$ vektorba kétféleképp juthatunk: vagy először hat az L leképezés, aztán áttérünk a $\mathcal{B}$ bázisra, vagy előbb áttérünk a $\mathcal{B}$ bázisra, és azután hat L. Tehát

$$\begin{aligned}
[\mathbf{x}]_\mathcal{A} &\longrightarrow \mathbf{L}_\mathcal{A}[\mathbf{x}]_\mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathbf{L}_\mathcal{A}[\mathbf{x}]_\mathcal{A},\\
[\mathbf{x}]_\mathcal{A} &\longrightarrow \mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}[\mathbf{x}]_\mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{L}_\mathcal{B}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}[\mathbf{x}]_\mathcal{A}.
\end{aligned}$$

A két végeredménynek meg kell egyeznie. Így ugyanazt kaptuk, amit behelyettesítésekkel. Összefoglalva tehát bizonyítottuk az alábbi tételt:

7.12. TÉTEL (LINEÁRIS LEKÉPEZÉS MÁTRIXAI KÖZTI KAPCSOLAT). *Legyen az L lineáris leképezés mátrixa az $\mathcal{A}$ bázisban $\mathbf{L}_\mathcal{A}$, a $\mathcal{B}$ bázisban $\mathbf{L}_\mathcal{B}$, és az $\mathcal{A}$ bázisról a $\mathcal{B}$-re való áttérés mátrixa $\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$. Ekkor*

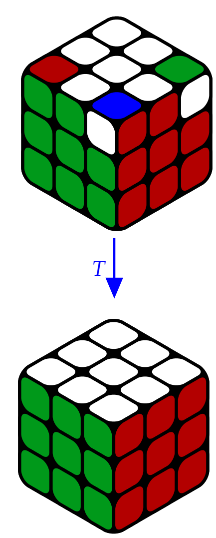
$$\mathbf{L}_\mathcal{A} = \mathbf{C}_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{L}_\mathcal{B}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}, \text{ azaz } \mathbf{L}_\mathcal{A} = \mathbf{C}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathbf{L}_\mathcal{B}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}.$$

$$\begin{tikzcd}
{[\mathbf{x}]_\mathcal{B}} \arrow[r, "\mathbf{L}_\mathcal{B}"] & {[L\mathbf{x}]_\mathcal{B}} \\
{[\mathbf{x}]_\mathcal{A}} \arrow[u, "\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"] \arrow[r, "\mathbf{L}_\mathcal{A}"'] & {[L\mathbf{x}]_\mathcal{A}} \arrow[u, "\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"']
\end{tikzcd}$$

7.10. ábra: A vízszintes nyilak az L leképezés hatását mutatják. E hatás elérhető az $\mathbf{L}_\mathcal{A}$, illetve az $\mathbf{L}_\mathcal{B}$ mátrixszal való szorzással. A függőleges nyilak a báziscsere irányát mutatják. A $\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ mátrixszal való szorzással megvalósítható. Az ábráról leolvasható a $\mathbf{L}_\mathcal{B}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} = \mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathbf{L}_\mathcal{A}$ összefüggés.

$$\begin{tikzcd}
{[\mathbf{x}]_\mathcal{B}} \arrow[r, "\mathbf{L}_\mathcal{B}"] & {[L\mathbf{x}]_\mathcal{B}} \arrow[d, "\mathbf{C}_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{C}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"'] \\
{[\mathbf{x}]_\mathcal{A}} \arrow[u, "\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"] \arrow[r, "\mathbf{L}_\mathcal{A}"'] & {[L\mathbf{x}]_\mathcal{A}}
\end{tikzcd}$$

7.11. ábra: Ezt az ábrát az előzőből egyetlen nyil és felirata megváltoztatásával kaptuk. Erről közvetlenül leolvasható az $\mathbf{L}_\mathcal{A} = \mathbf{C}_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{L}_\mathcal{B}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$, illetve az $\mathbf{L}_\mathcal{A} = \mathbf{C}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathbf{L}_\mathcal{B}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ összefüggés. Ehhez az $[\mathbf{x}]_\mathcal{A}$-ból az $[L\mathbf{x}]_\mathcal{A}$-ba vezető két utat kell bejárnunk, és közben a megfelelő mátrixokat összeszoroznunk.



7.12. ábra: A T transzformáció a bűvös kocka egy lapon lévő 3 csúcsát ciklikusan fölcseréli egymással (a jobb felsőt sarokban lévőt a bal sarokba, azt a középsőbe viszi), az összes többit helyben hagyja. Mit tegyünk ha 3 nem egy lapon lévő csúcsot kell ciklikusan fölcserélni?

7.13. PÉLDA (LINEÁRIS LEKÉPEZÉS MÁTRIXA MÁSIK BÁZISBAN). *Az L lineáris leképezés mátrixa $\mathbf{L} = \left[\begin{smallmatrix}-1 & 6\\ -2 & 6\end{smallmatrix}\right]$. Írjuk fel mátrixát az $\mathcal{B} = \{(-2,-1),(3,2)\}$ bázisban!*

MEGOLDÁS. A megadott $\mathcal{B}$ bázisról a standard $\mathcal{E}$ bázisra való áttérés mátrixa a bázisvektorokból, mint oszlopvektorokból áll, azaz

$$\mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}.$$

Ekkor az $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\mathcal{E}}$ jelölést használva

$$\mathbf{L}_{\mathcal{B}} = \mathbf{C}^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{L}_{\mathcal{E}}\mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1 & 6\\ -2 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}.$$ □

Hasonlóság Tudjuk, hogy ha egy L lineáris transzformációnak egy $\mathcal{A}$ bázisban $\mathbf{A}$ a mátrixa, egy $\mathcal{B}$ bázisban $\mathbf{B}$, akkor a két mátrix kapcsolata

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathbf{A}\mathbf{C}_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}},$$

ahol $\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} = \mathbf{C}^{-1}_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}$ az áttérés mátrixa. E tény motiválja a következő definíciót:

7.14. DEFINÍCIÓ (HASONLÓSÁG). *Azt mondjuk, hogy az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix* hasonló *a $\mathbf{B}$ mátrixhoz, ha létezik olyan invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy*

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}. \tag{7.3}$$

Jelölés: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

► Ha $\mathbf{A}$ hasonló $\mathbf{B}$-hez, akkor $\mathbf{B}$ is hasonló $\mathbf{A}$-hoz. Legyen ugyanis $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^{-1}$. Akkor

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1} = (\mathbf{C}^{-1})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1} = \hat{\mathbf{C}}^{-1}\mathbf{B}\hat{\mathbf{C}}.$$

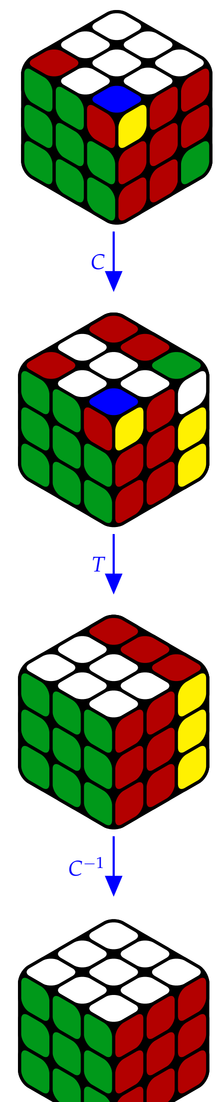
Így tehát mondható az, hogy $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ hasonlóak, mivel a hasonlóság szimmetrikus reláció.

► Például $\left[\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right] \sim \left[\begin{smallmatrix}-6 & 4\\ -9 & 6\end{smallmatrix}\right]$, ugyanis

$$\begin{bmatrix}-6 & 4\\ -9 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & -1\\ -3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix}, \qquad \left(\mathbf{C} = \begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix}\right).$$

► A $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ összefüggés ekvivalens az $\mathbf{C}\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{C}$ összefüggéssel, amit még egyszerűbb lehet ellenőrizni. Példánk esetében

$$\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6 & 4\\ -9 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix} \quad \left(= \begin{bmatrix}3 & -2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right).$$



7.13. ábra: A fölső kockán látható három csúcskockát kell kicserélni. Először a három csúcsot egy síkba mozgatjuk (C transzformáció), majd az előző ábrán látható T transzformációval kicseréljük őket, végül C inverzének alkalmazása után minden kocka a helyére kerül. Így a transzformációk egymás utáni elvégzését szorzásnak tekintve a megoldást a CTC^{-1} transzformáció adja.

► A $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ alakú kifejezést az $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{C}$-vel való *konjugáltjának* nevezik. A konjugált más algebrai struktúrákban is fontos szerepet kap. Példaként véges halmazok permutációinak struktúráját említjük. Ekkor a permutációk közti művelet a permutációk egymás után való elvégzése, aminek eredményeként megintcsak a halmaz egy permutációját kapjuk. Konkrétan a Rubik kockán mutatjuk meg a konjugált szerepét a 7.12 és a 7.13 ábrák segítségével.

7.15. TÉTEL (HASONLÓ MÁTRIXOK HATÁSA). *Két mátrix pontosan akkor hasonló, ha van két olyan bázis, melyekben e két mátrix ugyanannak a lineáris leképezésnek a mátrixa.*

BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ hasonlóak, azaz $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$, akkor $\mathbf{C}$-t, mint a $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\}$ bázisról az $\mathcal{E}$ standard bázisra való áttérés mátrixát tekintve azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}.$$

Eszerint ha L az $\mathbf{A}$ mátrixhoz tartozó mátrixleképezés, azaz $\mathbf{A}$ az L mátrixa a standard bázisban, akkor $\mathbf{B}$ az L mátrixa a $\mathcal{C}$ bázisban. A fordított állítást a bevezetőben igazoltuk. □

7.16. TÉTEL (HASONLÓSÁGRA INVARIÁNS TULAJDONSÁGOK). *Ha* $\mathbf{A}$ *és* $\mathbf{B}$ *hasonló mátrixok, azaz* $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, *akkor*

a) $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{B})$,

b) $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = \dim(\mathcal{N}(\mathbf{B}))$,

c) $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$,

d) $\operatorname{trace}(\mathbf{A}) = \operatorname{trace}(\mathbf{B})$.

A latin eredetű *invariáns* szó jelentése: *átalakulás közben változatlanul maradó.* Matematikában valamilyen művelet, átalakítás, leképezés során változatlanul maradó kifejezés, mennyiség, érték. Esetünkben a bázis megváltoztatása után is változatlanul maradó mennyiségeket jelenti.

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás során föltesszük, hogy valamely invertálható $\mathbf{C}$ mátrixszal $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}$.

a) Mivel mátrix rangja megegyezik az oszloptér dimenziójával, az oszloptér pedig megegyezik a mátrixleképezés képterével, ami a két mátrixra azonos, ezért a rangok is megegyeznek.

b) Hasonlóan bizonyítható az is, hogy a két mátrix nullterének dimenziója megegyezik, hisz a nulltér megegyezik a lineáris leképezés magterével, ami pedig közös.

c) $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}^{-1})\det(\mathbf{B})\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{B})$, mivel $\det(\mathbf{C})\det(\mathbf{C}^{-1}) = 1$.

d) Bizonyítása (ld. **??** feladat) egyszerűbb lesz a sajátértékek használatával. □

► Egy fontos következménye e tételnek, hogy a rang fogalma természetes módon átvihető véges dimenziós terek közötti lineáris leképezésekre. A lineáris $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés *rangján* képterének dimenzióját értjük, azaz $\mathrm{r}(L) = \dim(\mathrm{Im}(L))$.

Feladatok

Mátrixleképezések

Döntsük el, hogy az alábbi leképezések mátrixleképezések-e! Amelyik igen, annak írjuk fel a mátrixát! Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ egy tetszőleges vektor.

7.1. $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$,

7.2. $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} + \mathbf{x}$,

7.3. $A : \mathbf{x} \mapsto \frac{1}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{x})$,

7.4. $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})$.

7.5. MÁTRIXLEKÉPEZÉSEK KÖZTI MŰVELETEK Bizonyítsuk be a 7.2. tétel állításait!

7.6. INVERZ MÁTRIXLEKÉPEZÉSEK Bizonyítsuk be a 7.3. tételt!

Lineáris leképezések

7.7. LINEÁRIS LEKÉPEZÉS EKVIVALENS DEFINÍCIÓI Igazoljuk a 7.8. tétel állításainak ekvivalenciáját!

Döntsük el, hogy az alábbi leképezések lineáris leképezések-e!

7.8. $A : (x, y) \mapsto (x + 2y, x - y)$.

7.9. Legyen $\mathcal{P}_3$ a legföljebb 3-adfokú polinomok halmaza, és legyen $D : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3 : p(x) \mapsto p'(x)$.

7.10. Legyen $\mathcal{D}_{[0,1]}$ a $[0, 1]$ intervallumon differenciálható függvények halmaza, és $\mathcal{F}_{[0,1]}$ a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett függvények halmaza. Legyen továbbá $A : \mathcal{D}_{[0,1]} \to \mathcal{F}_{[0,1]}; f(x) \mapsto xf'(x)$.

Lineáris leképezés mátrixa

Hasonló mátrixok

7.11. Mutassuk meg, hogy a nyom invariáns a mátrixok hasonlóságára nézve!

*Alkalmazás: differenciálhatóság**

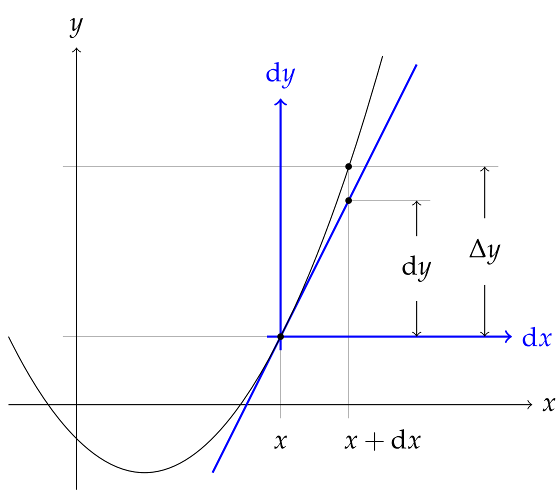
A lineáris leképezés fogalma az alkalmazott matematika sok területén bukkan föl, aminek az az egyik oka, hogy tetszőleges vektor-vektor függvény differenciálhatósága azt jelenti, hogy létezik a függvény megváltozását „jól közelítő” lineáris leképezés.

Vektor-vektor függvények differenciálhatósága Az $\mathbb{R}^n$-ből $\mathbb{R}^m$-be képző lineáris leképezések egy igen fontos alkalmazása a vektor-vektor függvények differenciálhatóságának fogalma.

A differenciálhatóság szokásos definíciója a következő: azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *differenciálható* az x helyen, ha létezik és véges a

$$D = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

határérték. A D számnak fontos jelentése van: az f függvény x körüli megváltozása jól közelíthető a $\mathrm{d}x \mapsto D\,\mathrm{d}x$ függvény 0 körüli megváltozásával. Szemléltetve ez azt jelenti, hogy ha az f grafikonján az $(x, f(x))$ pontra helyezünk egy $\mathrm{d}x$ és $\mathrm{d}y$ változójú koordinátarendszert, akkor a $\mathrm{d}x \mapsto \mathrm{d}y = D\,\mathrm{d}x$ grafikonja az f függvény grafikonjának érintője (ld. a 7.14 ábrát). Eszerint, kicsit leegyszerűsítve a megfogalmazást, a differenciálhatóság azt jelenti, hogy a függvény „jól közelíthető” egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezéssel, hisz a $\mathrm{d}x \mapsto D\,\mathrm{d}x$ leképezés ilyen.



7.14. ábra: A $\mathrm{d}x$ és $\mathrm{d}y$ koordinátatengelyeket és a $\mathrm{d}y = D\,\mathrm{d}x$ függvény grafikonját színezéssel kiemeltük. Az ábra egyúttal a $\Delta y \approx \mathrm{d}y$ kapcsolatot is szemlélteti.

A „jól közelítés” szemléletesen azt jelenti, hogy az f grafikonjára „zoomolva”, azaz azt folyamatosan nagyítva, a grafikon kiegyenesedni látszik. Ez az az egyenes, melyet a grafikon érintőjének nevezünk, és amelynek $\mathrm{d}y = D\,\mathrm{d}x$ az egyenlete az új koordinátarendszerben.

Ez a definíció ekvivalens módon átfogalmazható: azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *differenciálható* az x helyen, ha van olyan D szám, hogy

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Dh}{h} = 0.$$

Ez utóbbi alak azzal az előnnyel is jár, hogy könnyen általánosítható. Az általánosítás legfőbb nehézsége az, hogy a vektorral való osztás nem definiálható megfelelően, ezért e formulán még egy apró, de még mindig ekvivalens változtatást teszünk: nem h-val, hanem annak abszolút értékével osztunk:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Dh}{|h|} = 0.$$

Mindezek a következő definícióhoz vezetnek:

7.17. DEFINÍCIÓ (DIFFERENCIÁLHATÓSÁG). *Azt mondjuk, hogy az* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *függvény differenciálható az* $\mathbf{x}$ *helyen, ha létezik olyan* $D_{\mathbf{f},\mathbf{x}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *lineáris leképezés, melyre*

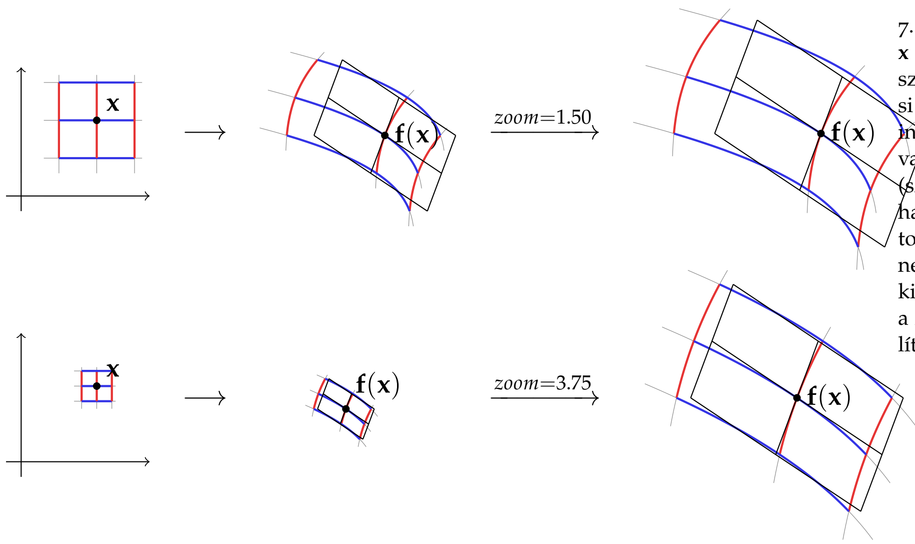
$$\lim_{\mathbf{h}\to \mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|} = \mathbf{0}.$$

A $D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}$ *leképezést az* $\mathbf{f}$ *függvény* $\mathbf{x}$ *ponthoz tartozó* deriváltleképezésének *nevezzük.*

- A $D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}$ jelölés arra utal, hogy a deriváltleképezés az $\mathbf{f}$ függvénytől és az $\mathbf{x}$ helytől is függ, maga viszont mint leképezés egy $\mathbf{h}$ vektorhoz a $D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}\mathbf{h}$ vektort rendeli.

- Elterjedtebb a $D_{\mathbf{x}}(\mathbf{f})$ jelölés, itt didaktikai okból választottunk olyat, mely jobban világossá teszi, hogy ez egy lineáris leképezés, mely majd hat valamely $\mathbf{h}$ vektoron, és annak képe $D_{\mathbf{x}}(\mathbf{f})\mathbf{h}$ vagy $D_{\mathbf{x}}(\mathbf{f})(\mathbf{h})$ – az általunk használt jelölésben $D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}\mathbf{h}$.

- Egy $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvényen könnyen szemléltethető a derivált jelentése. Tekintsük az értelmezési tartomány egy négyzetrácsát, annak középpontja legyen $\mathbf{x}$. Tekintsük e rács képét az $\mathbf{f}$ függvény által, és a $D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}$ deriváltleképezés hatását e rácson, ha az origót $\mathbf{x}$-be tesszük. A rács méretét folyamatosan csökkentve, a képeket pedig arányosan fölnagyítva azt látjuk, hogy a két kép egyre jobban „összesimul” (ld. 7.15 ábra). Ez emlékeztet arra – bár nem tökéletesen analóg vele –, ahogy az egyváltozós függvény grafikonjának egy pontjára „zoomolva” a grafikon az érintőhöz közelít, rásimul.



7.15. ábra: Egy $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvény egy $\mathbf{x}$ pontban való differenciálhatóságának szemléltetésére tekintsük az értelmezési tartomány egyre sűrűbb négyzetrácsainak az $\mathbf{x}$ pontot körülvevő négyzeteit, valamint ezek $\mathbf{f}$ függvény általi képét (színes rács), és a $\mathbf{D}_{\mathbf{f},\mathbf{x}}$ deriváltleképezés hatását e rácson, ha az értelmezési tartományának origóját $\mathbf{x}$-be, értékkészletének origóját $\mathbf{f}(\mathbf{x})$-be tesszük. Az egyre kisebb képeket fölnagyítva látható, hogy a függvény általi kép egyre jobban közelít a deriváltleképezés általi képhez.

Jacobi-mátrix A deriváltleképezés mátrixa könnyen megkapható a koordinátafüggvények parciális deriváltjai segítségével.

7.18. tétel (Jacobi-mátrix). *Ha az* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (f_1, f_2, \dots, f_m)$ *függvény differenciálható az* $\mathbf{x}$ *helyen, akkor a lineáris* $D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}$ *deriváltleképezés mátrixa a következő, ún.* Jacobi-mátrix*:*

$$\mathbf{D}_{\mathbf{f},\mathbf{x}} = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Bizonyítás. Ha $\mathbf{f}$ differenciálható, akkor a definícióbeli határérték akkor is fönnáll, ha $\mathbf{h}$ speciális módon tart a nullvektorhoz, például ha $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_j$, és $t \to 0$. Ekkor

$$\lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}(t\mathbf{e}_j)}{|t|} = \mathbf{0}.$$

Az $\mathbf{f}$ függvény i-edik koordinátafügvénye f_i, a $D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}(t\mathbf{e}_j)$ vektor i-edik koordinátája $\mathbf{e}_i^\mathsf{T} D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}(t\mathbf{e}_j)$. Ennek alapján

$$\lim_{t\to 0} \frac{f_i(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{x}) - \mathbf{e}_i^\mathsf{T} D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}(t\mathbf{e}_j)}{|t|} = 0.$$

Ez a határérték viszont már egy egyváltozós függvény deriváltja, ami nem más, mint az f_i függvény j-edik parciális deriváltja, ugyanis átrendezve az egyenlőséget és t előjelével is osztva kapjuk, hogy

$$\lim_{t\to 0} \frac{f_i(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{x})}{t} = \mathbf{e}_i^\mathsf{T} D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}\mathbf{e}_j, \text{ azaz } \mathbf{e}_i^\mathsf{T} D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}\mathbf{e}_j = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}).$$

Ez bizonyítja állításunkat. □

- A gyakorlatban az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvények, vagyis az n-változós skalárértékű függvények esetén az egyetlen sorból álló Jacobi-mátrix helyett annak vektoralakját használják, melyet *gradiensvektornak* neveznek, és ∇f-fel jelölnek.
- Hasonlóképp, mivel az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ függvények Jacobi-mátrixa egyetlen oszlopból áll, gyakran használják annak vektoralakját. Ha például egy $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3; t \mapsto \mathbf{r}(t)$ függvény a térben mozgó tárgy mozgását az idő függvényében írja le, e vektor épp a mozgás sebességvektora.

7.19. PÉLDA (JACOBI-MÁTRIX KISZÁMÍTÁSA). *Határozzuk meg az alábbi függvények egy általános ponthoz és a megadott ponthoz tartozó Jacobi-mátrixát!*

1. $f(x, y) = x^2y - xy^3 + 1$, $(x, y) = (0, 1)$.
2. $\mathbf{f}(x, y) = (-x^3/2 + y^3/8, x + y)$, $(x, y) = (1, 1)$.
3. $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2, t)$, $t = 2$.
4. $\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 3x_2, x_1 - x_2 - x_3)$, $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 0)$.

MEGOLDÁS. *a)* $f(x, y) = x^2y - xy^3$, parciális deriváltjai $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 2xy - y^3$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = x^2 - 3xy^2$. A deriváltleképezés mátrixa, azaz a Jacobi-mátrix itt

$$\begin{bmatrix} 2xy - y^3 & x^2 - 3xy^2 \end{bmatrix}$$

E mátrix vektor alakja, azaz a gradiensvektor

$$\nabla f(x, y) = (2xy - y^3, x^2 - 3xy^2).$$

Ennek értéke a $(0, 1)$ helyen $\nabla f(0, 1) = (-1, 0)$, illetve a Jacobi-mátrix e helyen $[-1\ 0]$.

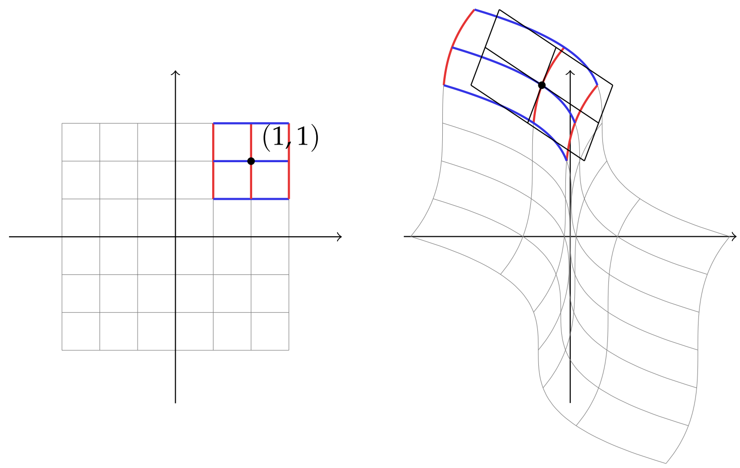
b) Az $\mathbf{f}(x, y) = (-x^3/2 + y^3/8, x + y)$ függvény Jacobi-mátrixa és annak értéke a megadott $(x, y) = (1, 1)$ pontban

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{2}x^2 & \frac{3}{8}y^2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ illetve } \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{8} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Például az első sor első eleme $\frac{\partial}{\partial x}(-x^3/2 + y^3/8) = -\frac{3}{2}x^2$. Az $\mathbf{f}$ függvény deriváltleképezésének, vagyis Jacobi-mátrixának hatását szemlélteti a 7.16 és a 7.15 ábra.

c) Az $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2, t)$ függvény Jacobi-mátrixa

$$\begin{bmatrix} 3t^2 \\ 2t \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ ami a } t = 2 \text{ helyen } \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



7.16. ábra: A bal ábra az $\mathbf{f}(x,y) = (-x^3/2 + y^3/8, x+y)$ függvény értelmezési tartományán megadott rácsot, és annak egy kis 2×2-es részét mutatja, melynek középpontja az $(1,1)$ pont. Az alsó ábra egyrészt halványan jelöli e rács és színesen a kiemelt rács képét, valamint az $(1,1)$ ponthoz tartozó deriváltleképezés hatását e kiemelt rácson.

A térben mozgó pont (test) mozgásának leírására is $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ függvényt használunk. Ha e függvény egy ilyen mozgást ír le, akkor sebességvektora egy tetszőleges pontban

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (3t^2, 2t, 1),$$

a $t = 2$ paraméterhez tartozó pontban $\dot{\mathbf{r}}(2) = (12, 4, 1)$.

d) Az utolsó példa fontos állítást szemléltet, nevezetesen azt, hogy egy lineáris leképezés deriváltja minden $\mathbf{x}$ helyen megegyezik magával a leképezéssel, azaz a deriváltja önmaga. Világos, hogy a megadott leképezés egy lineáris leképezés, melynek mátrixszorzatos alakja:

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Ennek Jacobi-mátrixa valóban bármely (x_1, x_2, x_3) helyen

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

ugyanis az i-edik koordinátafüggvény j-edik parciális deriváltja épp az együtthatómátrix i-edik sor-, j-edik oszlopbeli eleme, azaz egy konstans. Így minden helyen e mátrix lesz a Jacobi-mátrix, speciálisan az $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 0)$ helyen is. □

7.20. PÉLDA (FÜGGVÉNYÉRTÉK BECSLÉSE JACOBI-MÁTRIXSZAL). *Ismerjük egy differenciálható függvény értelmezési tartományának egy pontjához tartozó Jacobi-mátrixát és a függvényértéket ugyan ebben a pontban. Becsüljük meg a függvény értékét egy e ponthoz közeli helyen az alábbi adatok ismeretében!*

1. $f(0,1) = 1$, $\mathbf{D}_{f,(0,1)} = [-1 \;\; 0]$, $(x,y) = (-0.05, 1.1)$,

2. $\mathbf{f}(1,1) = (-\frac{3}{8}, 2)$, $\mathbf{D}_{\mathbf{f},(1,1)} = \left[\begin{smallmatrix} -3/2 & 3/8 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, $(x,y) = (0.8, 1.1)$.

Mennyire lennének jók e becslések, ha a függvények az előző feladatbeli a) és b) függvényei lennének?

Megoldás. A függvény megváltozásának becsléséhez az $\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})$ értéket kell megbecsülni. A differenciálhatóság definíciója szerint erre a $\mathbf{D}_{\mathbf{f},\mathbf{x}}\mathbf{h}$ mennyiség alkalmas, ha a függvény differenciálható az $\mathbf{x}$ pontban. Eszerint tehát

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{D}_{\mathbf{f},\mathbf{x}}\mathbf{h}.$$

E képletet felhasználva az alábbi megoldásokra jutunk:

a) E feladatban $\mathbf{h} = (-0.05, 0.1)$, így a függvény megváltozása a

$$\mathbf{D}_{f,(0,1)}\mathbf{h} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.05 \\ 0.1 \end{bmatrix} = 0.05$$

értékkel becsülhető, tehát a függvény értéke

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f(-0.05, 1.1) \approx f(0,1) + \mathbf{D}_{f,(0,1)} \begin{bmatrix} -0.05 \\ 0.1 \end{bmatrix} = 1.05,$$

azaz $f(-0.05, 1.1) \approx 1.05$. Ha f az előző *a)* feladatbeli függvény, azaz $f(x,y) = x^2y - xy^3 + 1$, akkor a pontos érték $f(-0.05, 0.1) = 1.0693$.

b) Itt $\mathbf{h} = (-0.2, 0.1)$, így a függvény megváltozása a

$$\mathbf{D}_{\mathbf{f},(1,1)}\mathbf{h} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{8} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{10} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} + \frac{1}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3375 \\ -0.1 \end{bmatrix}$$

értékkel becsülhető, tehát a függvény értéke $\mathbf{f}(0.8, 1.1) \approx \mathbf{f}(1,1) + (0.3375, -0.1) = (-0.0375, 1.9)$. Ha $\mathbf{f}$ az előző *b)* feladatbeli függvény, azaz $\mathbf{f}(x,y) = (-x^3/2 + y^3/8, x+y)$, akkor a pontos érték $f(0.8, 1.1) = (-0.089625, 1.9)$. □

Jacobi-determináns és az integrál transzformációja A 2- és 3-dimenziós tér leírására leggyakrabban használt koordinátarendszerek közötti váltás a többváltozós integrálok kiszámításában fontos szerepet kap. Az a kérdés, hogy az integrálközelítő összegben szereplő „téglányoknak" mennyi a mértékük. E szakasz kalkulus-előismereteket igényel.

Felidézzük a síkbeli polárkoordináta-rendszernek, a térbeli henger- és gömbi koordinátarendszereknek a derékszögű koordinátarendszerrel való kapcsolatát:

(a) Polár	*(b)* Henger	*(c)* Gömbi
$x = r\cos\vartheta$	$x = r\cos\vartheta$	$x = \rho\sin\varphi\cos\vartheta$
$y = r\sin\vartheta$	$y = r\sin\vartheta$	$y = \rho\sin\varphi\sin\vartheta$
	$z = m$	$z = \rho\cos\varphi$

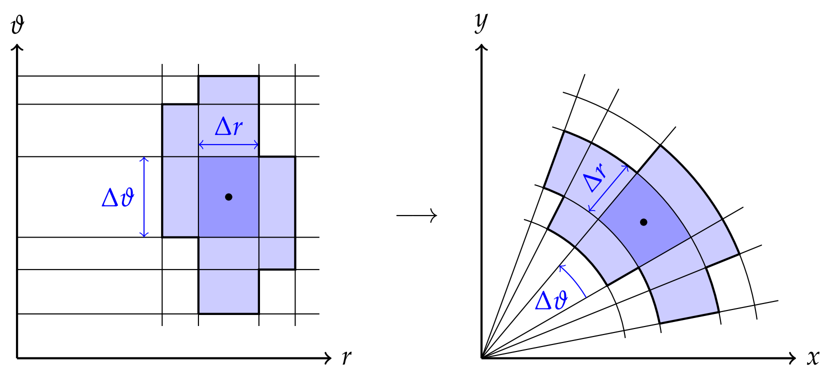
A felsorolt változók jelentése: r az xy-síkban az origótól való távolság, ρ a térben az origótól való távolság, ϑ az x-tengely pozitív felével bezárt szög az xy-síkban, φ a z-tengely pozitív felével bezárt szög.

Jacobi-determinánsnak nevezzük egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény deriváltleképezésének determinánsát.

A síkbeli polárkoordináta-rendszerről a derékszögűre való áttérés egy $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (r, \vartheta) \mapsto (x, y)$ függvény, melyet a fönti *(a)*-beli képletek definiálnak. Ennek deriváltleképezése, pontosabban a leképezés $\mathbf{D}$ mátrixa (szokás Jacobi-mátrixnak is hívni), és annak determinánsa, a Jacobi-determináns:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta \end{bmatrix} \qquad |\mathbf{D}| = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta \end{vmatrix} = r.$$

Az, hogy a Jacobi-determináns értéke r, azt jelenti, hogy egy „kicsiny” $\Delta r \times \Delta\vartheta$ méretű téglány – melynek területe $\Delta r \Delta\vartheta$ – a transzformáció után, azaz a polárkoordináta-rendszerben „nagyjából” r-szerese lesz az eredetinek, azaz $r\Delta r\Delta\vartheta$, ahol r a téglány egy pontjának origótól való távolsága. Ezt a leképezést a 7.17 ábrával szemléltetjük.



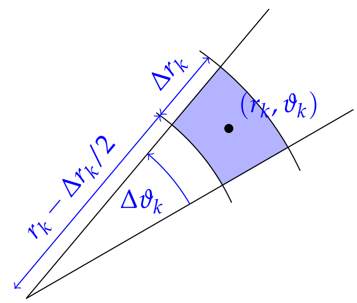
7.17. ábra: A síkbeli polárkoordináta-rendszerre való áttérést megadó leképezés szemléltetése egy téglányokból álló tartomány képének ábrázolásával.

Az r-szereződés geometriailag is könnyen igazolható, ahogy azt a 7.18 ábra mutatja. Kiszámoljuk egy polár-rendszerbeli téglány területét. Ez két körcikk területének különbsége. A nagyobbik sugara $r_k + \Delta r_k/2$, a határoló ív hossza $(r_k + \Delta r_k/2)\Delta\vartheta_k$, így területe $\frac{1}{2}(r_k + \Delta r_k/2)^2\Delta\vartheta_k$. Hasonlóan kiszámolva a kisebbik körcikk területét, majd kivonva a nagyobbikéból kapjuk, hogy a téglány ΔA_k területe

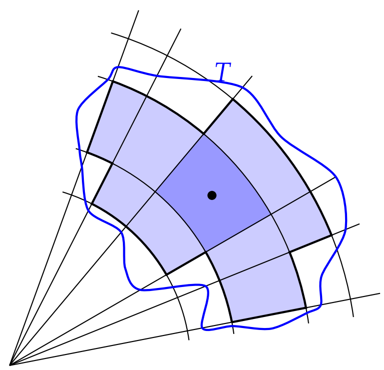
$$\Delta A_k = \frac{1}{2}\left(r_k + \frac{\Delta r_k}{2}\right)^2 \Delta\vartheta_k - \frac{1}{2}\left(r_k - \frac{\Delta r_k}{2}\right)^2 \Delta\vartheta_k = r_k \Delta r_k \Delta\vartheta_k.$$

Eszerint egy T tartományon értelmezett $f(r, \vartheta)$ függvény integrálközelítő összege és annak határértéke, amint a legnagyobb átmérőjű téglány átmérője tart 0-hoz (ld. 7.19 ábra):

$$\sum_k f(r_k, \vartheta_k)\Delta A_k = \sum_k f(r_k, \vartheta_k) r_k \Delta r_k \Delta\vartheta_k \to \int_T f(r, \vartheta) r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\vartheta.$$



7.18. ábra: A síkbeli polárkoordináta-rendszer téglányának területe $r_k \Delta r_k \Delta\vartheta_k$.



7.19. ábra: Egy T tartományba eső téglányok, és a k-adik téglány kiemelve.

A két térbeli koordinátarendszerre való áttérés hasonló módon való megértését és a leképezések elképzelését már az Olvasóra hagyjuk, de a leképezések deriváltjának determinánsát még fölírjuk. A hengerkoordináták esetén az $(r, \vartheta, m) \mapsto (x, y, z)$ leképezésre ez

$$|\mathbf{D}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial m} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial m} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

A gömbi koordinátarendszer esetén a leképezés $(\rho, \varphi, \vartheta) \mapsto (x, y, z)$, amelynek Jacobi-determinánsa:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\vartheta & \rho\cos\varphi\cos\vartheta & -\rho\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & \rho\cos\varphi\sin\vartheta & \rho\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\varphi.$$

Így tehát az integrál kiszámításának képletei e három koordinátarendszerre:

$$\begin{aligned} &\text{Polár:} & \iint_T f(r,\vartheta)\,\mathrm{d}A &= \iint_T f(r,\vartheta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta \\ &\text{Henger:} & \iiint_T f(r,\vartheta,m)\,\mathrm{d}V &= \iiint_T f(r,\vartheta,m)\,r\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta \\ &\text{Gömbi:} & \iiint_T f(\rho,\varphi,\vartheta)\,\mathrm{d}V &= \iiint_T f(\rho,\varphi,\vartheta)\,\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta. \end{aligned}$$

Függvények kompozíciójának deriváltja E paragrafusnak nem célja a függvényanalízis területére tartozó témák feldolgozása, de a többváltozós függvények kompozíciójának deriváltleképezése az egyváltozós függvények láncszabályához hasonló módon számolható, és erre érdemes egy pillantást vetnünk, mert a megoldást a deriváltleképezések kompozíciója, azaz a Jacobi-mátrixok szorzata adja.

Bizonyítás nélkül közöljük a következő tételt.

7.21. TÉTEL (LÁNCSZABÁLY). *Legyen $\mathbf{f}: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ két függvény. Ha $\mathbf{g}$ differenciálható az $\mathbf{x}$ helyen, és $\mathbf{f}$ a $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ helyen, akkor $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ differenciálható az $\mathbf{x}$ helyen, és deriváltleképezése, illetve annak mátrixa:*

$$D_{\mathbf{f}\circ\mathbf{g},\mathbf{x}} = D_{\mathbf{f},\mathbf{g}(\mathbf{x})} \circ D_{\mathbf{g},\mathbf{x}}, \quad \textit{illetve} \quad \mathbf{D}_{\mathbf{f}\circ\mathbf{g},\mathbf{x}} = \mathbf{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}(\mathbf{x})}\mathbf{D}_{\mathbf{g},\mathbf{x}}.$$

7.22. PÉLDA (LÁNCSZABÁLY). *Írjuk fel a láncszabály általános képleteit a megadott függvénytípusokra, az összetett függvény deriváltját pedig a láncszabállyal és behelyettesítéssel is számítsuk ki!*

1. $f: (x, y) \mapsto x^2 - y$, $\mathbf{g}: u \mapsto (u^2 + u, u - 1)$, $u = 1$.
2. $\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2; x \mapsto (x^2, x - 1)$, $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (u, v) \mapsto x = u^2 v$, $(u, v) = (1, 2)$.
3. $\mathbf{f}(x, y) = (xy^2 - 1, x - y)$, $\mathbf{g}(u, v) = (u + 1, u - v)$, $(u, v) = (0, 1)$.

MEGOLDÁS. Az *a)* esetben az f-hez, illetve $\mathbf{g}$-hez tartozó láncszabály általános alakja

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}u} \\ \frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}u} \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}u},$$

a függvények parciális deriváltjait kiszámolva és a helyet megadva

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}(1) = \begin{bmatrix} 2x & -1 \end{bmatrix}_{\mathbf{g}(1)=(2,0)} \begin{bmatrix} 2u+1 \\ 1 \end{bmatrix}_{u=1},$$

végül a behelyettesítést is elvégezve:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 11.$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a deriválás előtt elvégezzük a helyettesítést: $(f \circ \mathbf{g})(u) = (u^2 + u)^2 - (u - 1) = u^4 + 2u^3 + u^2 - u + 1$, ennek u szerinti deriváltja $4u^3 + 6u^2 + 2u - 1$, és ennek értéke az $u = 1$ helyen 11.

A *b)* esetben $\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, így $\mathbf{f}\circ g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, és

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x}\\ \dfrac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x}\dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x}\dfrac{\partial g}{\partial v}\\ \dfrac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x}\dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x}\dfrac{\partial g}{\partial v}\end{bmatrix}$$

A megadott függvényekre és a helyettesítendő értékeket is megadva:

$$\begin{bmatrix}2x\\1\end{bmatrix}_{x=g(1,2)=2}\begin{bmatrix}2uv & u^2\end{bmatrix}_{u=1,v=2} = \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}16 & 4\\ 4 & 1\end{bmatrix}.$$

Behelyettesítés után a függvény $(u,v)\mapsto(u^4v^2, u^2v-1)$, aminek deriváltja az $(u,v)=(1,2)$ helyen

$$\begin{bmatrix}4u^3v^2 & 2u^4v\\ 2uv & u^2\end{bmatrix}_{(1,2)} = \begin{bmatrix}16 & 4\\ 4 & 1\end{bmatrix},$$

ami természetesen megegyezik az előző eredménnyel.

Végül a *c)* esetben az általános alak

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v}\end{bmatrix}.$$

A parciális deriváltakat kiszámolva és a helyettesítési értékeket is megadva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v}\\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v}\end{bmatrix}_{(0,1)} &= \begin{bmatrix}y^2 & 2xy\\ 1 & -1\end{bmatrix}_{(1,-1)}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}_{(0,1)}\\ &= \begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Itt fölhasználtuk, hogy $\mathbf{g}(0,1)=(1,-1)$. Ha a deriválás előtt elvégezzük a függvények kompozícióját, akkor ugyanerre az eredményre jutunk, ugyanis

$$(\mathbf{f}(\mathbf{g}(u,v)) = \Big((u+1)(u-v)^2-1, v+1)\Big),$$

aminek a deriváltmátrixa

$$\begin{bmatrix}(u-v)^2+2(u+1)(u-v) & -2(u+1)(u-v)\\ 0 & 1\end{bmatrix}_{(0,1)} = \begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}. \qquad \square$$

2- *és* 3-*dimenziós geometriai transzformációk mátrixa*

A 7.9. tétel bizonyításában megkonstruáltuk egy lineáris $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezéshez azt a mátrixot, mely ezt a leképezést generálja, nevezetesen bizonyítottuk, hogy minden $\mathbf{x}$ vektorra

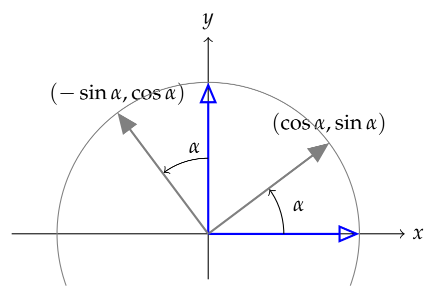
$$A\mathbf{x} = [A\mathbf{e}_1|A\mathbf{e}_2|\dots|A\mathbf{e}_n]\,\mathbf{x}.$$

Először vizsgáljunk meg néhány geometriailag leírható $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezést.

Forgatás Vizsgáljuk meg a síkbeli pont körüli és a térbeli egyenes körüli forgatások mátrixát!

7.23. ÁLLÍTÁS (A FORGATÁS MÁTRIXA). *A sík vektorait egy pont körül α szöggel elforgató leképezés mátrixa*

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$



7.20. ábra: Az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vektorok α szöggel való elforgatottjai

BIZONYÍTÁS. A 7.7. állítás szerint a forgatás lineáris leképezés, így van mátrixa, melynek alakja $[A\mathbf{i}\ A\mathbf{j}]$, ahol $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ jelöli az $\mathbb{R}^2$ standard bázisának elemeit. E vektorokat szemlélteti a 7.20 ábra.

Az $A\mathbf{i}$ vektor megegyezik $\mathbf{i}$ elforgatottjával, amelynek ismerjük koordinátáit: $A\mathbf{i} = \left[\begin{smallmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{smallmatrix}\right]$. A $\mathbf{j}$ vektor α szöggel való elforgatottja megegyezik az $A\mathbf{i}$ vektor $\pi/2$ szöggel való elforgatottjával, azaz $A\mathbf{j} = \left[\begin{smallmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{smallmatrix}\right]$. Így az A-hoz tartozó mátrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A\mathbf{i} & A\mathbf{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Tehát egy $\mathbf{x}$ vektor α szöggel való elforgatottja $\mathbf{Ax} = \left[\begin{smallmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{smallmatrix}\right]\mathbf{x}$. □

7.24. PÉLDA (FORGATÁS EGY TETSZŐLEGES PONT KÖRÜL). *Határozzuk meg a koordinátáit a* $(4,3)$ *pont* $(2,1)$ *körül* $\pi/3$ *radiánnal való elforgatásával kapott pontnak!*

MEGOLDÁS. A forgatás középpontját toljuk az origóba, így a $(4,3)$ pont a $(4,3) - (2,1) = (2,2)$ pontba kerül. E pontot, illetve az oda mutató helyvektort forgassuk el $\pi/3$ radiánnal, azaz $60°$-kal. Ez a forgatás mátrixával való beszorzással megkapható:

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

E pontot a $(2,1)$ vektorral eltoljuk, hogy ne az origó, hanem a $(2,1)$

pont körüli elforgatottat kapjuk meg:

$$\begin{bmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

□

7.25. PÉLDA (KOORDINÁTATENGELY KÖRÜLI FORGATÁS A TÉRBEN). *Írjuk fel a koordinátatengelyek körüli α szöggel való forgatás mátrixát.*

MEGOLDÁS. Tekintsük először a z-tengely körüli forgatást. Ekkor az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vektorok úgy transzformálódnak, mint a sík elforgatásánál, míg a $\mathbf{k}$ vektor helyben marad, tehát a bázisvektorok így transzformálódnak:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Így a z-tengely körüli forgatás mátrixa:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hasonlóképp kapjuk az x- és az y-tengely körüli forgatás mátrixát is:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Ez utóbbi mátrix előjelhibásnak tűnhet, de nem az, ha itt is a forgatás tengelyiránya felől nézve pozitív a forgásirány, azaz $\mathbf{k}$-t forgatjuk $\mathbf{i}$-be, és nem fordítva. □

7.26. TÉTEL (TENGELY KÖRÜLI FORGATÁS – RODRIGUES-FORMULA). *Ha $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ egységvektor, akkor az $\mathbf{e}$ körüli α szögű forgatás tetszőleges $\mathbf{x}$ vektort az*

$$\mathbf{x}\cos\alpha + (\mathbf{e}\times\mathbf{x})\sin\alpha + \mathbf{e}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{x})(1-\cos\alpha) \tag{7.4}$$

vektorba visz. E leképezés mátrixa

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{I} + \sin\alpha[\mathbf{e}]_\times + (1-\cos\alpha)[\mathbf{e}]_\times^2 \\ &= \mathbf{I} + \sin\alpha[\mathbf{e}]_\times + (1-\cos\alpha)(\mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T} - \mathbf{I}) \end{aligned} \tag{7.5}$$

BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{x}$ párhuzamos $\mathbf{e}$-vel, akkor elforgatottja önmaga, és valóban, ekkor $(\mathbf{e}\times\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ és $\mathbf{e}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, így a (7.4) képlet $\mathbf{x}$-et ad eredményül.

A továbbiakban legyen tehát $\mathbf{x}$ az $\mathbf{e}$-vel nem párhuzamos vektor. Jelölje $\mathbf{x}$-nek az $\mathbf{e}$-re eső merőleges vetületét $\mathbf{x_e}$, azaz legyen

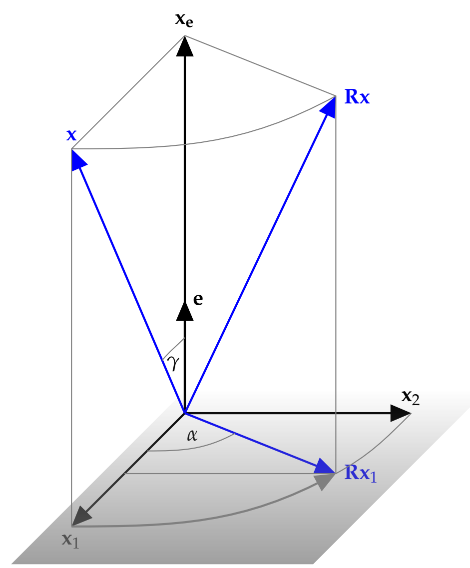
$$\mathbf{x_e} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x})\mathbf{e}.$$

Jelölje továbbá az $\mathbf{x}$ vektornak az $\mathbf{e}$-re merőleges síkra eső merőleges vetületét $\mathbf{x}_1$, azaz

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x})\mathbf{e}.$$

Végül legyen $\mathbf{x}_2 = \mathbf{e} \times \mathbf{x}$. Világos, hogy $\mathbf{x}_1 \perp \mathbf{x}_2$. E két vektor hossza:

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_1| &= |\mathbf{x}| \sin\gamma, \\ |\mathbf{x}_2| &= |\mathbf{e}||\mathbf{x}| \sin\gamma = |\mathbf{x}| \sin\gamma, \end{aligned}$$



tehát $|\mathbf{x}_1| = |\mathbf{x}_2|$. Ha R jelöli a forgató leképezést, akkor

$$\begin{aligned} R\mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_1 \cos\alpha + \mathbf{x}_2 \sin\alpha \\ &= (\mathbf{x} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x})\mathbf{e}) \cos\alpha + (\mathbf{e} \times \mathbf{x}) \sin\alpha. \end{aligned}$$

Mivel $R\mathbf{x_e} = \mathbf{x_e}$, és $\mathbf{x} = \mathbf{x_e} + \mathbf{x}_1$, ezért

$$\begin{aligned} R\mathbf{x} &= R\mathbf{x_e} + R\mathbf{x}_1 \\ &= (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x})\mathbf{e} + (\mathbf{x} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x})\mathbf{e}) \cos\alpha + (\mathbf{e} \times \mathbf{x}) \sin\alpha \\ &= \mathbf{x} \cos\alpha + (\mathbf{e} \times \mathbf{x}) \sin\alpha + \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x})(1 - \cos\alpha). \end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk a (7.4) formulát. A leképezés könnyen átírható mátrix-szorzat alakba:

$$\cos\alpha \mathbf{I}\mathbf{x} + [\mathbf{e}]_\times \mathbf{x} \sin\alpha + (1 - \cos\alpha)(\mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T})\mathbf{x},$$

így a forgatás $\mathbf{R}$ mátrixa

$$\mathbf{R} = \cos\alpha \mathbf{I} + \sin\alpha [\mathbf{e}]_\times + (1 - \cos\alpha)(\mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T}).$$

Egyszerű számolással igazolható, hogy $\mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T} - \mathbf{I} = [\mathbf{e}]_\times^2$ (ld. **??** feladat), amiből azonnal adódnak a (7.5) képletei. □

7.27. PÉLDA (FORGATÁS MÁTRIXA). *Írjuk fel annak a leképezésnek a mátrixát, mely az $(2, 0, 1)$ vektor egyenese körül α szöggel forgat, ahol $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. Határozzuk meg a $(3, 2, -1)$ vektor elforgatottját! Más eredményt kapnánk-e, ha a $(-2, 0, -1)$ vektor egyenese körül kéne forgatnunk α szöggel?*

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1)$ egységvektorral

$$[\mathbf{e}]_\times = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{e}]_\times^2 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Így rövid számolás után a forgatás mátrixa

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \mathbf{I} + \sin\alpha[\mathbf{e}]_\times + (1-\cos\alpha)[\mathbf{e}]_\times^2 \\
&= \begin{bmatrix} 14/15 & -1/3 & 2/15 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/15 & 2/3 & 11/15 \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 14 & -5 & 2 \\ 5 & 10 & -10 \\ 2 & 10 & 11 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

és $\mathbf{R}\cdot(3,2,-1) = (2,3,1)$.

A $(-2,0,-1)$ vektor körüli forgatással más eredményt kapnánk, hisz a forgatás iránya a vektor irányától is függ, és mivel az az ellenkezőjére változott, így a forgásirány is ellenkező irányú lesz. □

7.28. PÉLDA (A FORGATÁS MÁTRIXÁNAK INVERZE). *Határozzuk meg a síkot α szöggel elforgató mátrix inverzét!*

MEGOLDÁS. Először megállapítjuk, hogy a forgatás mátrixa invertálható, ugyanis determinánsa nem 0, hiszen $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Az egyik lehetséges megoldás, hogy egyszerűen a 2×2-es mátrixok 5.13. tételben leírt invertálási technikáját alkalmazva határozzuk meg az inverzet, mely szerint

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Egy másik megoldás arra épül, hogy a **??** állítás szerint két mátrix pontosan akkor inverze egymásnak, ha a hozzájuk tartozó lineáris leképezések is inverzei egymásnak. Az α szöggel való elforgatásnak, mint leképezésnek az inverze nyilvánvalóan a $-\alpha$ szöggel való elforgatás, tehát mátrixaik is egymás inverzei. Eszerint

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}. \quad \square$$

Merőleges vetítés A merőlegesség mind az elméleti matematika, mind az alkalmazások fontos fogalma.

7.29. ÁLLÍTÁS (EGYENESRE VALÓ MERŐLEGES VETÍTÉS MÁTRIXA). *A sík vagy a tér vektorait egy* $\mathbf{b}$ *irányvektorú egyenesre merőlegesen vetítő leképezés mátrixa*

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b}}\mathbf{b}\mathbf{b}^\mathsf{T}. \tag{7.6}$$

Speciálisan e mátrix alakja

$$\mathbf{P} = \mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T}, \tag{7.7}$$

ha az egyenes irányvektora az $\mathbf{e}$ *egységvektor.*

BIZONYÍTÁS. A 7.7. állítás szerint a merőleges vetítés lineáris leképezés, van tehát mátrixa. Az 1.24. tétel szerint ha $\mathbf{x}$ egy tetszőleges vektor és $\mathbf{e}$ egy egységvektor, akkor $\mathbf{x}$-nek a $\mathbf{e}$ egyenesére eső merőleges vetülete

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{e}} \mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}) \cdot \mathbf{e}.$$

Ennek mátrixszorzással való átírása:

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} = \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{e}(\mathbf{e}^\mathsf{T}\mathbf{x}) = (\mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T})\mathbf{x},$$

tehát

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{e}} \mathbf{x} = (\mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T})\mathbf{x}.$$

Ebből kiolvasható, hogy az $\mathbf{e}$ egységvektor-irányú egyenesre való merőleges vetítés mátrixa

$$\mathbf{P} = \mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T}.$$

Ha $\mathbf{b}$ egy tetszőleges zérustól különböző vektor, akkor az $\mathbf{e} = \mathbf{b}/|\mathbf{b}|$ jelölés mellett $\mathbf{P} = \mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T} = \mathbf{b}\mathbf{b}^\mathsf{T}/|\mathbf{b}|^2$, ami $|\mathbf{b}|^2 = \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b}$ behelyettesítésével bizonyítja a tételt. □

► A tételből következik, hogy a sík vektorait az x-tengellyel α szöget bezáró egyenesre merőlegesen vetítő lineáris leképezés mátrixa

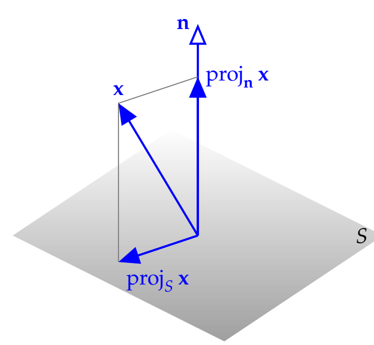
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}, \tag{7.8}$$

mivel ekkor $\mathbf{e} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.

7.30. ÁLLÍTÁS (SÍKRA VALÓ MERŐLEGES VETÍTÉS MÁTRIXA). *A tér vektorait az $\mathbf{n}$ normálvektorú síkra merőlegesen vetítő leképezés mátrixa*

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^\mathsf{T}.$$

BIZONYÍTÁS. Egy tetszőleges $\mathbf{x}$ vektornak a normálvektor egyenesére eső merőleges vetülete a 7.29. állítás szerint $\operatorname{proj}_{\mathbf{n}} \mathbf{x} = (\mathbf{n}\mathbf{n}^\mathsf{T})\mathbf{x}$. Az $\mathbf{n}$ normálvektorú S síkra eső merőleges vetületre $\operatorname{proj}_S \mathbf{x} = \mathbf{x} - \operatorname{proj}_{\mathbf{n}} \mathbf{x} = \mathbf{x} - (\mathbf{n}\mathbf{n}^\mathsf{T})\mathbf{x}$ (lásd a 7.21. ábrát). Ebből következik, hogy a síkra való merőleges vetítés mátrixa $\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^\mathsf{T}$.



7.21. ábra: Vektor vetülete egy síkra

7.31. PÉLDA (SÍKRA ESŐ MERŐLEGES VETÜLET KISZÁMÍTÁSA). *Határozzuk meg a $(-2, 1, 3)$ vektornak a $2x + y - 2z = 0$ egyenletű síkra eső merőleges vetületét! (ld. később a 7.40. példát)*

MEGOLDÁS. A sík egy normálvektora $(2, 1, -2)$, így az egységnyi hosszú normálvektor $\mathbf{n} = (2/3, 1/3, -2/3)$. A $\mathbf{P}$ vetítő mátrix

$$\mathbf{P} = \mathbf{I}_3 - \mathbf{n}\mathbf{n}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Így a $(-2, 1, 3)$ vektor merőleges vetülete

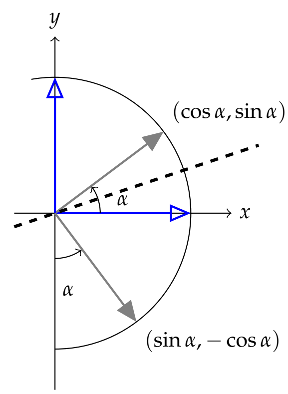
$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

□

Tükrözés Vizsgáljuk meg síkban az egyenesre való és térben a síkra való tükrözés mátrixát!

7.32. ÁLLÍTÁS (SÍKBELI TÜKRÖZÉS MÁTRIXA). *A sík vektorait az x-tengellyel $\alpha/2$ szöget bezáró egyenesre tükröző lineáris leképezés mátrixa*

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}.$$



7.22. ábra: Az **i** és **j** vektorok egy egyenesre való tükörképe

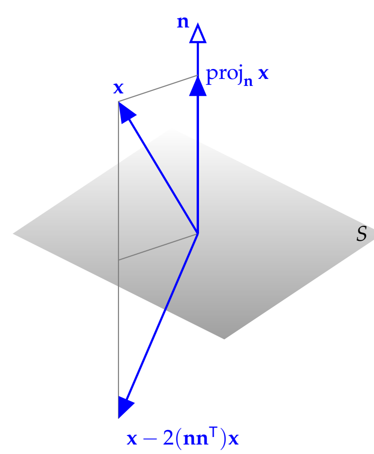
BIZONYÍTÁS. a 7.7. állítás szerint a tükrözés lineáris leképezés. A vektorok tükörképe csak a tükrözés tengelyének állásától függ, ami most $\alpha/2$. Helyvektorokban gondolkodva a tükrözés tengelyének át kell mennie az origón.

A mellékelt ábráról leolvasható, hogy $\mathbf{i}$ tükörképe $A\mathbf{i} = \left[\begin{smallmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{smallmatrix}\right]$, míg a $\mathbf{j}$ vektoré $A\mathbf{j} = \left[\begin{smallmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{smallmatrix}\right]$. Így a sík vektorait az első tengellyel $\alpha/2$ szöget bezáró egyenesre tükröző leképezés mátrixa $\left[\begin{smallmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{smallmatrix}\right]$. □

A térben egy síkra való tükrözés feladata a síkra való vetítéshez hasonlóan adódik:

7.33. ÁLLÍTÁS (SÍKRA VALÓ TÜKRÖZÉS MÁTRIXA). *Igazoljuk, hogy a tér vektorait az $\mathbf{n}$ normálvektorú síkra tükröző leképezés mátrixa*

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^\mathsf{T}.$$



7.23. ábra: Vektor tükörképe egy síkra

BIZONYÍTÁS. A 7.30. állításhoz hasonlóan minden leolvasható a mellékelt 7.23. ábráról: ha $\mathbf{x}$-ből kivonjuk a $\mathrm{proj}_\mathbf{n}\,\mathbf{x}$ vektort, akkor a síkra eső vetületet kapjuk, így ha a kétszeresét vonjuk ki, a tükörképhez jutunk. E leképezés mátrixa az $\mathbf{x} - 2(\mathbf{n}\mathbf{n}^\mathsf{T})\mathbf{x} = (\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^\mathsf{T})\mathbf{x}$ összefüggésből adódik.

Vetítés Tárgyaltuk a merőleges vetítést. Vetíteni azonban másként is lehet.

7.34. PÉLDA (VETÍTÉS SÍKRA). *Határozzuk meg annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, mely a tér összes pontját az $(1, -2, 1)$ vektorral párhuzamos irányban az $x + y + 2z = 0$ egyenletű síkra vetíti.*

MEGOLDÁS. Elemi geometriai eszközökkel könnyen látható, hogy e leképezés valóban lineáris. Világos, hogy a képtér az $x + y + 2z = 0$

egyenletű sík összes vektora lesz. E teret megkapjuk a sík egyenletéből, ha azt mint egyenletrendszert megoldjuk. A megoldás $(-s - 2t, s, t)$, azaz e tér egy bázisa a $(-1, 1, 0)$, és a $(-2, 0, 1)$ vektorokból áll. Könnyen látható az is, hogy a nulltérbe pontosan azok a vektorok tartoznak, amelyek párhuzamosak a vetítő vektorral, azaz az $(1, -2, 1)$ vektorral. A vetítés **P** mátrixa tehát eleget kell hogy tegyen az alábbi feltételeknek:

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

E három feltétel egyetlen mátrixszorzásba foglalható:

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1\\1 & 0 & -2\\0 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}, \text{ ahonnan } \mathbf{P} = \begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\2 & 3 & 4\\-1 & -1 & -1\end{bmatrix}. \square$$

► Az előző feladatban kapott **P** mátrix eleget tesz a $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ összefüggésnek. Ez szemléletesen világos is, hisz ha P jelöli a lineáris transzformációt, akkor arra is igaz, hogy $P^2 = P$. Ez abból következik, hogy a P vetítés az $x + y + 2z = 0$ egyenletű sík minden vektorát helyben hagyja, másrész bármely $\mathbf{x}$ vektor esetén $P\mathbf{x}$ ebben a síkban van, így a második vetítés már minden vektort helyben hagy.

Eltolás Az eltolás nem lineáris leképezés, hisz minden vektorhoz egy konstans vektort ad, tehát a nullvektort nem a nullvektorba képzi. Egy szellemes ötlettel mégis megvalósítható lineáris leképezéssel.

El szeretnénk tolni a síkot egy (a, b) vektorral. Az ötlet az, hogy beágyazzuk a síkot a térbe, és ott keresünk egy olyan térbeli lineáris leképezést, amely ezt a síkot eltolja (hogy másutt meg mit csinál, nem is érdekes). Legyen tehát a vizsgált sík a $z = 1$ egyenletű sík, és keressük azt a lineáris T leképezést, melyre

$$T\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x+a\\y+b\\1\end{bmatrix}.$$

Ez ugyan még mindig nem tűnik lineárisnak, de mivel $z = 1$, ezért a

$$T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x+az\\y+bz\\z\end{bmatrix}$$

leképezés már minden tekintetben megfelel. E leképezés mátrixa

$$\mathbf{T} = T\begin{bmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & a\\0 & 1 & b\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Hasonló ötlettel a tér eltolása is megvalósítható. A tér tetszőleges $(x, y, z) \mapsto (x+a, y+b, z+c)$ eltolása megvalósítható a következő mátrixleképezéssel:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Feladatok

Bizonyítások

7.12. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $H \subseteq \mathbb{R}^n$ vektorhalmazra a következő két állítás ekvivalens:

1. bármely véges sok H-beli vektor bármely lineáris kombinációja H-ban van;
2. bármely H-beli vektor tetszőleges skalárszorosa, és bármely két H-beli vektor összege H-ban van.

7.13. Lineáris függetlenség egy szükséges és elégséges feltétele A V vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha $\operatorname{span}(V)$ bármely vektora csak egyféleképp áll elő V lineáris kombinációjaként.

7.14. Sortér és nulltér A 2.37. példában megoldottuk a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. A megoldása

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Ezt fölhasználva fejben számolva adjunk meg egy olyan vektorrendszert, amely kifeszíti az

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 \phantom{{}- x_3 + 2x_4 + x_5} &= 0 \\ -3x_1 \phantom{{}+ x_2} - x_3 + 2x_4 \phantom{{}+ x_5} &= 0 \\ -x_1 \phantom{{}+ x_2 - x_3 + 2x_4} + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alterét.

7.15. Általánosítsuk az előző feladat eredményét tetszőleges homogén lineáris egyenletrendszerre!

Merőleges vetítés és a legjobb közelítés

A legjobb közelítés, a legkisebb négyzetek elve, vagy a lineáris regresszió az alkalmazásokban igen gyakran előforduló fontos fogalmak. Lényegük az $\mathbb{R}^n$ egy alterére való merőleges vetítésének fogalmával jól megvilágítható.

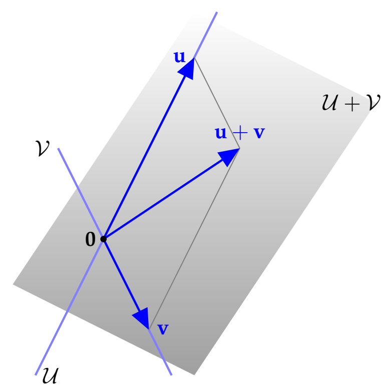
Alterek összege és direkt összege A koordinátázás általánosításaként tekinthetünk arra a gondolatra, hogy a tér minden vektorát különböző alterekbe eső vektorok összegeként állítsuk elő, és egyértelműen. Ez vezet az alterek direkt összegének fogalmához.

Ha $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ ugyanannak a vektortérnek az alterei, akkor az egyesítésük által generált alteret $\mathcal{U}+\mathcal{V}$-vel jelöljük, és a két altér összegének nevezzük.

7.35. ÁLLÍTÁS (ALTEREK ÖSSZEGE). *Ha $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ altér két altere, akkor az egyesítésük által generált $\mathcal{U}+\mathcal{V}$ altér pontosan azokból a vektorokból áll, melyek egy $\mathcal{U}$- és egy $\mathcal{V}$-beli vektor összegeként előállnak.*

BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{x}$ egy $\mathcal{U}+\mathcal{V}$-beli vektor, akkor előáll néhány $\mathcal{U}$- és $\mathcal{V}$-beli vektor lineáris kombinációjaként. De a lineáris kombináció $\mathcal{U}$-beli vektorokat tartalmazó része egy $\mathcal{U}$-beli $\mathbf{u}$ vektort ad, míg a többi egy $\mathcal{V}$-beli $\mathbf{v}$ vektort, így $\mathbf{x}=\mathbf{u}+\mathbf{v}$. Fordítva, minden $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ alakú vektor $\mathcal{U}$- és $\mathcal{V}$-beli vektorok lineáris kombinációja, így benne van $\mathcal{U}+\mathcal{V}$-ben. □

Szemléltetésül: ha például $\mathcal{W}=\mathbb{R}^3$, és $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ egy-egy egymástól különböző 1-dimenziós altere, akkor az egyesítésük által generált 2-dimenziós altérbe pontosan azok a vektorok tartoznak, melyek egy $\mathcal{U}$-beli $\mathbf{u}$ és egy $\mathcal{V}$-beli $\mathbf{v}$ vektor összegei (ld. 7.24 ábra).



7.24. ábra: $\mathcal{U}+\mathcal{V}$ bármely vektora előáll $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ alakban

Legyen $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ az $\mathcal{U}$ vektortér két tetszőleges altere. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{W}$ a $\mathcal{V}$ *kiegészítő altere*, vagy *komplementer altere* vagy hogy $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ egymás kiegészítő (komplementer) alterei, ha

$$\mathcal{V}\cap\mathcal{W}=\{\mathbf{0}\},\quad \mathcal{V}+\mathcal{W}=\mathcal{U},$$

azaz a két altérnek a zérusvektoron kívül nincs közös eleme, és $\mathcal{U}$ minden vektora előáll $\mathcal{V}$- és $\mathcal{W}$-beli elemek összegeként!

E fogalom a sík koordinátázására emlékeztető dolog: a síkban az origón átmenő két koordinátatengely vektorai a két alteret adják, melyekben csak a zérusvektor közös, és a sík minden vektora (egyértelműen) előáll az egyikből és a másikból vett vektor összegeként.

7.36. TÉTEL (KIEGÉSZÍTŐ ALTEREK TULAJDONSÁGAI). *Legyen $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ az $\mathcal{U}$ vektortér két altere és legyen $\mathcal{V}$ egy bázisa $\{\,\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_r\,\}$, $\mathcal{W}$ egy bázisa $\{\,\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\dots,\mathbf{w}_k\,\}$. Az alábbi állítások ekvivalensek:*

a) $\mathcal{V}\cap\mathcal{W}=\{\mathbf{0}\}$ *és* $\mathcal{V}+\mathcal{W}=\mathcal{U}$*, azaz $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ kiegészítő alterek,* *b)* *$\mathcal{U}$ minden vektora egyértelműen előáll egy $\mathcal{V}$- és egy $\mathcal{W}$-beli vektor összegeként,*

c) $\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r \} \cup \{ \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k \}$ *az $\mathcal{U}$ vektortér egy bázisa,*

d) $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$ *és* $\dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{U}$.

BIZONYÍTÁS. *a)* $\Rightarrow$ *b)* : Meg kell mutatnunk, hogy minden vektor egyértelműen áll elő egy $\mathcal{V}$- és egy $\mathcal{W}$-beli vektor összegeként. Legyen $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ olyan vektor, hogy $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2$, ahol $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}$ és $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathcal{W}$. Átrendezés után $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1$. Ennek bal oldalán $\mathcal{V}$-beli, jobb oldalán $\mathcal{W}$-beli vektor áll, amik csak a nullvektor esetén lehetnek azonosak, mivel $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$. Így $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ és $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2$.

b) $\Rightarrow$ *c)* : Mivel bármely $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ vektor előáll $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ alakban, ahol $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ és $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, e két vektor pedig előáll a bázisvektorok lineáris kombinációjaként, ezért a két bázis egyesítésével kapott vektorrendszer kifeszíti $\mathcal{U}$-t. Másrészt megmutatjuk, hogy a vektorrendszer független vektorokból áll. Tegyük fel, hogy

$$c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_r\mathbf{v}_r + d_1\mathbf{w}_1 + \dots + d_k\mathbf{w}_k = \mathbf{0}.$$

Mivel a $\mathbf{0}$ vektor *egyértelműen áll elő* $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ alakban, és egy előállítása a $\mathbf{0} + \mathbf{0}$, ezért

$$c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}, \quad \text{és} \quad d_1\mathbf{w}_1 + \dots + d_k\mathbf{w}_k = \mathbf{0}.$$

Innen pedig a bázisvektorok lineáris függetlenségéből következik, hogy minden együttható 0. Tehát a két altér bázisának egyesítése lineárisan független vektorokból áll, így $\mathcal{U}$ egy bázisát adja.

c) $\Rightarrow$ *d)* : $\mathcal{U}$ egy bázisa $r + k$ elemű, így $\dim \mathcal{U} = r + k = \dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{W}$. $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$ az előzőekben látottakhoz hasonlóan igazolható.

d) $\Rightarrow$ *a)* : Csak azt kell megmutatni, hogy ha $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$ és $\dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{U}$, akkor $\mathcal{U} = \mathcal{V} + \mathcal{W}$. Ehhez legyen $\mathcal{V}$ egy bázisa $\{ \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \}$, $\mathcal{W}$ egy bázisa $\{ \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \}$. Ha egyesítésük bázis $\mathcal{U}$-ban, akkor kész vagyunk, hisz minden vektor e bázis vektorainak lineáris kombinációja, mely felbomlik $\mathcal{V}$-beli és $\mathcal{W}$-beli részre. Ezért tegyük fel, hogy e vektorok lineárisan összefüggők, azaz a nullvektor megkapható valamely nemtriviális lineáris kombinációjukkal:

$$c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_r\mathbf{v}_r + d_1\mathbf{w}_1 + \dots + d_k\mathbf{w}_k = \mathbf{0}.$$

Átrendezve

$$c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_r\mathbf{v}_r = -d_1\mathbf{w}_1 - \dots - d_k\mathbf{w}_k,$$

ami ellentmond a $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$ feltételnek, mivel indirekt feltevésünk szerint nem minden együttható 0. □

7.37. DEFINÍCIÓ (DIREKT ÖSSZEG). *Ha a $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ alterek $\mathcal{U}$ kiegészítő alterei, akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ alterek* direkt összege*, amit az alterek egyszerű összegétől megkülönböztetendő $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ jelöl.*

Már láttunk példát kiegészítő alterekre, hisz a sortér és a nulltér dimenziójának összege n, és a két altérnek a nullvektoron kívül nincs közös eleme, így $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ és $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ kiegészítő alterek, azaz $\mathbb{R}^n = \mathcal{S}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A})$ bármely valós $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra.

Egy $\mathcal{W}$ altér esetén $\mathcal{W}^\perp$ jelölte a $\mathcal{W}$-re merőleges vektorok alterét. Ezt merőleges kiegészítő altérnek neveztük, de azt, hogy ez valóban kiegészítő altér-e, még nem mutattuk meg.

7.38. TÉTEL (A MERŐLEGES KIEGÉSZÍTŐ ALTÉR TULAJDONSÁGAI). *Legyen $\mathcal{W}$ az n-dimenziós valós vagy komplex $\mathcal{U}$ vektortér egy altere. Ekkor*
a) $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp = \{\mathbf{0}\}$,
b) $\mathcal{W} + \mathcal{W}^\perp = \mathcal{U}$,
c) $\mathcal{U}$ minden vektora egyértelműen előáll egy $\mathcal{W}$- és egy $\mathcal{W}^\perp$-beli vektor összegeként,
d) $(\mathcal{W}^\perp)^\perp = \mathcal{W}$.

BIZONYÍTÁS. *a)* igaz, hisz ha $\mathbf{x} \in \mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp$, akkor $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$, ami csak a $\mathbf{0}$ vektorra áll fönn.

b) abból adódik, hogy az előző, a kiegészítő alterekről szóló tétel szerint, ha két altér dimenzióinak összege n, és a két altér metszete csak a zérusvektorból áll, akkor a két altér összege $\mathbb{R}^n$. Esetünkben a két altér $\mathcal{W}$ és $\mathcal{W}^\perp$. Ha $\mathcal{W}$ egy bázisának vektoraiból, mint sorvektorokból mátrixot képzünk, annak sortere épp $\mathcal{W}$, nulltere $\mathcal{W}^\perp$ lesz, és a sortér és nulltér dimenzióinak összege valóban n a dimenziótétel szerint.

Ugyancsak az előző tétel és az *a)* és *b)* állítások következménye, hogy a „merőleges kiegészítő alterek" valóban kiegészítő alterek, ami bizonyítja *c)*-t.

d) bizonyításához megmutatjuk, hogy $\mathcal{W} \subseteq (\mathcal{W}^\perp)^\perp$ és $\mathcal{W} \supseteq (\mathcal{W}^\perp)^\perp$, ami bizonyítja, hogy $\mathcal{W} = (\mathcal{W}^\perp)^\perp$.

Legyen $\mathbf{w}$ a $\mathcal{W}$ tér egy tetszőleges vektora. Mivel $\mathcal{W}^\perp$ épp azokból a vektorokból áll, melyek merőlegesek $\mathcal{W}$ minden vektorára, ezért $\mathbf{w}$ merőleges $\mathcal{W}^\perp$ minden vektorára. Ez viszont épp azt jelenti, hogy $\mathbf{w}$ benne van a $(\mathcal{W}^\perp)^\perp$ altérben, tehát $\mathcal{W} \subseteq (\mathcal{W}^\perp)^\perp$.

A fordított tartalmazás bizonyításához legyen $\mathbf{w} \in (\mathcal{W}^\perp)^\perp$. A *b)* pont szerint e vektor előáll $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{v}^\perp$ alakban, ahol $\mathbf{v} \in \mathcal{W}$ és $\mathbf{v}^\perp \in \mathcal{W}^\perp$. Elég lenne megmutatnunk, hogy $\mathbf{v}^\perp = \mathbf{0}$. A $(\mathcal{W}^\perp)^\perp$ és $\mathcal{W}^\perp$ merőlegessége miatt $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}^\perp = 0$, így

$$0 = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}^\perp = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}^\perp) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^\perp + \mathbf{v}^\perp \cdot \mathbf{v}^\perp = \mathbf{v}^\perp \cdot \mathbf{v}^\perp,$$

hisz $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^\perp = 0$. A $\mathbf{v}^\perp \cdot \mathbf{v}^\perp = 0$ egyenlőség viszont csak $\mathbf{v}^\perp = \mathbf{0}$ esetén áll fönn. Így tehát $\mathbf{w} = \mathbf{v}$, azaz $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, ami bizonyítja az állítást. □

Merőleges vetítés $\mathbb{R}^n$ egy alterére Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{V}$ vektortér egy $\mathbf{v}$ vektorának a $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$ altérre eső *merőleges vetülete* a $\mathbf{w}$ vektor, ha $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, és $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ merőleges a $\mathcal{W}$ altérre, azaz $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in \mathcal{W}^\perp$. A $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ vektort a $\mathbf{v}$ vektor $\mathcal{W}$ altérre *merőleges összetevőjének* nevezzük.

Kérdés, hogy létezik-e minden vektornak egy altérre eső merőleges vetülete, és hogy egyértelmű-e. A 7.38. tétel *c)* pontja szerint ha $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$, akkor minden $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektor egyértelműen felbomlik egy $\mathcal{W}$-beli $\mathbf{w}$ és egy $\mathcal{W}^\perp$-beli $\mathbf{w}^\perp$ vektor összegére. Ez azt jelenti, hogy e $\mathbf{w}$ vektor épp a $\mathbf{v}$ vektor $\mathcal{W}$ altérre eső merőleges vetülete. Ezt az egyértelműen létező vektort – összhangban korábbi jelölésünkkel – jelölje $\operatorname{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{v}$.

Egy mátrix *teljes oszloprangú*, ha oszlopai lineárisan függetlenek, azaz rangja megegyezik oszlopainak számával, azaz ha oszlopai az oszlopterének bázisát alkotják. Hasonlóan definiálható a *teljes sorrangú* mátrix fogalma.

7.39. tétel (Altérre való vetítés mátrixa). *Ha $\mathcal{W}$ az $\mathbb{R}^n$ egy altere, és az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorai a $\mathcal{W}$ egy bázisát alkotják (tehát $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú), akkor a $\mathcal{W}$ altérre való merőleges vetítés, azaz a $\operatorname{proj}_{\mathcal{W}}$ leképezés mátrixa*

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}.$$

Bizonyítás. Legyen a $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektor $\mathcal{W}$-re eső merőleges vetülete $\mathbf{w}$. Mivel $\mathbf{A}$ definíciója szerint $\mathbf{A}$ oszloptere $\mathcal{W}$, ezért létezik olyan $\mathbf{x}$ vektor, hogy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{w}$. Másrészt $\mathcal{W} = \mathcal{O}(\mathbf{A})$ miatt $\mathcal{W}^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, így $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ benne van $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ nullterében, mivel a merőleges vetület definíciója szerint $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ merőleges $\mathcal{W}$-re. Eszerint $\mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{0}$, azaz $\mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Átrendezve kapjuk, hogy

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{v}.$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix teljes oszloprangú, így a **??** tétel szerint $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ invertálható, azaz $\mathbf{x} = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{v}$, amiből kapjuk, hogy $\operatorname{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{v}$, ami bizonyítja az állítást. □

► A tételbeli képlet könnyen megjegyezhető, hisz összhangban van az egyenesre való merőleges vetítés (7.6) képletével. Ha ugyanis az $\mathbf{A}$ mátrix egyetlen oszlopból áll, $(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}$ egyetlen szám, ami kiemelhető, azaz az $\mathbf{A} = \mathbf{b}$ jelöléssel $\mathbf{b}(\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b})^{-1}\mathbf{b}^\mathsf{T} = \frac{1}{\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b}}\mathbf{b}\mathbf{b}^\mathsf{T}$.

7.40. példa (Merőleges vetület kiszámítása). *Határozzuk meg a $(-2, 1, 3)$ vektornak az $(1, 0, 1)$ és a $(-1, 2, 0)$ vektorok által kifeszített síkra eső merőleges vetületét! (ld. még a 7.31. példát)*

MEGOLDÁS. Az altér bázisvektoraiból képzett mátrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ amiből } \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Így a $(-2, 1, 3)$ vektor merőleges vetülete

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ez a feladat megegyezik a 7.31. példabelivel, mivel ennek a síknak is $2x + y - 2z = 0$ az egyenlete, ugyanis $(1, 0, 1) \times (-1, 2, 0) = (-2, -1, 2)$. □

Melyik mátrix merőleges vetítés mátrixa? Olyan – könnyen ellenőrizhető – feltételeket keresünk egy lineáris leképezés mátrixára, melyek segítségével azonnal megállapítható, hogy a mátrixleképezés merőleges vetítés-e.

7.41. TÉTEL (MERŐLEGES VETÍTÉS MÁTRIXAI). *Egy* $\mathbf{P}$ *mátrix pontosan akkor merőleges vetítés mátrixa, ha* $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\mathsf{T} = \mathbf{P}^2$.

BIZONYÍTÁS. A $\mathbf{P} = \mathbf{P}^2$ feltétel szükségessége szemléletesen világos, hisz minden P lineáris leképezés, mely az egész $\mathbb{R}^n$ teret egy altérre – nevezetesen $\operatorname{Im} P$-re – vetíti, az altér vektorait helyben hagyja. Tehát $P^2\mathbf{x} = P\mathbf{x}$ minden $\mathbf{x}$-re fennáll, így ennek az összefüggésnek P minden mátrixára is igaznak kell lennie.

($\Longrightarrow$) Tegyük fel, hogy $\mathbf{P}$ egy P merőleges vetítés mátrixa $\mathbb{R}^n$ standard bázisában. Tekintsük $\operatorname{Im}(P) = \mathcal{O}(\mathbf{P})$ egy tetszőleges bázisát, és legyen $\mathbf{A}$ az a mátrix, melynek e bázis elemei az oszlopai. A 7.39. tétel szerint ekkor $\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}$. Erre viszont könnyen ellenőrizhető, a tételbeli feltétel.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^2 &= \left(\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^2 = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{P}, \end{aligned}$$

másrészt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^\mathsf{T} &= \left(\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T} = \mathbf{A}\left((\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\right)^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T} \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{P}. \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Tegyük fel, hogy $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\mathsf{T} = \mathbf{P}^2$. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{P}$ az $\mathcal{O}(\mathbf{P})$-re való merőleges vetítés mátrixa. Ehhez elég megmutatnunk, hogy az $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}$ vektor merőleges $\mathcal{O}(\mathbf{P})$-re bármely $\mathbf{x}$ vektor esetén. A $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ feltétel miatt $\mathbf{P}(\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}) = \mathbf{P}\mathbf{x} - \mathbf{P}^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tehát $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{P})$, de $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\mathsf{T}$, így $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{P}^\mathsf{T})$. Ez épp azt jelenti, hogy $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}$ merőleges $\mathcal{O}(\mathbf{P})$-re, és ezt akartuk belátni. □

► A $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\mathsf{T}$ összefüggés azt jelenti, hogy $\mathbf{P}$ szimmetrikus. A $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ tulajdonságnak eleget tevő mátrixokat *idempotensnek* nevezzük. A tétel tehát úgy is fogalmazható, hogy egy mátrix pontosan akkor egy merőleges vetítés mátrixa, ha idempotens és szimmetrikus.
► Később látni fogjuk, hogy a – később definiálandó – nem feltétlenül merőleges vetítés mátrixai egybe esnek az idempotens mátrixokkal, tehát a vetítő lineáris leképezések az idempotens lineáris leképezésekkel.
► Azt, hogy egy vetítés hány dimenziós térre vetít, annak rangja mondja meg, hisz az megegyezik a képtér dimenziójával.

7.42. PÉLDA. *Igazoljuk, hogy az*

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix},\quad \frac{1}{4}\begin{bmatrix}3&-1&-1&-1\\-1&3&-1&-1\\-1&-1&3&-1\\-1&-1&-1&3\end{bmatrix}$$

mátrixok merőleges vetítés mátrixai! Hány dimenziós térre vetítenek?

MEGOLDÁS. Könnyen ellenőrizhető, hogy mindegyik mátrix szimmetrikus és idempotens, azaz kielégíti a $\mathbf{P}^\mathsf{T} = \mathbf{P}$ és a $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ egyenlőségeket. Az első két mátrixról átalakítás nélkül is leolvasható, hogy rangjuk 2. A harmadik mátrix rangja 3, ugyanis egyrészt legalább 3, hisz ha kivonjuk az utolsó sort az első háromból, egy 3×3-as egységmátrixot kapunk benne, másrészt nem lehet 4, mert a négy sorvektor összege a zérusvektor, azaz lineárisan összefüggők. □

Altértől való távolság Adva van az $\mathbb{R}^n$ tér egy $\mathbf{x}$ vektora és egy $\mathcal{W}$ altere. $\mathbf{x}$-nek a $\mathcal{W}$ *altértől való távolságán* a $\mathcal{W}$ altér $\mathbf{x}$-hez legközelebbi $\mathbf{w}$ vektorának tőle való távolságát értjük. Kérdés azonban, hogy létezik-e ilyen vektor egyáltalán! Meg fogjuk mutatni, hogy ilyen $\mathbf{w}$ vektor létezik és egyértelmű. E vektort az $\mathbf{x}$ vektor $\mathcal{W}$-beli *legjobb közelítésének* nevezzük.

7.43. TÉTEL (LEGJOBB KÖZELÍTÉS TÉTELE). *Adva van az $\mathbb{R}^n$ tér egy $\mathbf{x}$ vektora és egy $\mathcal{W}$ altere. Az $\mathbf{x}$ vektornak egyetlen $\mathcal{W}$-beli legjobb $\hat{\mathbf{x}}$ közelítése van, nevezetesen $\hat{\mathbf{x}} = \operatorname{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}$.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $\mathbf{w}$ a $\mathcal{W}$ egy tetszőleges vektora. Ekkor

$$\mathbf{x} - \mathbf{w} = (\mathbf{x} - \operatorname{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}) + (\operatorname{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x} - \mathbf{w}).$$

A merőleges vetítés definíciója miatt az egyenlőség jobb oldalán álló első kifejezés $\mathcal{W}^\perp$ eleme, míg a második $\mathcal{W}$ eleme. Tehát az $\mathbf{x} - \operatorname{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}$ és a $\operatorname{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x} - \mathbf{w}$ vektorok merőlegesek egymásra, így alkalmazható rájuk Pithagorász tétele:

$$|\mathbf{x} - \mathbf{w}|^2 = |\mathbf{x} - \operatorname{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}|^2 + |\operatorname{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x} - \mathbf{w}|^2.$$

Ebből világos, hogy

$$|\mathbf{x}-\mathbf{w}|^2 \geq |\mathbf{x}-\operatorname{proj}_{\mathcal{W}}\mathbf{x}|^2,$$

és egyenlőség csak akkor állhat fönn, ha $\mathbf{w} = \hat{\mathbf{x}} = \operatorname{proj}_{\mathcal{W}}\mathbf{x}$, ami egyúttal a legjobb közelítés egyértelműségét is bizonyítja. □

► E tétel egyik következménye, hogy $\mathbb{R}^n$ minden vektora felbontható egy $\mathcal{W}$-beli és egy rá merőleges vektor összegére, ugyanis

$$\mathbf{x} = \operatorname{proj}_{\mathcal{W}}\mathbf{x} + \mathbf{w}^{\perp}, \quad \text{ahol} \quad \mathbf{w}^{\perp} = \mathbf{x} - \operatorname{proj}_{\mathcal{W}}\mathbf{x}.$$

Ennél azonban több is igaz, nevezetesen az, hogy e felbontás egyértelmű.

7.44. TÉTEL (VEKTOR FELBONTÁSA ÖSSZETEVŐKRE). *Adva van az $\mathbb{R}^n$ tér egy $\mathbf{x}$ vektora és egy $\mathcal{W}$ altere. Az $\mathbf{x}$ vektor egyértelműen felbomlik egy $\mathcal{W}$-beli $\mathbf{w}$ és egy $\mathcal{W}$-re merőleges $\mathbf{w}^{\perp}$ vektor összegére, nevezetesen $\mathbf{w} = \operatorname{proj}_{\mathcal{W}}\mathbf{x}$ és $\mathbf{w}^{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{w}$.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy létezik $\mathbf{x}$-nek egy másik ilyen tulajdonságú felbontása is, tehát $\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{w}^{\perp}$ és $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{v}^{\perp}$. A második egyenletet az elsőből kivonva, majd átrendezve kapjuk, hogy

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{w}^{\perp} - \mathbf{v}^{\perp}.$$

A bal oldal eleme $\mathcal{W}$-nek a jobb oldali vektor viszont merőleges rá, hisz mindkét vektor eleme a $\mathcal{W}^{\perp}$ altérnek. Ez viszont csak akkor állhat fenn, ha mindkét oldal egyenlő a zérusvektorral, tehát $\mathbf{v} = \mathbf{w}$. □

7.45. PÉLDA. *Tekintsük az $\mathbb{R}^4$ tér $(1,-1,1,0)$ és $(0,1,-1,0)$ vektorai által kifeszített $\mathcal{W}$ alterét és legyen $\mathbf{x} = (8,4,2,1)$. Bontsuk fel az $\mathbf{x}$ vektort $\mathcal{W}$-be eső és $\mathcal{W}$-re merőleges vektorok összegére.*

MEGOLDÁS. A $\mathcal{W}$-re való merőleges vetítés mátrixa $\mathbf{P} = \mathbf{W}(\mathbf{W}^{\mathsf{T}}\mathbf{W})^{-1}\mathbf{W}^{\mathsf{T}}$, ahol $\mathbf{W}$ két oszlopa a megadott két bázisvektor, tehát

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{amiből} \quad \mathbf{P}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Így $\operatorname{proj}_{\mathcal{W}}\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x} = (8,1,-1,0)$ és $\mathbf{x} - \operatorname{proj}_{\mathcal{W}}\mathbf{x} = (0,3,3,1)$. Egyszerű számítással ellenőrizhető, hogy a $(8,1,-1,0) \in \mathcal{W}$ és hogy $(0,3,3,1) \perp \mathcal{W}$, azaz merőleges a $\mathcal{W}$-t kifeszítő bázisvektorok mindegyikére. □

Egyenletrendszer optimális megoldása Az altérre való merőleges vetítés és a legjobb közelítés fogalmával olyan eszközhöz jutottunk, amellyel a lineáris egyenletrendszerek elmélete e szinten teljessé tehető. A gyakorlatban rendkívül gyakran előfordul, hogy az ismeretlen mennyiségek meghatározására méréseket végzünk, de az elkerülhetetlen mérési hibák ellenmondó egyenletrendszerre vezetnek. Hogyan határozható meg ekkor a valóságban bizonyosan létező megoldás, egy ellentmondásos, tehát nem megoldható egyenletrendszerből?

Tudjuk, hogy az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathbf{b}$ benne van az oszloptérben, azaz $\mathcal{O}(\mathbf{A})$-ban. Természetes ötlet, hogy $\mathbf{b}$ helyett az azt legjobban közelítő oszloptérbeli $\hat{\mathbf{b}} = \operatorname{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \mathbf{b}$ vektorral oldjuk meg az egyenletrendszert. Ez már biztosan megoldható lesz, és olyan megoldásokat szolgáltat, melyekre $\mathbf{A}\mathbf{x}$ ugyan nem lesz egyenlő $\mathbf{b}$-vel, de attól a lehető legkisebb távolságra van. Az ilyen megoldásokat az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer *optimális megoldásainak* vagy a *legkisebb négyzetek elve szerinti megoldásainak* nevezzük. Világos, hogy ha egy egyenletrendszer konzisztens, akkor optimális megoldásai megegyeznek a megoldásaival. E definícióból azt is látjuk, mit tegyünk, ha egy egyenletrendszer ellentmondásos (azaz inkonzisztens): határozzuk meg a $\hat{\mathbf{b}} = \operatorname{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \mathbf{b}$ vektort, és az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer helyett oldjuk meg az $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}$ egyenletrendszert. Ez kiindulásul jó, de adódik egy egyszerűbb módszer is.

Az természetes ötlet, hogy $\mathbf{b}$ helyett $\hat{\mathbf{b}}$-vel oldjuk meg az egyenletrendszert, de vajon nincs-e jobb ötlet, végülis miért épp e merőleges vetület adja számunkra a „legjobb megoldást” és mit is jelent itt a „legjobb”. Az igazi választ a valószínűségszámítási előismeretet igénylő Gauss–Markov-tétel adja meg, melyet a feladatok közt ismertetünk.

7.46. TÉTEL (EGYENLETRENDSZER OPTIMÁLIS MEGOLDÁSA). *Az* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *egyenletrendszer optimális megoldásai megegyeznek az*

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b} \tag{7.9}$$

egyenletrendszer megoldásaival. Ezek közül egyetlen egy esik az $\mathbf{A}$ *mátrix sorterébe, a legkisebb abszolút értékű.*

► A (7.9) egyenletrendszert az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszerhez tartozó *normálegyenlet-rendszernek* nevezzük. (A *normálegyenlet* kifejezés is helyes, ha a (7.9) kifejezésre, mint mátrixegyenletre gondolunk.)

BIZONYÍTÁS. Az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer optimális megoldásai megegyeznek az $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \operatorname{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldásaival. Ezeket fogjuk tehát keresni.

Először megmutatjuk, hogy ha $\hat{\mathbf{x}}$ egy optimális megoldás, akkor $\hat{\mathbf{x}}$ kielégíti a (7.9) egyenletet. Mivel $\mathbf{b} - \operatorname{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \mathbf{b}$ a vetítés definíciója miatt merőleges $\mathcal{O}(\mathbf{A})$-ra, ezért $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ nullterében van, tehát

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{b} - \operatorname{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

Másrészt felhasználva, hogy $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \operatorname{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \mathbf{b}$, kapjuk, hogy

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0},$$

azaz átrendezés után

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}.$$

Ezután megmutatjuk, hogy a (7.9) egyenletet kielégítő minden $\hat{\mathbf{x}}$ vektor optimális megoldás. Ha (7.9) teljesül, akkor

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0},$$

tehát $\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$ benne van $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ nullterében, így merőleges $\mathbf{A}$ oszlopterére. Ezért a

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + (\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})$$

felbontás két merőleges kiegészítő altérbe eső vektor, hisz $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$ az $\mathbf{A}$ oszlopterébe esik. Így a merőleges vetület definíciója szerint

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \operatorname{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \mathbf{b},$$

azaz $\hat{\mathbf{x}}$ optimális megoldás.

Végül meg kell mutatnunk, hogy a megoldások közt egyetlen van, mely $\mathbf{A}$ sorterébe esik. Ez azonnal következik abból, hogy a normálegyenlet megoldásai közt egyetlen egy van, mely $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ sorterébe esik, az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}$ sorterei pedig megegyeznek. □

Lineáris és polinomiális regresszió Az egyenletrendszerek optimális megoldásainak egyik fontos alkalmazása a lineáris regresszió. Tegyük fel, hogy két változó mennyiség, az x és az y között fennáll az $y = a + bx$ kapcsolat. Méréseket végzünk, melyek eredménye az (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \dots n)$ párok sorozata. Keressük az a és b értékét, mely kielégíti az $y_i = a + bx_i$ $(i = 1, 2, \dots n)$ egyenletek mindegyikét! Ez egy kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer, melynek mátrixalakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

A hozzá tartozó normálegyenlet-rendszer

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

amely a mátrixműveletek elvégzése után a következő alakra vezet:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

Ennek $\hat{a}$ és $\hat{b}$ megoldása adja az eredeti egyenletrendszer optimális megoldását! Az ilyen módon kapott $y = \hat{a} + \hat{b}x$ egyenest *regressziós egyenesnek* nevezzük, mely a megadott adatokra a legkisebb négyzetek elve szerinti legjobban illeszkedő egyenes.

Összefoglalva:

7.47. ÁLLÍTÁS (LINEÁRIS REGRESSZIÓ). *Az (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \dots n)$ párokhoz tartozó, $y = \hat{a} + \hat{b}x$ egyenletű regressziós egyenes paraméterei kielégítik az*

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

egyenletet. Ez egyértelműen megoldható, ha van legalább két különböző x_i érték.

BIZONYÍTÁS. Az összefüggést már fent igazoltuk, csak a egyértelmű megoldhatóság igazolása maradt hátra. A számtani és négyzetes közép közti összefüggés szerint bármely x_i $(i = 1, 2 \dots, n)$ valósokra

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}},$$

és egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $x_1 = \cdots = x_n$. Mivel az együtthatómátrix determinánsa $n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2$, ezért a számtani és négyzetes közép közti összefüggés miatt ez csak akkor lehet 0, ha az x_i értékek mind azonosak. □

A lineáris regresszió gyakran egyéb függvénykapcsolat esetén is alkalmazható:

7.48. ÁLLÍTÁS (LINEARIZÁLHATÓ REGRESSZIÓS MODELLEK). *Ha az x és y mennyiségek között az alábbi táblázat szerinti függvénykapcsolatok valamelyike áll, akkor a táblázatban megadott helyettesítéssel a kapcsolat $Y = a + bX$ alakúvá, azaz lineárissá válik, így lineáris regresszió végezhető.*

Modell	*Függvénykapcsolat*	*Helyettesítés*		
hatványfüggvény	$y = cx^b$	$X = \ln x$	$Y = \ln y$	$a = \ln c$
exponenciális	$y = ce^{bx}$	$X = x$	$Y = \ln y$	$a = \ln c$
logaritmikus	$y = a + b \ln x$	$X = \ln x$	$Y = y$	

BIZONYÍTÁS. Az $y = cx^b$ egyenlőség mindkét oldalának logaritmusát véve az $\ln y = \ln c + b \ln x$ egyenlőséget kapjuk, ami a megadott helyettesítésekkel az $Y = a + bX$ kifejezést adja. Ugyanígy, az $y = ce^{bx}$ egyenlet logaritmusát véve az $\ln y = \ln c + bx$ egyenletet kapjuk. A szükséges helyettesítés a harmadik esetben még nyilvánvalóbb. □

A regresszió hasonló módon más függvényekkel is végezhető, ezek közül a polinomiálist emeljük ki:

7.49. PÉLDA. *Keressünk az $a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$ polinom együtthatóira optimális becslést a legkisebb négyzetek módszerével, ha az (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \dots n)$ párok sorozatát ismerjük.*

MEGOLDÁS. Keresendő az n egyenletből álló $k+1$-ismeretlenes

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_kx_1^k &= y_1\\
a_0 + a_1x_2 + \ldots + a_kx_2^k &= y_2\\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots\\
a_0 + a_1x_n + \ldots + a_kx_n^k &= y_n
\end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása az a_0, $a_1, \dots, a_k$ ismeretlenekre. Mátrix-alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^k \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Ha az együtthatómátrixot $\mathbf{X}$ jelöli, az ismeretlenek vektorát $\mathbf{a}$, az y_i értékek vektorát $\mathbf{y}$, akkor az egyenletrendszer az $\mathbf{Xa} = \mathbf{y}$ alakba írható. Ez biztosan megoldható, mégpedig egyértelműen, ha az x_i értékek különbözőek, és $n = k+1$, ekkor ugyanis az együtthatómátrix négyzetes, determinánsa Vandermonde-determináns, melynek értéke nem 0. Egyéb esetekben a normálegyenlet-rendszert kell felírni, melynek mátrixszorzatos alakja

$$\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{Xa} = \mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{y}.$$

Ez egyértelműen megoldható, ha $\mathbf{X}$ teljes oszloprangú, mert akkor $\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{X}$ invertálható, így a megoldás

$$\mathbf{a} = (\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{y}.$$

Ez pontosan akkor áll fenn, ha van legalább $k+1$ különböző x_i érték, ekkor ugyanis $\mathbf{X}$-ben van egy $(k+1) \times (k+1)$-es nemnulla determinánsú részmátrix, nevezetesen a különböző x_i értékekhez tartozó sorokból álló Vandermonde-mátrix. □

Vetítés Ha $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ kiegészítő alterek, akkor természetes módon értelmezhető a $\mathcal{V}$ altérre való és a $\mathcal{W}$ altérrel párhuzamos vetítés fogalma. E transzformációk halmaza egybeesik a $P^2 = P$ feltételt kielégítő lineáris transzformációk halmazával.

7.50. DEFINÍCIÓ (VETÍTÉS ALTÉRRE). *Tudjuk, hogy ha $\mathbb{R}^n = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, azaz $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ kiegészítő alterek, akkor a tér bármely $\mathbf{u}$ vektora egyértelműen előáll $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ alakban, ahol $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}$ vektor az $\mathbf{u}$ vektornak a $\mathcal{V}$ altérre $\mathcal{W}$ mentén való vetülete, vagy $\mathcal{W}$-vel párhuzamosan vett, $\mathcal{V}$-re való* vetülete.

► Természetesen ugyanígy a $\mathbf{w}$ vektor az $\mathbf{u}$ vektor $\mathcal{V}$-val párhuzamosan vett, $\mathcal{W}$-re való vetülete. Könnyen látható, hogy a $P : \mathbf{u} \mapsto \mathbf{v}$ leképezés lineáris transzformáció (ellenőrizzük!). E lineáris transzformációt *vetítésnek* vagy *projekciónak* nevezzük.
► Világos, hogy minden P vetítés az $\operatorname{Im} P$-re $\operatorname{Ker} P$ mentén való vetítés.

Határozzuk meg e transzformáció mátrixát! A 7.36. tétel utáni megjegyzés szerint $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ dimenzióinak összege n, és ha $\mathcal{V}$ egy bázisa $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$, $\mathcal{W}$ egy bázisa $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_{n-r}\}$, akkor a két bázis diszjunkt (metszetük üres) és egyesítésük az egész tér egy bázisa. E vektorokból képezzük az alábbi mátrixot:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \ldots\ \mathbf{v}_r | \mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2\ \ldots\ \mathbf{w}_{n-r}] = [\mathbf{V}|\mathbf{W}].$$

Mivel $P\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ és $P\mathbf{w}_j = \mathbf{0}$ $(j = 1, 2, \ldots, n-r)$, ezért a P leképezés $\mathbf{P}$ mátrixára

$$\mathbf{PU} = \mathbf{P}[\mathbf{V}|\mathbf{W}] = [\mathbf{PV}|\mathbf{PW}] = [\mathbf{V}|\mathbf{O}].$$

Mivel pedig $\mathbf{U}$ invertálható, ezért a vetítés mátrixa

$$\mathbf{P} = [\mathbf{V}|\mathbf{O}]\mathbf{U}^{-1} = [\mathbf{V}|\mathbf{O}][\mathbf{V}|\mathbf{W}]^{-1}.$$

7.51. tétel (A projekció tulajdonságai). *Legyen $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ egy projekció. Ekkor*
a) *$\mathbb{R}^n$-nek van olyan bázisa, melyben a mátrixa* $\mathbf{P} = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$.
b) *$I - P$ is projekció, mégpedig* $\operatorname{Ker}(I - P) = \operatorname{Im} P$, $\operatorname{Im}(I - P) = \operatorname{Ker} P$,
c) $\operatorname{r}(P) = \operatorname{trace}(\mathbf{P})$.

Bizonyítás. *a)* A fenti jelölésekkel a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_{n-r}\}$ bázisban nyilván $\operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ a mátrix. Ez a

$$\begin{aligned}[\mathbf{V}|\mathbf{O}][\mathbf{V}|\mathbf{W}]^{-1} &= [\mathbf{V}|\mathbf{W}] \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} [\mathbf{V}|\mathbf{W}]^{-1} \\ &= [\mathbf{V}|\mathbf{W}] \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)[\mathbf{V}|\mathbf{W}]^{-1}\end{aligned}$$

átalakításból is látható.

b) Ha $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, és $P : \mathbf{u} \mapsto \mathbf{v}$ a $\mathcal{W}$ mentén $\mathcal{V}$-re való vetítés, akkor $I - P = \mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{w}$ a $\mathcal{V}$ mentén $\mathcal{W}$-re való vetítés. Világos, hogy $\operatorname{Im} P = \mathcal{V}$, $\operatorname{Ker} P = \mathcal{W}$, és így $\operatorname{Im}(I - P) = \mathcal{W}$, $\operatorname{Ker}(I - P) = \mathcal{V}$. □

7.52. példa (Projekció mátrixa). *Határozzuk meg az $\mathbb{R}^3$ tér $\mathcal{W} = \operatorname{span}((1, -2, 1))$ altérrel párhuzamos, $\mathcal{V} = \operatorname{span}((0, 2, -1), (2, 0, -1))$ altérre való vetítésének és a $\mathcal{V}$-vel párhuzamos $\mathcal{W}$-re való vetítés mátrixát! (ld. még a 7.34. példát!)*

MEGOLDÁS. Miután

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

a transzformáció mátrixa egyszerű behelyettesítés után:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{V}|\mathbf{O}][\mathbf{V}|\mathbf{W}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

A 7.34. példában ugyanezt a kérdést tettük fel, másként megfogalmazva. Ráadásul a megoldás is lényegében ugyanaz, csak a $\mathcal{V}$ altérnek most más bázist kerestünk. A másik vetítés mátrixa

$$\mathbf{I} - \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

7.53. TÉTEL (A VETÍTÉS EKVIVALENS DEFINÍCIÓJA). *A $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció pontosan akkor vetítés, ha $P^2 = P$, azaz ha P idempotens.*

BIZONYÍTÁS. A vetítés definíciója szerinti $P\mathbf{u} = \mathbf{v}$, ahol $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ és $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$. Mivel $\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0}$ a $\mathbf{v}$ felbontása, ezért $P\mathbf{v} = \mathbf{v}$, tehát $P^2\mathbf{u} = P\mathbf{v} = \mathbf{v}$, azaz minden $\mathbf{u}$ vektorra $P^2\mathbf{u} = P\mathbf{u}$, tehát $P^2 = P$.

Minden $\mathbf{u}$ vektor felbontható a következőképp: $\mathbf{u} = P\mathbf{u} + (\mathbf{u} - P\mathbf{u})$. Itt $P\mathbf{u} \in \operatorname{Im} P$, $\mathbf{u} - P\mathbf{u} \in \operatorname{Ker} P$, ugyanis $P(\mathbf{u} - P\mathbf{u}) = P\mathbf{u} - P^2\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Tehát $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} P + \operatorname{Ker} P$. $\operatorname{Im} P \cap \operatorname{Ker} P = \{\mathbf{0}\}$, ugyanis ha $\mathbf{u} \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Ker} P$, akkor $\mathbf{u} \in \operatorname{Im} P$ miatt van olyan $\mathbf{x}$, hogy $P\mathbf{x} = \mathbf{u}$, így $P^2\mathbf{x} = P\mathbf{u} = \mathbf{0}$, másrészt $P^2 = P$ miatt $P^2\mathbf{x} = P\mathbf{x} = \mathbf{u}$. Tehát $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, vagyis $\operatorname{Im} P \cap \operatorname{Ker} P = \{\mathbf{0}\}$. Eszerint $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Ker} P$. Legyen tehát $\mathcal{V} = \operatorname{Im} P$, $\mathcal{W} = \operatorname{Ker} P$. Minden $\mathbf{u}$ vektor egyértelműen felírható $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ alakban, ahol $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, és $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$. Mivel $\mathcal{V} = \operatorname{Im} P$, van olyan $\mathbf{x}$, hogy $\mathbf{v} = P\mathbf{x}$. Ezért $\mathbf{u} = P\mathbf{x} + \mathbf{w}$, így $P\mathbf{u} = P^2\mathbf{x} + P\mathbf{w} = P\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$. Tehát P vetítés. $\square$

A 7.41. tételben láttuk, hogy egy $\mathbf{P}$ mátrix pontosan akkor mátrixa egy merőleges vetítésnek, ha $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ és $\mathbf{P}^\mathsf{T} = \mathbf{P}$, azaz ha $\mathbf{P}$ idempotens és szimmetrikus. Így nyilvánvaló az alábbi állítás:

7.54. KÖVETKEZMÉNY (MIKOR MERŐLEGES EGY VETÍTÉS?). *Legyen $\mathbf{P}$ egy vetítés mátrixa. $\mathbf{P}$ pontosan akkor egy merőleges vetítés mátrixa, ha $\mathbf{P}$ szimmetrikus.*

Feladatok

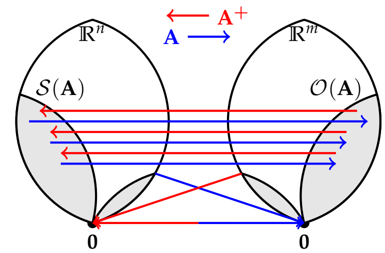
7.16. Igazoljuk a síkbeli egyenesre merőlegesen vetítő mátrix (7.8) képletét az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vektorok vetületének meghatározásával! Kétféleképp is számolhatunk, *a)* legyen az egyenes hajlásszöge az x-tengellyel α, *b)* legyen az egyenes irányvektora (b_1, b_2). Vessük össze a két eredményt, és igazoljuk azonosságukat.

7.17. Mikor merőleges egy vetítés? Legyen $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ egy vetítés. Mutassuk meg, hogy P pontosan akkor merőleges vetítés, ha minden $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $|P\mathbf{v}| \leq |\mathbf{v}|$.

*Pszeudoinverz**

A mátrix inverzének olyan – pszeudoinverznek nevezett – általánosítását keressük, mely képes lesz bármely $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszerből a minimális abszolút értékű optimális $\hat{\mathbf{x}}$ megoldást a mátrix inverzéhez hasonló módon megadni. Tehát ha $\mathbf{A}^+$ jelöli a pszeudoinverzet, akkor $\mathbf{A}^+\mathbf{b} = \hat{\mathbf{x}}$.

A pszeudoinverz fogalma Tudjuk, hogy az $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ mátrixleképezés a sorteret kölcsönösen egyértelmű módon viszi az oszloptérbe. Ezért ha $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egy konzisztens egyenletrendszer, és a sortérbe eső megoldás $\hat{\mathbf{x}}$, akkor fenn kell álljon az $\mathbf{A}^+\mathbf{b} = \hat{\mathbf{x}}$ egyenlőség. Ha viszont $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ inkonzisztens, akkor a $\hat{\mathbf{b}} = \operatorname{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \mathbf{b}$ jelöléssel $\mathbf{Ax} = \hat{\mathbf{b}}$ konzisztens, így fenn kell álljon az $\mathbf{A}^+\mathbf{b} = \mathbf{A}^+\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{x}}$ egyenlőség. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{A}^+(\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}) = \mathbf{0}$, vagyis a $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ minden $\mathbf{z}$ vektorára $\mathbf{A}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Mindez a következő definícióhoz vezet.



7.25. ábra: Az $\mathbf{A}$ mátrix sortere és oszloptere közti kölcsönösen egyértelmű leképezés a pszeudoinverz fogalmának alapja.

A mátrixinverz fogalmának több más gyengítése is létezik, melyeket itt nem tárgyalunk. A továbbiakban pszeudoinverzen az itt definiálandó Moore–Penrose-féle pszeudoinverzet fogjuk érteni.

7.55. DEFINÍCIÓ (A MOORE–PENROSE-FÉLE PSZEUDOINVERZ). *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy* $m \times n$*-es valós mátrix.* Pszeudoinverzén *vagy* Moore–Penrose-féle pszeudoinverzén *azt az* $\mathbf{A}^+$*-szal jelölt mátrixot értjük, amellyel*

a) a sortér minden $\mathbf{x}$ *vektorára* $\mathbf{A}^+(\mathbf{Ax}) = \mathbf{x}$*, továbbá*

b) az oszloptérre merőleges minden $\mathbf{z}$ *vektorra* $\mathbf{A}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

► Azonnal látható, hogy $m \times n$-es mátrix pszeudoinverze $n \times m$-es.

► Mivel $\mathbf{Ax} \in \mathcal{O}(\mathbf{A})$, és a definícióban szereplő $\mathbf{z}$ vektor eleme $\mathcal{O}(\mathbf{A})^\perp$-nek, ezért az $\mathbf{A}^+$-hoz tartozó leképezés hatását ismerjük az $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ altéren és merőleges kiegészítő alterén. E leképezés a megadott altereken lineáris, hisz az egyiken egy lineáris leképezés inverze, a másikon a zérusleképezés. Ebből következik, hogy a definícióban megadott leképezés a lineáritás megtartásával egyértelműen kiterjeszthető az egész térre, hisz a tér minden vektora egyértelműen áll elő egy $\mathcal{O}(\mathbf{A})$-beli és egy rá merőleges vektor összegeként. Ebből tehát következik, hogy a definícióbeli leképezés létezik, egyértelmű és lineáris, így van mátrixa.

► A definícióból azonnal adódik az is, hogy $\mathcal{N}(\mathbf{A}^+) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, és $\mathcal{S}(\mathbf{A}^+) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^+)^\perp$, így $\mathcal{S}(\mathbf{A}^+) = \mathcal{S}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = \mathcal{O}(\mathbf{A})$.

7.56. PÉLDA (NÉHÁNY PSZEUDOINVERZ). *A definíció alapján igazoljuk az alábbi összefüggéseket!*

a) $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$*, ha* $\mathbf{A}$ *invertálható,*

b) $\mathbf{O}^+_{m\times n} = \mathbf{O}_{n\times m}$,

c) $[a]^+ = [1/a]$*, ha* $a \neq 0$*, és* $[0]^+ = [0]$,

d) $(\mathbf{A}^+)^+ = \mathbf{A}$,

e) *ha* $a_{ii} \neq 0$ *(*$i = 1, 2, \dots, r$*), akkor*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \mathbf{O} \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \\ \hline & & \mathbf{O} & & \mathbf{O} \end{array}\right]^{+}_{m\times n} = \left[\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \mathbf{O} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{rr}} & \\ \hline & & \mathbf{O} & & \mathbf{O} \end{array}\right]_{n\times m}$$

E példa *a)* pontja mutatja, hogy a pszeudoinverz név nem igazán jó, hisz itt nem *álinverzről*, nem *hamis inverzről* van szó, hanem az inverz általánosításáról, tehát az *általánosított inverz* helyesebb kifejezés. Szokás ezt is használni, de a Moore–Penrose pszeudoinverz kifejezés sokkal elterjedtebb (angol nyelvű művekben is leginkább a pseudoinverse szót használják).

MEGOLDÁS. *a)* Ha $\mathbf{A}$ egy $n \times n$-es méretű invertálható mátrix, akkor sortere és oszloptere is a teljes n-dimenziós tér, és tetszőleges $\mathbf{x}$ vektorra $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}$, tehát $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$.

b) Zérusmátrix oszloptere a zérusvektorból áll, így pszeudoinverze annak merőleges kiegészítő alterét, vagyis az egész teret a nullvektorba viszi, tehát $\mathbf{O}^+_{m\times n} = \mathbf{O}_{n\times m}$.

c) Az előző két eredményből azonnal következik.

d) Ha $\mathbf{x} \in \mathcal{S}(\mathbf{A})$ és $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, akkor $\mathbf{A}^+\mathbf{y} = \mathbf{x}$, és mivel $\mathbf{y} \in \mathcal{O}(\mathbf{A}) = \mathcal{S}(\mathbf{A}^+)$, ezért $(\mathbf{A}^+)^+\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Ha pedig $\mathbf{z} \perp \mathcal{O}(\mathbf{A}^+) = \mathcal{S}(\mathbf{A})$, akkor $(\mathbf{A}^+)^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$, azaz az $\mathbf{A}$ és az $(\mathbf{A}^+)^+$ mátrixokhoz tartozó leképezések megegyeznek az $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ és az $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ altereken, így az általuk kifeszített téren, azaz $\mathbb{R}^n$-en is. Tehát $\mathbf{A} = (\mathbf{A}^+)^+$.

e) Jelölje $\mathbb{R}^n$ standard bázisának elemeit $\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, $\mathbb{R}^m$ standard bázisának elemeit $\mathbf{f}_i$ $(i = 1, 2, \dots, m)$. Ha $a_{ii} \neq 0$, akkor $\mathbf{A}\mathbf{e}_i = a_{ii}\mathbf{f}_i$, és $\mathbf{e}_i$ a sortérben, $\mathbf{f}_i$ az oszloptérben van. Ha $a_{ii} = 0$, akkor $\mathbf{A}\mathbf{e}_i = \mathbf{0}$. Így $\mathbf{A}^+\mathbf{f}_i = {}^1/_{a_{ii}}\mathbf{e}_i$ ha $a_{ii} \neq 0$ és $\mathbf{A}^+\mathbf{f}_i = \mathbf{0}$ egyébként. $\mathbf{A}^+$ mátrixának ezek az oszlopvektorai, így a főátlójában ${}^1/_{a_{ii}}$ áll, ha $a_{ii} \neq 0$, egyebütt 0. Gondoljuk meg, miért elég megadni $\mathbf{A}^+$ hatását csak a báziselemeken? □

Először konstruktív módon megmutatjuk, hogy minden mátrixnak létezik pszeudoinverze, majd bizonyítjuk annak egyértelműségét is.

7.57. TÉTEL (A PSZEUDOINVERZ MÁTRIXA). *Ha a valós* $\mathbf{A}$ *mátrix teljes oszloprangú, akkor*

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}, \tag{7.10}$$

ha teljes sorrangú, akkor

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T})^{-1}. \tag{7.11}$$

Legyen $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}$*, ahol* $\mathbf{B}$ *egy teljes oszloprangú,* $\mathbf{C}$ *egy teljes sorrangú mátrix (ilyen felbontás mindig létezik, pl. ilyen a bázisfelbontás). Ekkor*

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^+ = \mathbf{C}^+\mathbf{B}^+ &= \mathbf{C}^\mathsf{T}(\mathbf{C}\mathbf{C}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T} && (7.12)\\ &= \mathbf{C}^\mathsf{T}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{C}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}. && (7.13) \end{aligned}$$

Bizonyítás. Ha $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú, akkor értelmezési tartományának minden vektora a sortérben van, így minden $\mathbf{x}$ vektorra az $\mathbf{Ax}$ vektorból vissza kell kapnunk $\mathbf{x}$-et egy megfelelő mátrixszal való szorzással. Mivel teljes oszloprangú $\mathbf{A}$ mátrixra $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ invertálható, ezért a (7.10)-beli mátrix megfelelő, hisz

$$(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Meg kell még mutatnunk, hogy ha $\mathbf{z}$ merőleges az oszloptérre, azaz ha $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, vagyis ha $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{z} = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{A}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$, de ez valóban igaz, hisz ekkor $(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{z} = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Ha $\mathbf{A}$ teljes sorrangú, akkor az oszloptér megegyezik az egész térrel, így az oszloptér bármely $\mathbf{y}$ vektora esetén az $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ egyenletrendszer konzisztens. Ha $\hat{\mathbf{x}}$ jelöli az egyetlen sortérbe eső megoldást, akkor minden más $\mathbf{x}$ megoldás esetén $\operatorname{proj}_{\mathcal{S}(\mathbf{A})}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$. Így $\mathbf{A}^+$-ra fenn kell állnia az $\mathbf{A}^+\mathbf{y} = \hat{\mathbf{x}}$ összefüggésnek. Ez pedig fönnáll, hisz

$$\operatorname{proj}_{\mathcal{S}(\mathbf{A})}\mathbf{x} = \mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T})^{-1}\right)(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{A}^+\mathbf{y}.$$

Végül az általános esetben legyen $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$, továbbá $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$, $\mathbf{w} = \mathbf{Cx}$ és $\mathbf{y} = \mathbf{Bw}$. Mivel $\mathbf{B}$ teljes oszloprangú, $\mathbf{C}$ teljes sorrangú, ezért $\mathbf{C}^+\mathbf{B}^+\mathbf{y} = \mathbf{C}^+\mathbf{w} = \mathbf{x}$, vagyis a $\mathbf{C}^+\mathbf{B}^+$ teljesíti a definíció *a)* feltételét. A *b)* is teljesül, hisz $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ oszloptere megegyezik, így $\mathbf{B}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$, tehát $\mathbf{C}^+\mathbf{B}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$ is fennáll. A (7.12) és a (7.13) képletek behelyettesítéssel, majd az $(\mathbf{C}\mathbf{C}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1} = (\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{C}^\mathsf{T})^{-1} = (\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{C}^\mathsf{T})^{-1}$ átalakítással azonnal adódnak. □

► A (7.10) képlet tökéletes összhangban van az egyenletrendszer optimális megoldásáról szóló 7.46. tétel állításával. Ott arra jutottunk, hogy az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer optimális megoldásai megegyeznek az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldásaival. Ha pedig $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú, akkor $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ invertálható, így az optimális megoldás $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$, azaz a (7.10) képlet szerint $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$, ahogy azt célul tűztük ki e paragrafus elején.

► Általában nem igaz a pszeudoinverzre az $(\mathbf{XY})^+ = \mathbf{Y}^+\mathbf{X}^+$ összefüggés. Csak azt bizonyítottuk, hogy fennáll, ha $\mathbf{X}$ teljes oszloprangú, és $\mathbf{Y}$ teljes sorrangú.

7.58. PÉLDA (A PSZEUDOINVERZ KISZÁMÍTÁSA). *Számítsuk ki a*

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \textit{és} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixok pszeudoinverzét!

Megoldás. Mivel $\mathbf{B}$ teljes oszloprangú, ezért a (7.10) képlet szerint

$$\mathbf{B}^+ = (\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

A $\mathbf{C}$ mátrix teljes sorrangú, így a (7.11) képlet szerint

$$\mathbf{C}^+ = \mathbf{C}^\mathsf{T}(\mathbf{C}\mathbf{C}^\mathsf{T})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{M}^+$ kiszámításához első lépésként meghatározzuk $\mathbf{M}$ bázisfelbontását. Mivel $\operatorname{rref}(\mathbf{M}) = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, és $\mathbf{M}$ első két oszlopa bázisoszlop, ezért

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A feladat első felében használt jelölésekkel $\mathbf{M} = \mathbf{B}\mathbf{C}$, így a (7.12) képlettel számolva – és fölhasználva az előbb kiszámolt pszeudoinverzeket

$$\mathbf{M}^+ = \mathbf{C}^+\mathbf{B}^+ = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Számolhatunk közvetlenül a (7.13) képlettel is:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^+ &= \mathbf{C}^\mathsf{T}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{M}\mathbf{C}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

A pszeudoinverz tulajdonságai Az $\mathbf{A}$ mátrix inverzét az $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{I}$ egyenlőséggel definiáltuk. Hasonló egyenlőségeket keresünk a pszeudoinverhez is. Közben azt a fontos tényt is fölfedezzük, hogy $\mathbf{A}^+\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}\mathbf{A}^+$ is egy-egy merőleges vetítés mátrixa.

Azt nem tudjuk garantálni, hogy az $\mathbf{A}\mathbf{A}^+$ és az $\mathbf{A}^+\mathbf{A}$ mátrixok az egységmátrixszal legyenek egyenlők, de legalább szimmetrikusak, és az $\mathbf{A}$-val, illetve az $\mathbf{A}^+$-szal való szorzásra nézve egységmátrixként viselkednek, azaz $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$. E feltételek már elegendők lesznek a pszeudoinverz algebrai leírásához.

7.59. TÉTEL (MOORE–PENROSE-TÉTEL). *A valós $\mathbf{A}$ mátrixnak $\mathbf{X}$ pontosan akkor pszeudoinverze, ha az alábbi négy feltétel mindegyike fennáll:*

$$a)\ \mathbf{AXA} = \mathbf{A}, \quad b)\ \mathbf{XAX} = \mathbf{X}, \quad c)\ (\mathbf{AX})^\mathsf{T} = \mathbf{AX}, \quad d)\ (\mathbf{XA})^\mathsf{T} = \mathbf{XA}.$$

BIZONYÍTÁS. Azt, hogy $\mathbf{A}$ pszeudoinverze teljesíti e négy feltételt, egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhetjük.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} &= \mathbf{A}\mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{R}\mathbf{R}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}\\
&= \mathbf{B}\mathbf{R}\mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{R}\mathbf{R}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{R} = \mathbf{B}\mathbf{R} = \mathbf{A}\\
\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ &= \mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{R}\mathbf{R}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{R}\mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{R}\mathbf{R}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}\\
&= \mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{R}\mathbf{R}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T} = \mathbf{A}^+
\end{aligned}$$

A *c)* és az *d)* ellenőrzéséhez egyszerűsítsük az $\mathbf{A}^+\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}\mathbf{A}^+$ kifejezéseket:

$$\mathbf{A}^+\mathbf{A} = (\mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{R}\mathbf{R}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T})(\mathbf{B}\mathbf{R}) = \mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{R}\mathbf{R}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{R}, \tag{7.14}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = (\mathbf{B}\mathbf{R})(\mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{R}\mathbf{R}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}) = \mathbf{B}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}. \tag{7.15}$$

Ezeket fölhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^\mathsf{T} &= (\mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{R}\mathbf{R}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{R})^\mathsf{T} = \mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{R}\mathbf{R}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{R} = \mathbf{A}^+\mathbf{A}\\
(\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^\mathsf{T} &= (\mathbf{B}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = \mathbf{B}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T} = \mathbf{A}\mathbf{A}^+,
\end{aligned}$$

ami bizonyítja az *c)* és az *d)* egyenlőségeket. Már csak azt kell bizonyítani, hogy ezeket az összefüggéseket legföljebb csak egy mátrix teljesíti. Tegyük fel, hogy $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ is teljesíti a négy feltételt. Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathbf{AY} &\overset{a)}{=} \mathbf{AXAY} \overset{c)}{=} (\mathbf{AX})^\mathsf{T}(\mathbf{AY})^\mathsf{T} = \mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Y}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\\
&= \mathbf{X}^\mathsf{T}(\mathbf{AYA})^\mathsf{T} \overset{a)}{=} \mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T} = (\mathbf{AX})^\mathsf{T} \overset{c)}{=} \mathbf{AX} && (7.16)\\
\mathbf{YA} &\overset{a)}{=} \mathbf{YAXA} \overset{d)}{=} (\mathbf{YA})^\mathsf{T}(\mathbf{XA})^\mathsf{T} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Y}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{X}^\mathsf{T}\\
&= (\mathbf{AYA})^\mathsf{T}\mathbf{X}^\mathsf{T} \overset{a)}{=} \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{X}^\mathsf{T} = (\mathbf{XA})^\mathsf{T} \overset{d)}{=} \mathbf{XA} && (7.17)\\
\mathbf{Y} &\overset{b)}{=} \mathbf{YAY} \overset{(7.16)}{=} \mathbf{YAX} \overset{(7.17)}{=} \mathbf{XAX} \overset{b)}{=} \mathbf{X}.
\end{aligned}$$

Ezzel bizonyítottuk a tételt. □

7.60. KÖVETKEZMÉNY ($\mathbf{A}^+\mathbf{A}$ ÉS $\mathbf{A}\mathbf{A}^+$ MERŐLEGES VETÍTÉS). *Tetszőleges $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix esetén*

$$\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \operatorname{proj}_{\mathcal{S}(\mathbf{A})} \quad \textit{és} \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \operatorname{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})}.$$

Tehát $\mathbf{A}^+\mathbf{A}$ az $\mathbb{R}^n$ teret merőlegesen vetíti $\mathbf{A}$ sorterére, míg $\mathbf{A}\mathbf{A}^+$ az $\mathbb{R}^m$ teret merőleges vetíti $\mathbf{A}$ oszlopterére.

Bizonyítás. A (7.14) egyenlőség szerint $\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{R}\mathbf{R}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{R}$, ami az altérre való merőleges vetítés mátrixáról szóló 7.39. tétel szerint az $\mathbf{R}^\mathsf{T}$ oszlopvektorai által kifeszített térre – azaz a sortérre – való merőleges vetítés mátrixa. Hasonlóképp a (7.15) egyenlet szerint $\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{B}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}$, ami a $\mathbf{B}$ oszlopvektorai által kifeszített térre – azaz az oszloptérre – való merőleges vetítés mátrixa. □

A pszeudoinverz és a minimális abszolút értékű optimális megoldás Megmutatjuk, hogy $\mathbf{A}^+$ úgy használható egy tetszőleges együtthatómátrixú $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer optimális megoldásának meghatározására, ahogy $\mathbf{A}^{-1}$ használható akkor, ha $\mathbf{A}$ invertálható.

7.61. tétel (Optimális megoldás pszeudoinverzzel). *Legyen $\mathbf{A}$ egy valós mátrix. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek az $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$ a minimális abszolút értékű optimális megoldása.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy $\mathbf{A}^+\mathbf{b}$ optimális megoldás, azaz megoldása az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$ normálegyenlet-rendszernek. Tehát igazolni kell, hogy $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{b} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$. Ehhez elég belátni, hogy $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^\mathsf{T}$. Legyen $\mathbf{A} = \mathbf{BR}$ az $\mathbf{A}$ mátrix bázisfelbontása. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{A}^+ &= (\mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{B}^\mathsf{T})(\mathbf{B}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}) \\ &= \mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T} = \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{B}^\mathsf{T} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{A}^+\mathbf{b}$ a definícióból következőleg a sortérben van, és a sortérbe csak egyetlen optimális megoldás – a minimális abszolút értékű megoldás – esik, ezért $\mathbf{A}^+\mathbf{b}$ valóban a minimális abszolút értékű optimális megoldás. □

A gyakorlatban gyakran előfordul, hogy mért adatokból kell bizonyos változók értékét meghatározni. Ha az n ismeretlen értékre a mérési hibákat kiküszöbölendő n-nél több mérést végzünk, az egyenletrendszer könnyen ellentmondásossá válhat. Ehhez hasonló esetet mutat a következő példa.

7.62. példa (Egyenletrendszer optimális megoldása). *Az alábbi háromismeretlenes egyenletrendszer négy egyenletből áll:*

$$\begin{aligned} x + 3y + 6z &= 8 \\ x - y + 2z &= 2 \\ x + 3y + 2z &= 2 \\ x - y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Bármelyik három egyértelműen megoldható egyenletrendszert ad, de a négy együtt ellentmondásos. Határozzuk meg az optimális megoldását!

MEGOLDÁS. A 7.61. tétel szerint az optimális megoldás $\mathbf{A}^+\mathbf{b}$, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mivel $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú, ezért csak egyetlen optimális megoldása van, másrészt pszeudoinverze a (7.10) képlettel számolható, így

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & -1/4 & 1/4 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & -1/8 & -1/8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^+\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Így az egyenletrendszer optimális megoldása $(1, 0, 1)$. □

A következő példa olyan egyenletrendszert vizsgál, melyben az együtthatómátrix rangja kisebb mind az egyenletek, mind az ismeretlenek számánál.

7.63. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER OPTIMÁLIS MEGOLDÁSA). *Oldjuk meg az*

$$\begin{aligned} y + z &= 3 \\ x + y + 2z &= 2 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Ha nem oldható meg, akkor határozzuk meg minimális abszolút értékű optimális megoldását!

MEGOLDÁS. Az egyenletrendszer nem oldható meg, ami bővített mátrixának redukált lépcsős alakjából leolvasható:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Az együtthatómátrix pszeudoinverzét meghatároztuk a 10.10. példában. Ezt felhasználva a minimális abszolút értékű optimális megoldás

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+\mathbf{b} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

□

Feladatok

Pszeudoinverz

Számítsuk ki az alábbi mátrixok pszeudoinverzét!

7.18.• $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$

7.19.• $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$

7.20. $\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}$

7.21. $\begin{bmatrix}0 & 2\\0 & 2\end{bmatrix}$

7.22. $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

7.23. $\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}$

7.24. $\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$

7.25. $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

7.26. $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$

Az alábbi feladatokban határozzuk meg a felbontásaikkal megadott mátrixok pszeudoinverzét!

7.27. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

7.28. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

7.29. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\1 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{bmatrix}$

7.30. PSZEUDOINVERZ MÁTRIXA Tetszőleges $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixnak létezik pszeudoinverze és az egyértelmű.

7.31. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ egy merőleges vetítés mátrixa, azaz $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A} = \mathbf{A}^2$, akkor $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}$. Igaz-e az állítás megfordítása?

7.32.• Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ és $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú, akkor $\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{I}_m$, ha pedig $\mathbf{A}$ teljes sorrangú, akkor $\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{I}_n$.

7.33. 1-RANGÚ MÁTRIXOK PSZEUDOINVERZE Mutassuk meg, hogy ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 1$, akkor

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{\operatorname{trace}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})}\mathbf{A}^\mathsf{T},$$

ahol $\operatorname{trace}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ elemeinek négyzetösszege. Eszerint ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, akkor

$$\mathbf{a}^+ = \frac{1}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}}\mathbf{a}^\mathsf{T} = \frac{1}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}^\mathsf{T}.$$

E feladat eredményét fölhasználva ellenőrizzük a 7.18., 7.19., 7.20., 7.21., 7.23., 7.25., 7.26. feladatok eredményeit!

7.34. BLOKKDIAGONÁLIS MÁTRIX PSZEUDOINVERZE Igazoljuk, hogy blokkdiagonális mátrix esetén

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{O}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{A}_k\end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix}\mathbf{A}_1^+ & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2^+ & \dots & \mathbf{O}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{A}_k^+\end{bmatrix}.$$

7.35. Számítsuk ki a

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

mátrix pszeudoinverzét!

Ortonormált bázis – ortogonális mátrix

Nem kell indokolni a merőlegesség fontosságát bizonyos természeti jelenségek leírásában. A lineáris algebrában is nélkülözhetetlen a fogalma. Egy altér ortonormált bázisának megkonstruálása, és azoknak a leképezéseknek az áttekintése, melyek ortonormált bázist ortonormáltba visznek alapvetően fontosak.

Ortogonális mátrixok

Ortogonális és ortonormált bázis Segíti az alterek vizsgálatát, ha a bázisvektorok páronként merőlegesek egymásra, ekkor ugyanis a különböző bázisvektorok skaláris szorzata 0. További könnyítést jelenthet, ha a bázisvektorok egységvektorok, mert ekkor egy vektor velük vett skaláris szorzata a merőleges vetület hosszát adja.

Páronként merőleges vektorok egy rendszerét *ortogonális rendszernek* nevezzük. Ortogonális rendszernek lehetnek 0-vektor tagjai. Páronként merőleges egységvektorok egy rendszerét *ortonormált rendszernek* nevezzük. Ortonormált rendszerben *nincsenek* 0-vektorok. A következő tételből azonnal adódik, hogy zérusvektort nem tartalmazó ortogonális rendszer vagy egy tetszőleges ortonormált rendszer mindig bázisa az általa kifeszített altérnek. Ezt az altér *ortogonális bázisának* (rövidítve OB), illetve *ortonormált bázisának* (rövidítve ONB) nevezzük. Ortogonális bázisból mindig kaphatunk egy ortonormáltat, ha az OB minden bázisvektorát elosztjuk a hosszával. Ezt a vektor *normálásának* nevezzük.

7.64. TÉTEL (ORTOGONÁLIS VEKTOROK FÜGGETLENSÉGE). *Ha a nullvektortól különböző $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,..., $\mathbf{a}_k$ vektorok páronként ortogonálisak, akkor függetlenek is.*

BIZONYÍTÁS. Tekintsük a $c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ egyenletet. Be kell látnunk, hogy ez csak a $c_1 = \cdots = c_k = 0$ esetben áll fönn. Szorozzuk be az egyenlőség mindkét oldalát az $\mathbf{a}_i$ vektorral ($i = 1, 2, \ldots, k$). Ekkor a jobb oldal 0, a bal oldalon pedig egy tag kivételével mindegyik 0 lesz:

$$\begin{aligned}(c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_k\mathbf{a}_k) \cdot \mathbf{a}_i &= \mathbf{0} \cdot \mathbf{a}_i \\ c_i\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i &= 0.\end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i \neq 0$, ezért $c_i = 0$, és ez igaz minden i-re. □

Tudjuk, hogy a háromdimenziós térben bármely $\mathbf{v} = (x, y, z)$ vektor koordinátáira igaz, hogy

$$x = \mathbf{v} \cdot \mathbf{i}, \quad y = \mathbf{v} \cdot \mathbf{j}, \quad z = \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}.$$

Az is igaz, hogy az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ által kifeszített síknak, azaz az xy-síknak a $\mathbf{v}$ vektorhoz legközelebb fekvő pontja, illetve az oda mutató helyvektor $\hat{\mathbf{v}} = (x, y, 0)$, azaz

$$\hat{\mathbf{v}} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j}$$

Azt is tudjuk, hogy a $\mathbf{v}$-hez legközelebbi pont épp $\mathbf{v}$-nek a síkra való merőleges vetülete.

A fenti nyilvánvaló összefüggések tetszőleges ONB esetén is használhatók, így igen értékesek.

7.65. TÉTEL (LEGJOBB KÖZELÍTÉS ONB ESETÉN). *Adva van az $\mathbb{R}^n$ térben egy $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k\}$ ortonormált rendszer által kifeszített $\mathcal{A}$ altér, valamint egy $\mathbf{v}$ vektor. Ekkor a*

$$\hat{\mathbf{v}} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + \dots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k \tag{7.18}$$

vektor az $\mathcal{A}$ altér $\mathbf{v}$-hez legközelebb fekvő pontja, azaz $\hat{\mathbf{v}} = \operatorname{proj}_{\mathcal{A}} \mathbf{v}$.

BIZONYÍTÁS. Először megmutatjuk, hogy a (7.18) képlet szerinti pont van legközelebb $\mathbf{v}$-hez. $\mathbf{v}$ és $\hat{\mathbf{v}}$ távolságának négyzete

$$\begin{aligned}(\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}})^2 &= \left(\mathbf{v} - \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i\right)^2 \\ &= \mathbf{v}^2 - 2\sum_{i=1}^{k} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)^2 + \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)^2 \\ &= \mathbf{v}^2 - \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)^2.\end{aligned}$$

$\mathbf{v}$ és az altér egy tetszőleges $\mathbf{u}$ vektorának távolságnégyzete:

$$\begin{aligned}(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 &= \left(\mathbf{v} - \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{e}_i\right)^2 \\ &= \mathbf{v}^2 - 2\sum_{i=1}^{k} c_i (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) + \sum_{i=1}^{k} c_i^2.\end{aligned}$$

Ha az utóbbiból kivonva az előbbit pozitív értéket kapunk, ez azt jelenti, hogy valóban $\hat{\mathbf{v}}$ van $\mathbf{v}$-hez legközelebb:

$$\begin{aligned}&(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 - (\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}})^2 \\ &\quad= \left(\mathbf{v}^2 - 2\sum_{i=1}^{k} c_i (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) + \sum_{i=1}^{k} c_i^2\right) - \left(\mathbf{v}^2 - \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)^2\right) \\ &\quad= \sum_{i=1}^{k} c_i^2 - 2\sum_{i=1}^{k} c_i (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) + \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)^2 \\ &\quad= \sum_{i=1}^{k} (c_i - \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Ebből a legjobb közelítés tétele szerint kapjuk, hogy $\hat{\mathbf{v}} = \operatorname{proj}_{\mathcal{A}} \mathbf{v}$. □

7.66. PÉLDA (EGY PONT SÍKRA VALÓ MERŐLEGES VETÜLETE). *Határozzuk meg a* $(3, 1, 2)$ *pontnak az egymásra merőleges* $\mathbf{a} = \frac{1}{7}(2, 3, 6)$ *és* $\mathbf{b} = \frac{1}{7}(3, -6, 2)$ *vektorok által kifeszített síkra való merőleges vetületét!*

MEGOLDÁS. Mivel **a** és **b** ortonormált bázisa az általuk kifeszített altérnek, ezért a $\mathbf{v} = (3, 1, 2)$ vektornak e síkra eső merőleges vetülete

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{v}} &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b} \\
&= \left((3, 1, 2) \cdot \left(\tfrac{2}{7}, \tfrac{3}{7}, \tfrac{6}{7}\right)\right) \left(\tfrac{2}{7}, \tfrac{3}{7}, \tfrac{6}{7}\right) + \left((3, 1, 2) \cdot \left(\tfrac{3}{7}, \tfrac{-6}{7}, \tfrac{2}{7}\right)\right) \left(\tfrac{3}{7}, \tfrac{-6}{7}, \tfrac{2}{7}\right) \\
&= 3\left(\tfrac{2}{7}, \tfrac{3}{7}, \tfrac{6}{7}\right) + 1\left(\tfrac{3}{7}, \tfrac{-6}{7}, \tfrac{2}{7}\right) \\
&= \left(\tfrac{9}{7}, \tfrac{3}{7}, \tfrac{20}{7}\right).
\end{aligned}$$

Összehasonlításul: a standard elemi módszer az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ irányvektorú, $(3, 1, 2)$ ponton átmenő egyenes és a sík metszéspontjának meghatározása lenne. □

Ortogonális mátrixok Egy ortonormált vektorrendszerből képzett mátrixnak gyönyörű algebrai és geometriai tulajdonságai vannak.

7.67. DEFINÍCIÓ (ORTOGONÁLIS ÉS SZEMIORTOGONÁLIS MÁTRIX). *Egy valós négyzetes mátrixot* ortogonálisnak *nevezünk, ha oszlopvektorai vagy sorvektorai ortonormált rendszert alkotnak. Ha nem kötjük ki, hogy a mátrix négyzetes legyen,* szemiortogonális *mátrixról beszélünk.*

► Látni fogjuk, hogy az ortogonális mátrixok definíciójában elég csak az oszlopvektorok vagy csak a sorvektorok ortonormalitását kikötni, mert mindegyikből következik a másik. Ha azonban egy mátrix nem négyzetes, akkor vagy csak az oszlopvektorai, vagy csak a sorvektorai alkothatnak ONR-t. Ha például az $n \times k$ méretű **Q** mátrix szemiortogonális, akkor $k \leq n$ pontosan akkor áll fenn, ha **Q** oszlopvektorai alkotnak ONR-t. Az ugyanis, hogy valamely vektorok ONR-t alkotnak, maga után vonja lineáris függetlenségüket is.
► Nagyon szerencsétlen az ortogonális mátrix elnevezés, de annyira el van terjedve, hogy nem lehet eltérni tőle. Nyilván jobb lenne az ortonormált mátrix elnevezés.
► Minden ortogonális mátrix egyúttal szemiortogonális is.

7.68. PÉLDA (ORTOGONÁLIS MÁTRIXOK). *Melyek ortogonálisak és melyek szemiortogonálisak az alábbi mátrixok közül?*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. Mindhárom mátrix szemiortogonális, hisz oszlopvektorai vagy sorvektorai ortonormált rendszert alkotnak (az $\mathbf{A}$ mátrix sorai $\mathbb{R}^4$ standard egységvektorai közül valók, a $\mathbf{B}$ mátrix oszlopvektorai az $\mathbb{R}^4$ első két standard egységvektorának xy-síkban α szöggel való elforgatásával kaphatók, a $\mathbf{C}$ mátrix esetén az oszlopvektorok skaláris szorzatainak elvégzésével ellenőrizhetjük ortonormalitásukat). A három mátrix közül csak a $\mathbf{C}$ négyzetes, így csak ez ortogonális. □

► Könnyen látható, hogy minden permutációmátrix, így az egységmátrix is, ortogonális.

7.69. tétel (Szemiortogonális mátrixok ekvivalens definíciói). *Legyen $m \geq n$ és $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Az alábbi állítások ekvivalensek:*
a) $\mathbf{Q}$ *szemiortogonális,*
b) $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$.

► Hasonlóképp $m \leq n$ esetén $\mathbf{Q}$ pontosan akkor szemiortogonális, ha $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{I}_m$.
► A *b)* állítás algebrai nyelven azt mondja, hogy $m \geq n$ esetén $\mathbf{Q}$ pontosan akkor szemiortogonális, ha transzponáltja a bal oldali inverze.

Bizonyítás. *a)* $\Rightarrow$ *b)*: Ha $\mathbf{Q}$ szemiortogonális és $m \geq n$, akkor $\mathbf{Q}$ oszlopai alkotnak ONR-t. Legyen $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1\ \mathbf{q}_2\ \ldots\ \mathbf{q}_n]$. Ekkor $[\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q}]_{ij} = \mathbf{q}_i^\mathsf{T}\mathbf{q}_j = \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j$, de mivel a $\{\mathbf{q}_i\}$ vektorrendszer ortonormált, ezért $\mathbf{q}_i^2 = 1$ és $\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j = 0$, ha $i \neq j$. Eszerint $[\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q}]_{ii} = 1$, és $[\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q}]_{ij} = 0$, ha $i \neq j$ és $i, j \leq k$, vagyis $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}_k$.

b) $\Rightarrow$ *a)*: A $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}_k$ összefüggésbeli mátrixszorzást sorvektorszor oszlopvektorként tekintve épp azt kapjuk, hogy $\mathbf{q}_i^2 = 1$ és $\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j = 0$, ha $i \neq j$, azaz a $\{\mathbf{q}_i\}$ vektorrendszer ortonormált. □

7.70. tétel (Ortogonális mátrixok ekvivalens definíciói). *Legyen $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Az alábbi állítások ekvivalensek:*
a) $\mathbf{Q}$ *oszlopvektorai ortonormált rendszert alkotnak.*
b) $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$.
c) $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}$.
d) $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{I}_n$.
e) $\mathbf{Q}$ *sorvektorai ortonormált rendszert alkotnak.*

Bizonyítás. Az *a)* $\Leftrightarrow$ *b)* ekvivalenciát az előző állításban bizonyítottuk.

b) $\Rightarrow$ *c)*: Mivel $\mathbf{Q}$ négyzetes, ezért a $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ összefüggés egyúttal azt is jelenti, hogy $\mathbf{Q}$ invertálható, tehát $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{Q}^\mathsf{T}$ egymás inverzei, azaz $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}$.

c) $\Rightarrow$ *d)*: Mivel $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}$, ezért $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{I}_n$.

d) $\Rightarrow$ *e)*: A $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{I}_n$ egyenletben a mátrixszorzásra sorvektorszor-oszlopvektorként tekintve épp azt kapjuk, hogy $\mathbf{Q}^\mathsf{T}$ oszlopvektorai – és így $\mathbf{Q}$ soravektorai – ONB-t alkotnak.

e) $\Rightarrow$ *a)*: Az előzőekben beláttuk, hogy *a)*-ból következik *e)*, azaz ha $\mathbf{Q}$ oszlopvektorai ONB-t alkotnak, akkor sorvektorai is. Ezt $\mathbf{Q}^\mathsf{T}$-ra alkalmazva azt kapjuk, hogy ha $\mathbf{Q}$ sorvektorai ONB-t alkotnak, akkor oszlopvektorai is. □

7.71. PÉLDA (ORTOGONÁLIS MÁTRIXOK INVERZE). *Számítsuk ki az*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

mátrixok inverzét!

MEGOLDÁS. Mindhárom mátrix ortogonális (az első permutációmátrix, a harmadik ortogonalitását a 7.68. példában ellenőriztük), így az előző tétel szerint inverzük megegyezik transzponáltjukkal, tehát az inverzek:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

□

Ortogonális mátrixok geometriája Ortogonális mátrixhoz tartozó mátrixleképezés ONB-t ONB-ba visz úgy, ahogy a síkban vagy térben a forgatás és a tükrözés.

7.72. TÉTEL (ORTOGONÁLIS MÁTRIXHOZ TARTOZÓ MÁTRIXLEKÉPEZÉS). *Legyen* $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Az alábbi állítások ekvivalensek:*

a) $\mathbf{Q}$ *ortogonális.*

b) $|\mathbf{Q}\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$ *minden* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *vektorra.*

c) $\mathbf{Q}\mathbf{x} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ *minden* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *vektorra.*

BIZONYÍTÁS. *a)* $\Rightarrow$ *b)*: Ha $\mathbf{Q}$ ortogonális, akkor $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, így tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektorra

$$|\mathbf{Q}\mathbf{x}|^2 = \mathbf{Q}\mathbf{x} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{x} = (\mathbf{Q}\mathbf{x})^\mathsf{T}(\mathbf{Q}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2.$$

b) $\Rightarrow$ *c)*: A *b)*-ből következik, hogy

$$|\mathbf{Q}(\mathbf{x}+\mathbf{y})| = |\mathbf{x}+\mathbf{y}| \quad \text{és} \quad |\mathbf{Q}(\mathbf{x}-\mathbf{y})| = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|.$$

Ezt, és a skalárszorzás és az abszolút érték közti kapcsolatot megadó

(1.8) egyenletet fölhasználva kapjuk, hogy minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorra

$$\begin{aligned}\mathbf{Qx} \cdot \mathbf{Qy} &= \frac{1}{4}\left(|\mathbf{Qx} + \mathbf{Qy}|^2 - |\mathbf{Qx} - \mathbf{Qy}|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(|\mathbf{Q}(\mathbf{x} + \mathbf{y})|^2 - |\mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2\right) \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}\end{aligned}$$

c) $\Rightarrow$ *a)*: A $\mathbf{Q}$ mátrix i-edik oszlopát jelölje $\mathbf{q}_i$, azaz $\mathbf{q}_i = \mathbf{Qe}_i$, ahol $\mathbf{e}_i$ a standard bázis i-edik vektora. Ekkor

$$\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j = \mathbf{Qe}_i \cdot \mathbf{Qe}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j, \\ 1, & \text{ha } i = j. \end{cases}$$

Tehát $\mathbf{Q}$ oszlopvektorai ortonormált rendszert alkotnak, azaz $\mathbf{Q}$ ortogonális. □

► A tétel egyik állítása úgy is kimondható, hogy egy $\mathbf{Q}$ négyzetes mátrix pontosan akkor ortogonális, ha a $Q : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Qx}$ mátrixleképezés távolságtartó. A tétel másik állítása azt mondja, hogy $\mathbf{Q}$ pontosan akkor ortogonális, ha a Q megtartja a skaláris szorzatot.

► Hasonló állítás igaz szemiortogonális mátrixokra is (ld. **??**. feladat).

7.73. TÉTEL (ORTOGONÁLIS MÁTRIXOK TULAJDONSÁGAI).

a) *Ha* $\mathbf{Q}$ *valós ortogonális mátrix, akkor* $|\det(\mathbf{Q})| = 1$.

b) *Az* $n \times n$*-es valós ortogonális mátrixok* $O(n)$ *halmazából nem vezet ki a mátrixszorzás és invertálás művelete.*

BIZONYÍTÁS. *a)* Mivel $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, ezért $\det(\mathbf{Q}^\mathsf{T})\det(\mathbf{Q}) = \det(\mathbf{I}) = 1$, de $\det(\mathbf{Q}^\mathsf{T}) = \det(\mathbf{Q})$, így $\det(\mathbf{Q}) = 1$ vagy $\det(\mathbf{Q}) = -1$.

b) Ortogonális mátrix inverze megegyezik transzponáltjával, ami ugyancsak ortogonális, tehát inverze is az. Be kell még látni, hogy két ortogonális mátrix szorzata is ortogonális. Legyen $\mathbf{Q}_1$ és $\mathbf{Q}_2$ ortogonális. Ekkor

$$(\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2)^\mathsf{T}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_2^\mathsf{T}\mathbf{Q}_1^\mathsf{T}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_2^\mathsf{T}\mathbf{Q}_2 = \mathbf{I},$$

tehát $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$ valóban ortogonális. □

► Az is azonnal látható, hogy az $n \times n$-es 1 determinánsú valós ortogonális mátrixok halmazából sem vezet ki a mátrixszorzás és invertálás művelete. E mátrixhalmazt $SO(n)$ jelöli.

A valós ortogonális mátrixok $O(n)$ halmaza a mátrixszorzás műveletével *csoportot* alkot. Ezt ortogonális csoportnak nevezik. A csoportokról a függelékben írunk. Az 1 determinánsú ortogonális mátrixok $SO(n)$ csoportját speciális ortogonális csoportnak nevezik. $O(10)$ fontos szerepet játszik a modern fizika húrelméletében, mint a 10-dimenziós tér-idő szimmetriacsoportja.

A 2- és 3-dimenziós tér ortogonális transzformációi Forgatások és tükrözések segítségével leírhatók az ortogonális mátrixok.

7.74. TÉTEL. *Minden $O(2)$-be eső ortogonális mátrix vagy egy α szögű forgatás, vagy egy $\alpha/2$ szögű egyenesre való tükrözés mátrixa.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $\mathbf{Q} = \left[\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right]$. Ha e mátrix ortogonális, akkor oszlopvektorai ortonormált rendszert alkotnak, azaz

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1 \\ c^2 + d^2 &= 1 \\ ac + bd &= 0. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlet szerint $a^2c^2 = b^2d^2$, azaz $a^2(1-d^2) = (1-a^2)d^2$, amiből $a^2 = d^2$, és $b^2 = c^2$ adódik. Végül kapjuk, hogy vagy $d = a$ és $c = -b$, vagy $d = -a$ és $c = b$. Az első esetben $\det(\mathbf{Q}) = ad - bc = 1$, a másodikban $\det(\mathbf{Q}) = -1$. Vegyük észre, hogy bármely megoldáshoz egyértelműen találunk egy olyan $\alpha \in [0, 2\pi)$ valóst, hogy $a = \cos\alpha$ és $b = \sin\alpha$. Vagyis az összes másodrendű ortogonális mátrix

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \text{vagy} \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

alakba írható. Ha a determinánsa 1, akkor egy α szögű forgatás, ha determinánsa -1, akkor egy $\alpha/2$ szögű egyenesre való tükrözés mátrixa (ld. a 7.27. és a 7.32. pontokat). □

A 3-dimenziós eset kissé bonyolultabb. Számtalan klasszikus műszaki alkalmazásban – mindenek előtt a merev testek mozgásának leírásában – fontos szerepet játszanak $SO(3)$ elemei, azaz az 1 determinánsú ortogonális mátrixok. Ezek itt és nagyobb dimenzió esetén is a forgások mátrixai. A forgás azonban csak a 3-dimenzióban írható le úgy, mint egy tengely körül α szöggel való elfordulás. E tételt csak a sajátvektorok elméletének ismeretében fogjuk tudni bizonyítani (ld. **??** tétel).

7.75. PÉLDA (FORGATÁS TENGELYE ÉS SZÖGE). *Az 1 determinánsú ortogonális*

$$\frac{1}{15}\begin{bmatrix} 14 & -5 & 2 \\ 5 & 10 & -10 \\ 2 & 10 & 11 \end{bmatrix}$$

mátrix milyen tengely körüli és mekkora szöggel való forgatás mátrixa?

MEGOLDÁS. Ha $\mathbf{A}$ egy 0-tól különböző szöggel való forgatás mátrixa, és $\mathbf{v}$ a tengely egy irányvektora, akkor csak $\mathbf{v}$ skalárszorosai fogják kielégíteni az $\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$ egyenletet. Ez ekvivalens a homogén lineáris

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

egyenletrendszerrel, melynek alakja és megoldása esetünkben

$$\frac{1}{15}\begin{bmatrix} -1 & -5 & 2 \\ 5 & -5 & -10 \\ 2 & 10 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát a forgástengely egy irányvektora a $\mathbf{v} = (2, 0, 1)$ vektor. A forgásszög, illetve a forgásszög koszinuszának meghatározásához elég egy olyan $\mathbf{w}$ vektort találni, mely a tengelyre merőleges síkban van. Ilyen például a $\mathbf{w} = (0, 1, 0)$ vektor. Ennek képe a forgatásnál

$$\frac{1}{15}\begin{bmatrix} 14 & -5 & 2 \\ 5 & 10 & -10 \\ 2 & 10 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}.$$

A forgásszög megegyezik e két vektor szögével, tehát

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{Aw}}{|\mathbf{w}||\mathbf{Aw}|} = \frac{2/3}{1\cdot 1} = \frac{2}{3}.$$

Ez összhangban van a 7.27. feladat eredményével, ahol e forgatást a tengely és a szög ismeretében kellett megkonstruálni. □

A harmadrendű -1 determinánsú ortogonális mátrixok, azaz $O(3) - SO(3)$ elemei ugyan nem mind tükrözések, de egy tükrözés és egy forgatás egymás utáni alkalmazásával megkaphatók (ld. **??** tétel)!

*Givens-forgatás, Householder-tükrözés** Az n-dimenziós tér forgatásai és tükrözései közül kiválaszthatunk olyan egyszerű, ún. primitív ortogonális transzformációkat, melyek mátrixai szorzataként az összes ortogonális mátrix előállítható. E transzformációkat több hatékony numerikus matematikai módszer is használja.

Azt a forgatást, mely egy koordinátasík vektorain kívül minden más vektort helyben hagy, *Givens-forgatásnak* nevezzük. Az i-edik és j-edik koordinátatengely síkját érintő forgatás mátrixa

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \cos\alpha & \dots & -\sin\alpha & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \sin\alpha & \dots & \cos\alpha & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

amit úgy kapunk meg, hogy az egységmátrix i-edik és j-edik sorának és oszlopának metszetében lévő négy helyre az α szögű forgatás mátrixát tesszük.

E forgatással elérhető például, hogy egy $\mathbf{x}$ vektort egy olyan vektorba forgassunk, melynek j-edik koordinátája 0. Csak az i-edik és j-edik sorokat és oszlopokat kiemelve

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ebből látható, hogy az

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\alpha &= a/r \\ \sin\alpha &= -b/r \end{aligned} \tag{7.19}$$

egyenletek segítségével fölírható a forgatómátrix az a és b ismeretében. Ez használható mátrix háromszögalakra hozásában, például a következőkben vizsgált QR-felbontás Givens-forgatások segítségével is elvégezhető (ld. 7.83. példa). Ennek előnyei a ritka mátrixok esetén mutatkoznak, és a számítások párhuzamosíthatóak is.

Egy adott $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektorra, vagy az $\mathbf{e} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ egységvektorra merőleges hipersíkra való tükrözést *Householder-tükrözésnek* nevezzük. Mátrixa

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^\mathsf{T}$$

Feladatként az Olvasóra hagyjuk annak bizonyítását, hogy e transzformáció valóban helyben hagyja az $\mathbf{e}^\perp$ tér összes vektorát és $-\mathbf{e}$-be viszi az $\mathbf{e}$ vektort (ld. **??**. feladat). E tükrözés is használható egy mátrix háromszögalakra hozásához, QR-felbontásának megkonstruálásához. Ehhez szükség lesz az alábbi állításra.

7.76. ÁLLÍTÁS (EGY VEKTOR TÜKRÖZÉSE EGY MÁSIKBA). *Ha* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *két különböző, de azonos hosszúságú vektor* $\mathbb{R}^n$*-ben, akkor az* $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\perp$ *hipersíkra való Householder-tükrözés az* $\mathbf{a}$ *vektort* $\mathbf{b}$*-be viszi és viszont.*

BIZONYÍTÁS. Meg kell mutatnunk, hogy $\mathbf{Ha} = \mathbf{b}$ és $\mathbf{Hb} = \mathbf{a}$, ahol

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{2}{(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\mathsf{T}(\mathbf{a}-\mathbf{b})}(\mathbf{a}-\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\mathsf{T}.$$

Kihasználjuk, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ azonos hosszúságúak, így $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a} = \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b}$, és hogy a skaláris szorzás felcserélhető, azaz $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{b} = \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{a}$. Így

$$(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\mathsf{T}(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a} - \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{b} - \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{a} + \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b} = 2(\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a} - \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{a}) = 2(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\mathsf{T}\mathbf{a}.$$

Eszerint

$$\begin{aligned} \mathbf{Ha} &= \mathbf{a} - \frac{2}{(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\mathsf{T}(\mathbf{a}-\mathbf{b})}(\mathbf{a}-\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\mathsf{T}\mathbf{a} \\ &= \mathbf{a} - \frac{1}{(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\mathsf{T}\mathbf{a}}(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\mathsf{T}\mathbf{a}(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a} - (\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}$, ezért $\mathbf{Hb} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{a}$. □

7.77. példa (Householder-tükrözés). *Határozzuk meg azt a* $\mathbf{H}$ *mátrixot, mely az* $(1,-1,-1,1)$ *vektort olyan vektorba viszi, melynek az elsőt kivéve minden koordinátája* 0.

Megoldás. $|(1,-1,-1,1)| = 2$, ezért a képvektor csak a $\pm(2,0,0,0)$ vektorok valamelyike lehet. Válasszuk a pozitív koordinátájút. Az $(1,-1,-1,1)-(2,0,0,0) = (-1,-1,-1,1)$ vektorra merőleges hipersíkra való tükrözés mátrixa

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Fejben számolva is könnyen ellenőrizhetjük, hogy $\mathbf{H}\cdot(1,-1,-1,1) = (2,0,0,0)$. □

Ortogonalizáció

*Gram–Schmidt-ortogonalizáció** Nagy előnyökkel jár, ha egy altérnek nem csak egy bázisát, hanem egy ortogonális bázisát ismerjük. E paragrafusban megmutatjuk, hogy ilyen bázis létezik, és eljárást adunk a megkonstruálására. Ezt az eljárást Gram–Schmidt-ortogonalizációnak nevezzük.

7.78. tétel (Gram–Schmidt-ortogonalizáció). *Ha* $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ *egy független vektorrendszer, akkor létezik olyan ortogonális* $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ *vektorrendszer, hogy minden* $i = 1, 2, \dots, k$ *esetén*

$$\operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_i) = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i). \tag{7.20}$$

Az ortogonális $\mathcal{V}$ *rendszerből a vektorok normálásával kapott*

$$\left\{ \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}, \frac{\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|}, \dots, \frac{\mathbf{v}_k}{|\mathbf{v}_k|} \right\}$$

rendszer ortonormált.

Bizonyítás. A $\operatorname{span}(\mathbf{a}_1) = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1)$ összefüggés teljesül, ha

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1.$$

A $\operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ teljesülése érdekében olyan $\mathbf{v}_2$ vektort kell választani, mely az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ síkjában van, másrészt $\mathbf{v}_2$-nek merőlegesnek kell lennie $\mathbf{v}_1$-re. E feltételeket teljesíti az $\mathbf{a}_2$-nek a $\mathbf{v}_1$ által kifeszített altérre merőleges összetevője, azaz a

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \left(\mathbf{a}_2 \cdot \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}\right)\frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1$$

vektor. Látható, hogy e vektor nem lehet a 0-vektor, hisz $\mathbf{v}_2 = 0$ esetén $\mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{a}_1$ lenne, azaz $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ nem lenne független, ami ellentmond annak, hogy $\mathcal{A}$ független. Az előző képletekből látható, hogy $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ előállítható az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ lineáris kombinációjaként, és viszont, így $\operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ fönnáll. Az eljárás hasonlóképp folytatható. Ha már megkonstruáltuk $\mathbf{v}_i$-t, akkor a 7.65. tétel szerint kiszámoljuk az $\mathbf{a}_{i+1}$ vektornak a $\operatorname{span}(\frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}, \frac{\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|}, \dots, \frac{\mathbf{v}_i}{|\mathbf{v}_i|})$ altérre merőleges összetevőjét, és ezt választjuk $\mathbf{v}_{i+1}$-nek, azaz

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{a}_{i+1} - \frac{\mathbf{a}_{i+1} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{a}_{i+1} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 - \dots - \frac{\mathbf{a}_{i+1} \cdot \mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i}\mathbf{v}_i$$

Könnyen látható, hogy $\mathbf{v}_{i+1} \neq \mathbf{0}$, mert ellenkező esetben $\mathcal{A}$ nem volna független. Látható az is, hogy $\mathbf{v}_{i+1}$ kifejezhető az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \dots,$ $\mathbf{a}_{i+1}$ vektorok lineáris kombinációjaként, és $\mathbf{a}_{i+1}$ kifejezhető az $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \dots,$ $\mathbf{v}_{i+1}$ vektorok lineáris kombinációjaként, tehát a tétel kifeszített alterekre vonatkozó állítása is fennáll. □

7.79. PÉLDA (GRAM–SCHMIDT-ORTOGONALIZÁCIÓ). *Keressünk ortonormált bázist az* $(1,1,1,1)$, $(3,-1,3,-1)$, $(6,2,2,-2)$ *vektorok által kifeszített altérben.*

MEGOLDÁS. Először keressünk egy ortogonális bázist:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= (1,1,1,1)\\
\mathbf{v}_2 &= (3,-1,3,-1) - \frac{(3,-1,3,-1)\cdot(1,1,1,1)}{(1,1,1,1)\cdot(1,1,1,1)}(1,1,1,1) = (2,-2,2,-2)\\
\mathbf{v}_3 &= (6,2,2,-2) - \frac{(6,2,2,-2)\cdot(1,1,1,1)}{(1,1,1,1)\cdot(1,1,1,1)}(1,1,1,1)\\
&\qquad - \frac{(6,2,2,-2)\cdot(2,-2,2,-2)}{(2,-2,2,-2)\cdot(2,-2,2,-2)}(2,-2,2,-2) = (2,2,-2,-2)
\end{aligned}$$

Végül az ortonormált bázis:

$$\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$$ □

► Könnyen igazolható, hogy a Gram–Schmidt-ortogonalizáció működik nem független vektorokból álló vektorrendszerre is, annyi változással, hogy pontosan akkor lesz $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, ha $\mathbf{a}_i$ nem független a kisebb indexű vektoroktól, azaz $\mathbf{a}_i$ benne van a $\operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1})$ altérben.

*A QR-felbontás** Ahogyan egy mátrix elemi sorműveletekkel való háromszögalakra hozását tömör formában megőrizte az LU-felbontás, ugyanígy a QR-felbontás őrzi az ortogonalizációs eljárás eredményét. E felbontás mind a legkisebb négyzetek módszerében, mind a később tárgyalandó sajátértékprobléma megoldásában fontos szerephez jut.

7.80. DEFINÍCIÓ (QR-FELBONTÁS). *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy teljes oszloprangú mátrix. Az* $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ *felbontást* QR-felbontásnak *vagy* redukált QR-felbontásnak *nevezzük, ha* $\mathbf{Q}$ *az* $\mathbf{A}$*-val azonos méretű szemiortogonális mátrix, és* $\mathbf{R}$ *négyzetes felső háromszögmátrix, főátlójában pozitív elemekkel.*

► Ha a $\mathbf{Q}$ mátrixot ortonormált oszlopvektorok hozzávételével kiegészítjük egy ortogonális mátrixszá, az $\mathbf{R}$ mátrixot pedig zérussorok hozzávételével egy $m \times n$-es felső háromszögmátrixszá, akkor e mátrixok szorzata is $\mathbf{A}$, ugyanis

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \hat{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} = \mathbf{QR} + \hat{\mathbf{Q}}\mathbf{O} = \mathbf{QR}$$

Ezt a bővebb felbontást is szokás QR-felbontásnak nevezni. Mi erre inkább a *teljes QR-felbontás* elnevezést használjuk. Ekkor tehát az $\mathbf{A}$ mátrixot egy ortogonális mátrix, és egy $\mathbf{A}$-val azonos méretű felső háromszögmátrix szorzatára bontjuk.

►

A Gram–Schmidt-ortogonalizációs eljárásból könnyen előállítható egy mátrix QR-felbontása. Legyen $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \dots\ \mathbf{a}_k] \in \mathbb{R}^{n\times k}$. Mivel $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú, azaz oszlopai függetlenek, ezért $k \le n$. Az ortogonalizációs eljárás végén kapott egységvektorokat jelölje $\mathbf{q}_i$, azaz $\mathbf{q}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{|\mathbf{v}_i|}$ $(i = 1, 2, \dots, k)$. Mivel a Gram–Schmidt-ortogonalizációs tétel szerint $\operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i) = \operatorname{span}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_i)$ minden $i = 1, 2, \dots, k$ értékre, ezért léteznek olyan r_{ij} skalárok, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= r_{11}\mathbf{q}_1 \\ \mathbf{a}_2 &= r_{12}\mathbf{q}_1 + r_{22}\mathbf{q}_2 \\ &\ \vdots \\ \mathbf{a}_k &= r_{1k}\mathbf{q}_1 + r_{2k}\mathbf{q}_2 + \dots + r_{kk}\mathbf{q}_k. \end{aligned} \tag{7.21}$$

Ezt mátrixszorzat-alakba írva épp a kívánt felbontást kapjuk:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \dots & \mathbf{q}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1k} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{kk} \end{bmatrix} = \mathbf{QR}.$$

A Gram–Schmidt-eljárásból az is látható, hogy $r_{ii} = |\mathbf{v}_i|$, tehát $r_{ii} > 0$. Ezzel bizonyítottuk a QR-felbontás létezését.

A Gram-Schmidt-eljárásból megkaphatjuk a $\mathbf{Q}$ mátrixot, azonban kérdés, hogy az $\mathbf{R}$ hogyan számítható ki egyszerűen. A 7.69. állítás egyszerű megoldást ad. Ha $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, akkor az egyenlőség mindkét oldalát $\mathbf{Q}^\mathsf{T}$-tal szorozva kapjuk, hogy $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{QR} = \mathbf{I}_k\mathbf{R} = \mathbf{R}$, tehát

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}.$$

7.81. PÉLDA (QR-FELBONTÁS KISZÁMÍTÁSA). *Határozzuk meg az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását.

MEGOLDÁS. A 7.79. példában épp az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektoraiból álló vektorrendszert ortogonalizáltuk. Mivel a három vektor lineárisan független, ezért $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú. A 7.79. példa megoldása alapján az $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak ortogonalizálásával kapott vektorokkal fölírható a $\mathbf{Q}$ mátrix:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Innen

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Valóban,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

□

7.82. TÉTEL (QR-FELBONTÁS LÉTEZÉSE ÉS EGYÉRTELMŰSÉGE). *Bármely valós, teljes oszloprangú* $\mathbf{A}$ *mátrixnak létezik QR-felbontása, azaz létezik egy szemiortogonális* $\mathbf{Q}$ *mátrix és egy* $\mathbf{R}$ *felső háromszögmátrix pozitív főátlóbeli elemekkel, hogy* $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$. *Az így kapott felbontás egyértelmű.*

Bizonyítás. A felbontás létezését a Gram–Schmidt-ortogonalizációra alapozva az előzőekben megmutattuk. Mivel $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, és $\mathbf{A}$ sorvektorai az $\mathbf{R}$ sorvektorainak lineáris kombinációi, ezért ha $\mathbf{R}$ rangja kisebb lenne k-nál, az $\mathbf{A}$ rangja is az lenne, de $\mathbf{A}$ rangja k. Beláttuk tehát, hogy $\mathbf{R}$ invertálható, és mivel felső háromszögmátrix, ezért főátlójában nem lehetnek 0-elemek.

Megmutatjuk még, hogy a felbontás egyértelmű. Tegyük fel, hogy valamely szemiortogonális $\mathbf{Q}$ és felső háromszögmátrix $\mathbf{R}$ mátrixokra $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$. Írjuk át ezt az egyenletet vektorok közti egyenletrendszerré, így egy a (7.21) alakú egyenletrendszert kapunk. Mivel a fentiek szerint $\mathbf{R}$ rangja k, a főátlójában nincsenek zéruselemek, de negatívak lehetnek. Így viszont minden egyenletből egyértelműen kifejezhető az $r_{ii}\mathbf{q}_i$ vektor. Mivel $\mathbf{q}_i$ egységvektor, ezért $-\mathbf{q}_i$ is, és más egységvektorral nem kapható meg az $r_{ii}\mathbf{q}_i$ vektor. Ha tehát valamely i-re $r_{ii} < 0$ lenne, akkor szorozzuk be az $\mathbf{R}$ mátrix i-edik sorvektorát és a $\mathbf{Q}$ mátrix i-edik oszlopát, azaz a $\mathbf{q}_i$ vektort -1-gyel. Ez a szorzaton nem változtat. Így elérhetjük, hogy $\mathbf{R}$ minden főátlón lévő eleme pozitív legyen. Mivel így $\mathbf{q}_i$ kiválasztása minden lépésben egyértelmű, ezért a $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{R}$ mátrix is egyértelmű, ami bizonyítja a felbontás egyértelműségét is. □

*QR-felbontás primitív ortogonális transzformációkkal** A QR-felbontás a Gram–Schmidt-ortogonalizáció helyett más technikákkal, így például a primitív ortogonális transzformációkkal is kiszámolható. Hasonlóan az Gauss-eliminációhoz itt is a háromszögalakra hozást eliminációval valósítjuk meg, de most nem elemi mátrixokkal, hanem ortogonálisokkal.

7.83. PÉLDA (QR-FELBONTÁS GIVENS-FORGATÁSOKKAL). *Határozzuk meg az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 3 & 10 & 6 \\ 0 & 12 & 13 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását Givens-forgatások segítségével!

Megoldás. Először az első és második sorokat és oszlopokat figyelve elimináljuk a második sor első elemét. Itt a (7.19) egyenletekben is használt jelölésekkel $a = 4$, $b = 3$, tehát $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $\cos\alpha = 4/5$, $\sin\alpha = -3/5$. Így első lépésben a következő mátrixszorzással eliminálhatunk:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 & 0 \\ -3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 12 & 13 \end{bmatrix}.$$

Következő lépésben a $\mathbf{Q}_1\mathbf{A}$ mátrix harmadik sorának második elemét elimináljuk:

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/13 & 12/13 \\ 0 & -12/13 & 5/13 \end{bmatrix}. \qquad \mathbf{R} = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 0 & 13 & 12 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

és innen

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1)^{-1} = \mathbf{Q}_1^\mathsf{T}\mathbf{Q}_2^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/13 & 36/65 \\ 3/5 & 4/13 & -48/65 \\ 0 & 12/13 & 5/13 \end{bmatrix},$$

amely mátrixokkal $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ valóban fennáll. □

A Householder-tükrözést alkalmazva a QR-felbontásra egy további módszert kaphatunk. Az ötlet lényege, hogy a 7.77. példában látott módon először az első oszlopban elimináljuk az első elem alattiakat, majd olyan transzformációt választunk, mely az első sort és oszlopot nem változtatja, de a második sor második eleme alattiakat eliminálja, és így tovább. Egy 4×4-es mátrixon szemléltetjük az eljárást.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \to \mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix} \to \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \to \mathbf{Q}_3\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{H}_1 \qquad \mathbf{Q}_2 = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & \mathbf{H}_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right] \qquad \mathbf{Q}_3 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\mathbf{H}_3$}} \\ 0 & 0 & & \end{array}\right]$$

Az első lépésben az $\mathbf{A}$ mátrix első oszlopához ($\mathbf{a}_1$) keresünk egy $\mathbf{b}_1$ vektort, mely vele egyenlő hosszú, és csak az első koordinátája nem 0. Ezután az $\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1$ vektorhoz megkonstruáljuk a $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{H}_1$ Householder-mátrixot. Így $\mathbf{Q}_1\mathbf{A}$ első oszlopában kinulláztuk az első sor alatti elemeket. Ezután elhagyjuk az első sort és oszlopot, és az így kapott mátrix első oszlopvektorával ($\mathbf{a}_2$) és a vele egyenlő hosszú, és az első koordinátát kivéve 0 koordinátájú $\mathbf{b}_2$ vektorral megkonstruáljuk a $\mathbf{H}_2$ Householder-mátrixot, melyet kiegészítünk egy sorral és oszloppal úgy, hogy a $\mathbf{Q}_1\mathbf{A}$ mátrixszal szorozva annak első sorát és oszlopát ne változtassa. Ez lesz a $\mathbf{Q}_2$ mátrix. Hasonlóan folytatva végül egy $\mathbf{R} = \mathbf{Q}_{n-1} \dots \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A}$ felső háromszögmátrixhoz jutunk (a fenti mintán $n = 4$). Mivel a $\mathbf{Q}_i$ mátrixok mindegyike ortogonális, ezért szorzatuk inverze is az lesz. Így a QR-felbontásban $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1^\mathsf{T}\mathbf{Q}_2^\mathsf{T} \dots \mathbf{Q}_{n-1}^\mathsf{T}$. A QR-felbontás ilyen módon való meghatározását nevezzük *Householder-módszernek*.

7.84. PÉLDA (QR-FELBONTÁS HOUSEHOLDER-TÜKRÖZÉSSEL). *Határozzuk meg az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását Householder-módszerrel!

MEGOLDÁS. Az $(1, 2, -2) \mapsto (3, 0, 0)$ transzformációhoz az

$$\mathbf{a} = (1, 2, -2) - (3, 0, 0) = (-2, 2, -2)$$

vektorral Householder-tükrözést végzünk:

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{I}_3 - \frac{2}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Ezután a $\mathbf{Q}_1\mathbf{A}$ mátrixból képzeletben elhagyva az első sort és oszlopot a $(4, 3) \mapsto (5, 0)$ transzformációhoz kell az $\mathbf{a} = (4, 3) - (5, 0) = (-1, 3)$ vektorral Householder-tükrözést végezni:

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{I}_2 - \frac{2}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_2 = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 4/5 & 3/5 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \end{array}\right], \qquad \mathbf{R} = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1)^{-1} = \mathbf{Q}_1^\mathsf{T}\mathbf{Q}_2^\mathsf{T} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 14 \\ 10 & 10 & -5 \\ -10 & 11 & 2 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ egyenlőség fennállásának ellenőrzését az Olvasóra hagyjuk. □

*Egyenletrendszer optimális megoldása QR-felbontással** Ha egy egyenletrendszer ellentmondásos, az optimális megoldás megtalálásához fölírt normálegyenlet gyakran rosszul kondicionált, ezért érdemes olyan megoldási technikát keresni, mely hatékonyabb a számítási hibák kezelésében. Egy ilyen technikát ismertetünk.

7.85. TÉTEL (LEGKISEBB NÉGYZETEK QR-FELBONTÁSSAL). *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy teljes oszloprangú* $m \times n$*-es valós mátrix,* $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ *egy QR-felbontása, és legyen* $\mathbf{b}$ *egy* $\mathbb{R}^m$*-beli vektor. Ekkor az* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *egyenletrendszer egyetlen optimális megoldása* $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b}$*, ami megkapható az*

$$\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b}$$

egyenletrendszerből egyszerű visszahelyettesítéssel is.

BIZONYÍTÁS. Az egyenletrendszer optimális megoldásáról szóló 7.46. tétel szerint az optimális megoldás a normálegyenletből megkapható. Eszerint

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b} && \mathbf{A} = \mathbf{QR} \text{ behelyettesítése után}\\
(\mathbf{QR})^\mathsf{T}\mathbf{QR}\hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{QR})^\mathsf{T}\mathbf{b} &&\\
\mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{QR}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b} && \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}\\
\mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b} && \text{balról szorzás az } (\mathbf{R}^\mathsf{T})^{-1} \text{ mátrixszal}\\
\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b}. &&
\end{aligned}$$

Az utolsó egyenlet visszahelyettesítésekkel is megoldható, mivel $\mathbf{R}$ felső háromszögmátrix. Mivel $\mathbf{R}$ főátlójában nincsenek zéruselemek, ezért $\mathbf{R}$ invertálható (ezt kihasználtuk, amikor $(\mathbf{R}^\mathsf{T})^{-1}$-gyel szoroztunk), tehát az egyenletből $\hat{\mathbf{x}}$ kifejezhető: $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b}$. □

7.86. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER OPTIMÁLIS MEGOLDÁSA). *Az alábbi háromismeretlenes egyenletrendszert megoldottuk a 7.62. példában:*

$$\begin{aligned}
x + 3y + 6z &= 8\\
x - y + 2z &= 2\\
x + 3y + 2z &= 2\\
x - y - 2z &= 0
\end{aligned}$$

Adjunk rá új, a QR-felbontást használó megoldást!

MEGOLDÁS. Az egyenletrendszer együtthatómátrixának QR-felbontását meghatároztuk a 7.81. példában. Eszerint

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 3 & 2\\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4\\ 0 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Egyik lehetőség, hogy fölírjuk az $\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b}$ mátrixegyenletet:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4\\ 0 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8\\ 2\\ 2\\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\\ 4\\ 4 \end{bmatrix}$$

Ezt az egyenletrendszert fejben is meg tudjuk oldani visszahelyettesítéssel: $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = (1, 0, 1)$. Természetesen ha már kiszámoltuk az $\mathbf{R}^{-1}$ mátrixot, akkor segítségével is megkapható az optimális megoldás:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{b} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

□

Feladatok

7.36. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{e}$ az $\mathbb{R}^n$ egy egységvektora, akkor a $\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^\mathsf{T}$ Householder-transzformáció helyben hagyja az $\mathbf{e}^\perp$ altér összes vektorát és $\mathbf{He} = -\mathbf{e}$.

*Komplex és véges test feletti terek**

A következőkben egyre többször szembesülünk azzal, hogy valós számokkal megfogalmazható problémák megválaszolásához is szükség van a komplex számokra. E fejezetben a geometriai szemléletmódot is kiterjesztjük a komplex terekre. Meglepő módon a geometriai analógiák még a véges test feletti terek esetén is jól használhatók.

Komplex vektorok és terek

Komplex vektorok skaláris szorzata Ha $\mathbb{C}^n$-beli vektorok skaláris szorzatát úgy értelmeznénk, mint a valós vektorok esetén, fura dolgok történnének.

Vegyük például a $(1, \mathrm{i})$ és az (i, i) vektorokat. Önmagával vett skaláris szorzata e két vektornak ez lenne:

$$(1,\mathrm{i})\cdot(1,\mathrm{i}) \stackrel{?}{=} 1-1=0$$
$$(\mathrm{i},\mathrm{i})\cdot(\mathrm{i},\mathrm{i}) \stackrel{?}{=} -1-1=-2$$

Ez azt mutatja, hogy ha a komplex vektorok abszolút értékét (hosszát), a valósban használt skaláris szorzattal definiálnánk, az abszolút érték legfontosabb tulajdonságai nem maradnának igazak! Kérdés, kiterjeszthető-e a valós vektorok skaláris szorzatának definíciója a komplex vektorokra úgy, hogy a fontosabb tulajdonságok érvényben maradjanak? Az ötletet a komplex számok – mint egydimenziós vektorok – abszolút értéke adja. A $z=a+\mathrm{i}b$ szám abszolút értékének négyzete $z\bar{z}$, és nem z^2! Eszerint az egydimenziós z vektor önmagával vett skaláris szorzatának $z\bar{z}$-t vagy $\bar{z}z$-t kell adnia. Ennek megfelelően a $\mathbf{z}=(z_1,z_2,\dots,z_n)$ és a $\mathbf{w}=(w_1,w_2,\dots,w_n)$ vektorok skaláris szorzatának egy lehetséges definíciója

$$\mathbf{z}\cdot\mathbf{w}=z_1\overline{w_1}+z_2\overline{w_2}+\dots+z_n\overline{w_n},\ \text{vagy}$$
$$\mathbf{z}\cdot\mathbf{w}=\overline{z_1}w_1+\overline{z_2}w_2+\dots+\overline{z_n}w_n.$$

Mindkét fenti képlet használható, ízlés kérdése melyiket választjuk (könyvenként változik). Mi az utóbbit fogjuk használni a skaláris szorzat mátrixszorzatos alakjának egyszerűbb volta miatt (ld. majd a 7.88. definícióban). Mindenek előtt egy elnevezés:

7.87. DEFINÍCIÓ (KOMPLEX MÁTRIX ADJUNGÁLTJA). *Az* $\mathbf{A}$ *komplex mátrix* adjungáltján *(vagy* Hermite-féle transzponáltján*) elemenkénti konjugáltjának transzponáltját értjük. Az* $\mathbf{A}$ *adjungáltját* $\mathbf{A}^*$, *vagy Hermite neve után* $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}$ *jelöli, tehát* $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}=\overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}}$.

Például $\begin{bmatrix} \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix}^{\mathsf{H}} = \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix}$, míg $[1-\mathrm{i} \ \ \mathrm{i}]^{\mathsf{H}} = \begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix}$.

Legyünk óvatosak az *adjungált* kifejezéssel: a könyvünk determinánsokról szóló fejezetében *klasszikus adjungáltnak* nevezett fogalmat ne keverjük össze ezzel az adjungálttal, nincs közük egymáshoz!

7.88. DEFINÍCIÓ (KOMPLEX VEKTOROK SKALÁRIS SZORZATA). *A $\mathbb{C}^n$-beli $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ és $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ vektorok skaláris szorzatán a*

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \overline{z_1} w_1 + \overline{z_2} w_2 + \cdots + \overline{z_n} w_n$$

komplex skalárt értjük. Ennek mátrixszorzatos alakja $\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{z}^{\mathsf{H}} \mathbf{w}$.

Így a fent említett $(1, \mathrm{i})$ és az (i, i) önmagukkal és egymással vett skaláris szorzatai:

$$(1,\mathrm{i}) \cdot (1,\mathrm{i}) = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}^{\mathsf{H}} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = 1 - \mathrm{i}^2 = 2,$$

$$(\mathrm{i},\mathrm{i}) \cdot (\mathrm{i},\mathrm{i}) = \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}^{\mathsf{H}} \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = -\mathrm{i}^2 - \mathrm{i}^2 = 2,$$

$$(1,\mathrm{i}) \cdot (\mathrm{i},\mathrm{i}) = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}^{\mathsf{H}} \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = \mathrm{i} - \mathrm{i}^2 = 1 + \mathrm{i},$$

$$(\mathrm{i},\mathrm{i}) \cdot (1,\mathrm{i}) = \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}^{\mathsf{H}} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = -\mathrm{i} - \mathrm{i}^2 = 1 - \mathrm{i}.$$

► Világos, hogy két valós vektor skaláris szorzata az eredeti és e definíció szerint is ugyanazt az eredményt adja, ugyanis minden valós r számra $\bar{r} = r$, tehát valós $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok esetén $\mathbf{u}^{\mathsf{H}} = \mathbf{u}^{\mathsf{T}}$, így $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathsf{H}} \mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathsf{T}} \mathbf{v}$. Tehát a fenti definíció kiterjesztése a valósban használt definíciónak.

► E definícióval a vektorok hosszára vonatkozó tulajdonságok is érvényben maradnak, amit hamarosan belátunk (ld. ??? tétel).

Az adjungált tulajdonságai kiterjesztései a valós mátrixok transzponáltja tulajdonságainak, hisz valós mátrix konjugáltja megegyezik önmagával. Ez azonnal bizonyítja az alábbi tételt:

7.89. TÉTEL (AZ ADJUNGÁLT TULAJDONSÁGAI). *Legyenek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ komplex mátrixok, c komplex szám. Ekkor*

a) $(\mathbf{A}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}$,

b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}^{\mathsf{H}} + \mathbf{B}^{\mathsf{H}}$,

c) $(c\mathbf{A})^{\mathsf{H}} = \bar{c} \mathbf{A}^{\mathsf{H}}$

d) $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{\mathsf{H}} = \mathbf{B}^{\mathsf{H}} \mathbf{A}^{\mathsf{H}}$.

Az adjungált tulajdonságaiból azonnal következik a következő tétel:

7.90. TÉTEL (A KOMPLEX SKALÁRIS SZORZÁS TULAJDONSÁGAI). *Legyen $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$, és legyen $c \in \mathbb{C}$. Ekkor*

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}$

b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$,
c) $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \bar{c}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ *és* $\mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$,
d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0$, *ha* $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, *és* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$, *ha* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

▶ Könnyen látható, hogy e tétel kiterjesztése a valós térbeli vektorokra kimondott 1.18. tételnek, bár első pillanatra úgy tűnhet, hogy ellentmond neki. Például valósban a skaláris szorzás kommutatív, itt nem, de a most kimondott változat érvényes valós vektorokra is, hisz valós vektor konjugáltja megegyezik önmagával. Hasonló állítható a *c)* tulajdonságról is.
▶ A *c)*-beli két tulajdonság bármelyike következik a másikból az *a)* alkalmazásával. Ha a skaláris szorzatot az $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^{\mathsf{H}}\mathbf{u}$ képlettel definiáltuk volna, akkor a természetesebbnek ható $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ összefüggés volna igaz.
▶ *d)*-ben az is az állítás része, hogy egy komplex vektor önmagával vett skaláris szorzata egyáltalán valós szám.
▶ A *d)* úgy is megfogalmazható, hogy $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$, és $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ pontosan akkor áll fönn, ha $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Bizonyítás. A bizonyítás a skaláris szorzás mátrixszorzatos alakjából, és a konjugált tulajdonságaiból azonnal adódik. Példaként megmutatjuk az *a)* bizonyítását:

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}} &= \overline{\mathbf{v}^{\mathsf{H}}\mathbf{u}} = \overline{\overline{\mathbf{v}}^{\mathsf{T}}\mathbf{u}} = \mathbf{v}^{\mathsf{T}}\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{u}}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathsf{H}}\mathbf{v}\\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\end{aligned}$$

A többi állítás hasonlóan bizonyítható. □

$\mathbb{C}^n$ kitüntetett alterei Mivel a komplex mátrixszorzásban nem az egyik mátrix sorának és a másik egy oszlopának skaláris szorzatát számítjuk ki, megváltoznak a kitüntetett alterek.

Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ esetén az $\mathbf{A}\mathbf{x}$ szorzatban nem $\mathbf{A}$ sorterének egy $\mathbf{a}_i$ vektorát szorozzuk az $\mathbf{x}$ vektorral, hisz $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} = \bar{\mathbf{a}}_i^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$. Így az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenlet azt jelenti, hogy a sortér vektorainak konjugáltjaiból álló tér merőleges a nulltérre, így az is adódik, hogy $\mathbb{C}^n = \mathcal{S}(\bar{\mathbf{A}}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A})$ és hasonlóképp $\mathbb{C}^m = \mathcal{O}(\bar{\mathbf{A}}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$. Az $\bar{\mathbf{A}}$ sortere nyilván megegyezik az $\mathbf{A}$ sortere konjugáltjával, azaz $\overline{\mathcal{S}(\mathbf{A})}$-val. Az $\mathbf{A}$ komplex mátrix kitüntetett alterein tehát az $\overline{\mathcal{S}}(\mathbf{A}) = \mathcal{O}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{O}(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}})$ tereket értjük. Innen adódik a következő tétel:

7.91. TÉTEL (KOMPLEX MÁTRIX KITÜNTETETT ALTEREI). *Az* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ *mátrix kitüntetett altereire igazak a következő állítások:*
a) $\mathbb{C}^n = \mathcal{O}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathbb{C}^m = \mathcal{O}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}})$,
b) $\mathcal{O}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}})$,
c) *az* $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ *mátrixleképezés kölcsönösen egyértelmű* $\mathcal{O}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}})$ *és* $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ *között.*

Önadjungált mátrixok Ahogy a transzponált fogalmának a – komplex skaláris szorzatot figyelembe vevő – kiterjesztése az adjungált, ugyanúgy a szimmetrikus mátrix fogalmának kiterjesztése az önadjungált mátrix. Szimmetrikus mátrix az, amelyik megegyezik saját transzponáltjával, önadjungált az, amelyik megegyezik saját adjungáltjával.

Az $\mathbf{A}$ komplex mátrix *önadjungált*, ha

$$\mathbf{A}^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}. \tag{7.22}$$

▶ Az önadjungált mátrixokat *Hermite-féle mátrixnak* is nevezik.
▶ Világos, hogy önadjungált mátrix főátlójában csak valósok állhatnak, mert csak azok egyeznek meg saját konjugáltjukkal.
▶ Minden valós szimmetrikus mátrix önadjungált, hisz a valós számok megegyeznek saját konjugáltjukkal. Sőt, mivel a nem valós komplex számok nem egyeznek meg saját konjugáltjukkal, ezért a komplex szimmetrikus mátrixok pontosan akkor önadjungáltak, ha minden elemük valós.

7.92. PÉLDA (ÖNADJUNGÁLT MÁTRIXOK). *Az*

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 & 2-3\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 2+3\mathrm{i} & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixok közül az első kettő önadjungált, a harmadik nem, mert főátlójában nem minden szám valós, a negyedik sem, az viszont komplex szimmetrikus mátrix!

Távolság és a merőleges vetítés komplex terekben A komplex skaláris szorzás segítségével – a valós esethez hasonlóan – definiálható a komplex vektorok távolsága és szöge, és így a merőlegessége is.

A komplex $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ vektor *hossza*, vagy *abszolút értéke* $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$, *két vektor távolsága* megegyezik különbségük hosszával, azaz $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ vektorok esetén $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$. *Két vektor szögének* koszinusza, ahogy azt az (1.4) képlettel definiáltuk, $\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\angle := \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$. Így *két vektor merőleges*, ha skaláris szorzatuk 0.

Unitér mátrixok Az ortogonális mátrixok komplex analogonjai az unitér mátrixok.

7.93. DEFINÍCIÓ (UNITÉR MÁTRIX). *Egy komplex négyzetes* $\mathbf{U}$ *mátrix* unitér, *ha* $\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{U} = \mathbf{I}$.

▶ Az ortogonális mátrixokhoz hasonlóan bizonyítható, hogy egy $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix pontosan akkor unitér, ha az alábbiak bármelyike teljesül:
- $\mathbf{U}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = \mathbf{I}$,

- $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{\mathsf{H}}$,
- $\mathbf{U}$ oszlopvektorai ortonormált bázist alkotnak a komplex skalárszorzásra nézve,
- $\mathbf{U}$ sorvektorai ortonormált bázist alkotnak a komplex skalárszorzásra nézve,
- $|\mathbf{Ux}| = |\mathbf{x}|$ minden $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vektorra,
- $\mathbf{Ux} \cdot \mathbf{Uy} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Diszkrét Fourier-transzformált

Fourier-mátrixok Az N-edik komplex egységgyök hatványaiból képzett Vandermonde-mátrix kiemelkedően fontos szerepet kapott a modern műszaki alkalmazásokban. E mátrix alaptulajdonságainak megismeréséhez a Fourier-összegek együtthatói és helyettesítési értékei közti kapcsolaton keresztül közelítünk.

A Fourier-sorok komplex

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nit}$$

alakja, és ezek

$$\sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{nit} = c_0 + c_1 e^{\mathrm{i}t} + c_1 e^{2\mathrm{i}t} + \cdots + c_{N-1} e^{(N-1)it} \tag{7.23}$$

alakú részletösszegei kulcsszerepet játszanak a periodikus, illetve a korlátos tartományon értelmezett függvények leírásában. A (7.23) összeget (diszkrét) *Fourier-összegnek* nevezzük.

7.94. Állítás (Fourier-összeg helyettesítési értékei). *A (7.23) Fourier-összeg együtthatóihoz a Fourier-összegnek a $[0, 2\pi]$ intervallumot N egyenlő részre osztó 0, $\frac{2\pi}{N}$, $\frac{4\pi}{N}, \ldots, \frac{2(N-1)\pi}{N}$ pontokban vett helyettesítési értékeit rendelő leképezés lineáris, melynek mátrixa $[\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}mn}]$ $(0 \le m, n < N)$.*

Bizonyítás. Először vizsgáljuk meg az $N = 3$ esetet. Az osztópontok: $t_0 = 0$, $t_1 = 2\pi/3$, $t_2 = 4\pi/3$. A Fourier-összeg $c_0 + c_1 e^{\mathrm{i}t} + c_2 e^{2\mathrm{i}t}$, ennek t_k-beli helyettesítési értékét jelölje y_k. Tehát

$$\begin{aligned}
y_0 &= c_0 + c_1 e^{\mathrm{i}0} + c_2 e^{2\mathrm{i}0} = c_0 + c_1 + c_2 \\
y_1 &= c_0 + c_1 e^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}} + c_2 e^{\frac{4\pi\mathrm{i}}{3}} = c_0 + c_1 \varepsilon + c_2 \varepsilon^2 \\
y_2 &= c_0 + c_1 e^{\frac{4\pi\mathrm{i}}{3}} + c_2 e^{\frac{8\pi\mathrm{i}}{3}} = c_0 + c_1 \varepsilon^2 + c_2 \varepsilon^4
\end{aligned}$$

ahol $\varepsilon = e^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$ a legkisebb pozitív argumentumú harmadik komplex egységgyököt jelöli. Világos, hogy a $(c_0, c_1, c_2) \mapsto (y_0, y_1, y_2)$ leképezés lineáris, melynek mátrixszorzat-alakja

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Hasonlóan egyszerű az általános eset is, azonban még tekintsük át az $N = 2$ és az $N = 4$ eset is. $N = 2$ esetén $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{2}} = -1$ a primitív egységgyök, így

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix},$$

míg $N = 4$ esetén $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{4}} = \mathrm{i}$, tehát

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

Általános esetben az n-edik osztópont $\frac{2n\pi}{N}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$), a Fourier-összeg e pontbeli helyettesítési értékét y_n-nel jelölve

$$\begin{aligned}
y_0 &= c_0 + c_1 e^{\mathrm{i}0} + c_2 e^{2\mathrm{i}0} + \cdots + c_{N-1} e^{(N-1)\mathrm{i}0} = c_0 + c_1 + \cdots + c_{N-1} \\
y_1 &= c_0 + c_1 e^{\frac{2\pi i}{N}} + c_2 e^{\frac{4\pi i}{N}} + \cdots + c_{N-1} e^{\frac{2(N-1)\pi i}{N}} \\
y_2 &= c_0 + c_1 e^{\frac{4\pi i}{N}} + c_2 e^{\frac{8\pi i}{N}} + \cdots + c_{N-1} e^{\frac{4(N-1)\pi i}{N}} \\
&\vdots \\
y_{N-1} &= c_0 + c_1 e^{\frac{2\pi i(N-1)}{N}} + c_2 e^{\frac{4\pi i(N-1)}{N}} + \cdots + c_{N-1} e^{\frac{2\pi i(N-1)^2}{N}}
\end{aligned}$$

Az $\varepsilon = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/N}$ jelöléssel mátrixszorzat-alakban

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \cdots & \varepsilon^{N-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 & \cdots & \varepsilon^{2(N-1)} \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 & \cdots & \varepsilon^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varepsilon^{N-1} & \varepsilon^{2(N-1)} & \varepsilon^{3(N-1)} & \cdots & \varepsilon^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{bmatrix} \qquad \square$$

E példában szereplő együtthatómátrix egy Vandermonde-mátrix, mégpedig a $\mathbf{V}_N(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{N-1})$ mátrix, melyet $\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}$-nal jelölünk. Fontos lesz még e mátrix konjugáltja, mely az $\omega = \bar{\varepsilon} = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/N}$ egységgyökhöz tartozó Vandermonde-mátrix. E két mátrixot *Fourier-mátrixnak* is nevezik. Tehát $[\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}]_{kn} = \varepsilon^{kn}$, $[\mathbf{\Phi}_{N,\omega}]_{kn} = \omega^{kn}$ $(0 \le k, n < N)$, azaz részletesen

$$\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon} = \mathbf{V}_N(1,\varepsilon,\varepsilon^2,\dots,\varepsilon^{N-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \dots & \varepsilon^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varepsilon^{N-1} & \dots & \varepsilon^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \tag{7.24}$$

$$\mathbf{\Phi}_{N,\omega} = \mathbf{V}_N(1,\omega,\dots,\omega^{N-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \dots & \omega^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \tag{7.25}$$

Az előző példában a Fourier-együtthatók ismeretében meghatároztuk a függvény helyettesítési értékeit. A gyakorlati alkalmazásokban főként a fordított sorrend érdekes, vannak y_k mért adataink, és keressük a c_k együtthatókat. Ehhez nyújt alapismereteket a következő tétel.

7.95. TÉTEL (A FOURIER-MÁTRIXOK TULAJDONSÁGAI). *Legyen N pozitív egész szám, $\varepsilon = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/N}$, $\omega = \bar{\varepsilon} = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/N}$. Az $\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}$ és $\mathbf{\Phi}_{N,\omega}$ Fourier-mátrixok a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:*

a) Bármelyik Fourier-mátrix k-adik és $N-k$-adik sora egymás konjugáltja, páros N esetén pedig az $N/2$-edik sorvektor $(1,-1,1,-1,\dots)$.

b) A két Fourier-mátrix egymás konjugáltja és egyúttal egymás adjungáltja is, azaz $\mathbf{\Phi}_{N,\omega} = \overline{\mathbf{\Phi}}_{N,\varepsilon} = \mathbf{\Phi}^{\mathsf{H}}_{N,\varepsilon}$ és $\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon} = \overline{\mathbf{\Phi}}_{N,\omega} = \mathbf{\Phi}^{\mathsf{H}}_{N,\omega}$

c) $\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}\mathbf{\Phi}_{N,\omega} = N\mathbf{I}_N$, így $\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}$ és $\mathbf{\Phi}_{N,\omega}$ invertálható,

$$\mathbf{\Phi}^{-1}_{N,\varepsilon} = \frac{1}{N}\mathbf{\Phi}_{N,\omega},\ \mathbf{\Phi}^{-1}_{N,\omega} = \frac{1}{N}\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon},$$

továbbá $\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}$ és $\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{\Phi}_{N,\omega}$ unitér.

BIZONYÍTÁS. *a)* Az $\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}$ mátrix k-adik, illetve $N-k$-adik sorának n-edik eleme ε^{kn}, illetve $\varepsilon^{(N-k)n}$. Ez utóbbit átalakítva kapjuk, hogy

$$\varepsilon^{(N-k)n} = \varepsilon^{Nn}\varepsilon^{-kn} = (\varepsilon^{-1})^{kn} = \bar{\varepsilon}^{kn}.$$

Mivel minden pozitív páros N-re $\varepsilon^{\frac{N}{2}} = -1$, ezért az $N/2$-edik sorban -1 hatványai szerepelnek.

b) Mivel $\omega = \bar{\varepsilon}$, ezért $\omega^s = \bar{\varepsilon}^s$, tehát $\mathbf{\Phi}_{N,\omega} = \overline{\mathbf{\Phi}}_{N,\varepsilon}$. Másrészt $\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}$ szimmetrikus, következésképp $\overline{\mathbf{\Phi}}_{N,\varepsilon} = \overline{\mathbf{\Phi}}^{\mathsf{T}}_{N,\varepsilon} = \mathbf{\Phi}^{\mathsf{H}}_{N,\varepsilon}$.

c) Számítsuk ki a $\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}\mathbf{\Phi}_{N,\omega}$ mátrixot! A szorzat k-adik sorának n-edik oszlopában a

$$\sum_{m=0}^{N-1} \varepsilon^{km}\omega^{mn} = \sum_{m=0}^{N-1} \varepsilon^{m(k-n)} = \sum_{m=0}^{N-1} (\varepsilon^{k-n})^m$$

összeg szerepel. Ha $k = n$, azaz $\varepsilon^{k-n} = 1$, akkor ez az összeg N, minden más esetben 0 (ld. a **??** állítást a komplex számokról szóló függelékben). Mindezek egyik következménye, hogy $\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}$ és $\mathbf{\Phi}_{N,\omega}$ invertálhatók, $\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}$ inverze $\frac{1}{N}\mathbf{\Phi}_{N,\omega}$, $\mathbf{\Phi}_{N,\omega}$ inverze $\frac{1}{N}\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}$. A másik következmény, hogy

$$\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{\Phi}_{N,\omega}\right) = \mathbf{I}_N,$$

ami a *b)*-t is figyelembe véve épp azt jelenti, hogy

$$\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}\right)^{\mathsf{H}} = \mathbf{I}_N,$$

azaz hogy $\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}$ unitér. □

Diszkrét Fourier-transzformáció A diszkrét Fourier-transzformációra úgy gondolhatunk, mint egy – általában komplex – függvény helyettesítési értékeinek vektorához a függvény trigonometrikus összetevői együtthatóinak vektorát rendelő lineáris $\mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ leképezésre.

A 7.94. példában egy Fourier-összeg együtthatóival kifejeztük a függvény megadott helyeken fölvett értékeit. A fordított irány sokkal érdekesebb: ismerjük egy f függvény N különböző megadott helyen fölvett értékét, és meg van adva N lineárisan független függvény. Olyan lineáris kombinációjuk együtthatóit keressük e függvényeknek, mely lineáris kombináció a megadott helyeken megegyezik f-fel. Mi a következőkben definiálandó diszkrét Fourier-transzformáció esetén az

$$f(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{nit}$$

függvényből indulunk ki, a megadott helyek a $[0, 2\pi]$ intervallumot N részre osztó $2k\pi/N$ $(k = 0, 1, \ldots, N-1)$ pontok. A $(c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}) \mapsto (y_0, y_1, \ldots, y_{N-1})$ leképezés inverzét fogjuk diszkrét Fourier-transzformáltnak nevezni. Ennek mátrixa $\mathbf{\Phi}_{N,\omega}$, amelyre a továbbiakban az $\mathbf{F}_N$ jelölést is használjuk. E megközelítésből az f függvény teljesen elhagyható, hisz a lényeg az, hogy egy szám-N-eshez hozzárendelünk egy másikat!

7.96. DEFINÍCIÓ (DISZKRÉT FOURIER-TRANSZFORMÁCIÓ (DFT)). *Az* $F_N : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{X} = \mathbf{F}_N\mathbf{x}$ *leképezést* diszkrét Fourier-transzformációnak *nevezzük.*

- ► A diszkrét Fourier-transzformáció tehát a (7.25) képlettel megadott $\mathbf{F}_N = \mathbf{\Phi}_{N,\omega}$ mátrixhoz tartozó mátrixleképezés.
- ► A leképezést kifejtve koordinátánként:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \mathrm{e}^{\frac{-2\pi\mathrm{i}}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \omega^{kn} \qquad (\omega = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}}). \tag{7.26}$$

► Az F_N transzformáció mátrixszorzatos alakja

$$F_N : \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \dots & \omega^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}.$$

► E témában elterjedt jelölések: a transzformálandó vektor dimenzióját nagy N jelöli, a képvektort a transzformálandó vektor nagybetűs változata jelöli, azaz $\mathbf{x}$ képe $\mathbf{X}$, $\mathbf{y}$ képe $\mathbf{Y}$, stb., a vektorok koordinátái 0-tól $N-1$-ig vannak indexelve.

► A diszkrét Fourier-transzformációt gyakran a Fourier-mátrixok valamelyikének egy másik konstansszorosával definiálják. Előfordul az unitér $\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{F}_N$, az $\frac{1}{N}\mathbf{F}_N$ vagy a $\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}$ mátrix is a transzformáció mátrixaként, sőt van aki minden olyan $\mathbf{\Phi}_{N,\hat{\varepsilon}}$ mátrixot egy DFT mátrixának tekint, ahol $\hat{\varepsilon}$ primitív N-edik egységgyök.

► Az általunk adott definíció a legelterjedtebb, a legtöbb ismert szoftver is ezt használja. Ennek oka e definíciónak a folytonos Fourier-transzformálttal való szorosabb kapcsolata, és a jelfeldolgozásban is ezt használják leginkább. Más alkalmazásokhoz viszont megfelelőbb lehet valamelyik fent említett másik definíció.

► Konkrétan az $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_4$ és $\mathbf{F}_8$ mátrixok:

$$\mathbf{F}_1 = [1], \quad \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & -\mathrm{i} & \frac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & \mathrm{i} & \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} & 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \\ 1 & \frac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & \mathrm{i} & \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & -\mathrm{i} & \frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & -\mathrm{i} & \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & \mathrm{i} & \frac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \\ 1 & \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & \mathrm{i} & \frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & -\mathrm{i} & \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

7.97. tétel (A DFT tulajdonságai). *Tekintsük a diszkrét F_N Fourier-transzformációt, és legyen az $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ vektor képe $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots, X_{N-1})$. Ekkor a következők igazak:*

a) Konstans vektor képe impulzusvektor (melynek a nulladikat kivéve mindegyik koordinátája 0), és fordítva, konkrétan

$$F_N(c, c, \dots, c) = (Nc, 0, \dots, 0), \quad F_N(c, 0, \dots, 0) = (c, c, \dots, c).$$

ahol $c \in \mathbb{C}$ tetszőleges konstans.

b) Ha $\mathbf{x}$ *valós vektor, akkor* $X_{N-k} = \overline{X}_k$.

c) Az F_N *transzformáció invertálható, inverze (IDFT) többféle felírásban:*

$$\mathbf{x} = F_N^{-1}\mathbf{X} = \frac{1}{N}\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}\mathbf{X}, \quad x_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_n \varepsilon^{kn} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_n \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N}kn}.$$

BIZONYÍTÁS. *a)* Az állítás első részének bizonyítása közvetlenül leolvasható az $\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}(c\mathbf{\Phi}_{N,\omega}) = cN\mathbf{I}_N$ szorzat első oszlopából, második része a $c\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}$ mátrix első oszlopából. De a 7.95. tétel bizonyításában is használt **??** állításra hivatkozva közvetlenül is azonnal adódik.

b) A (7.26) képletet használva

$$\begin{aligned} X_{N-k} &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \omega^{(N-k)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \omega^{-kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \overline{\omega}^{kn} = \overline{\sum_{n=0}^{N-1} x_n \omega^{kn}} = \overline{X}_k \end{aligned}$$

c) Az invertálhatóság azonnal adódik abból, hogy a Fourier-mátrixok Vandermonde-mátrixok is egyúttal, melynek determinánsa nem 0. A tételbeli mindegyik összefüggés azonnali következménye az $\mathbf{F}_N^{-1} = \mathbf{\Phi}_{N,\omega}^{-1} = \frac{1}{N}\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}$ képletnek. □

7.98. PÉLDA (DFT KISZÁMÍTÁSA). *Határozzuk meg az* $\mathbf{x} = (1, \mathrm{i}, \mathrm{i}, 2)$ *vektor diszkrét Fourier-transzformáltját!*

MEGOLDÁS. $N = 4$, így

$$\mathbf{X} = F_4\mathbf{x} = \mathbf{F}_4\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2\mathrm{i} \\ 2+\mathrm{i} \\ -1 \\ -3\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$ □

Periodikus összetevők szűrése Műszaki alkalmazásokban gyakran előfordul, hogy egy periodikus függvénnyel leírható jelhez magasabb frekvenciájú zaj adódik, amit utólag ki szeretnénk „szűrni”. Ez egy DFT-IDFT párral könnyen elvégezhető.

A szűrés általános modellje három lépésből áll, melyet az alábbi séma szemléltet:

$$\mathbf{x} \xrightarrow{\text{DFT}} \mathbf{X} \xrightarrow{\text{„szűrés”}} \hat{\mathbf{X}} \xrightarrow{\text{IDFT}} \hat{\mathbf{x}}$$

A műszaki gyakorlatban „szűrésen” sokféle transzformációt értenek, mely az $\mathbf{X}$ vektort az $\hat{\mathbf{X}}$-ba képzi. Mi csak a legegyszerűbb esettel foglalkozunk, $\mathbf{X}$ bizonyos koordinátáinak elhagyásával (kiszűrésével).

A következőkben egy mesterkélten leegyszerűsített, fejben számolva is követhető példát mutatunk a DFT e tipikus alkalmazására.

7.99. PÉLDA (MAGAS FREKVENCIÁJÚ ÖSSZETEVŐK SZŰRÉSE). *Adva van egy p szerint periodikus függvény $t_k = kp/6$ ($k = 0, 1, \dots, 5$) helyeken fölvett függvényértékeinek $\mathbf{x} = (4, 1, -2, -2, -2, 1)$ vektora. Bontsuk fel e függvényt egy p szerint periodikus trigonometrikus függvény, és p/m periódusú függvények (zaj) összegére ($m > 1$ egész).*

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{x}$ vektor diszkrét Fourier-transzformáltja

$$\mathbf{X} = F_6\mathbf{x} = \mathbf{F}_{6,\omega}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & -1 & \omega^4 & \omega^5 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & 1 & \omega^2 & \omega^4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \omega^4 & \omega^2 & 1 & \omega^4 & \omega^2 \\ 1 & \omega^5 & \omega^4 & -1 & \omega^2 & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

ahol kihasználtuk, hogy $\omega^6 = 1$, $\omega + \omega^5 = 1$, $\omega^2 + \omega^4 = -1$. Például

$$X_2 = [\mathbf{F}_{6,\omega}]_{2*}\,\mathbf{x} = 4 + \omega^2 - 2\omega^4 - 2 - 2\omega^2 + \omega^4 = 2 - \omega^2 - \omega^4 = 3.$$

Mivel $\mathbf{x}$ valós, ezért a 7.97. tétel *b)* pontja szerint $X_{N-k} = \overline{X}_k$, amit azonnal ellenőrizhetünk is. Az $\mathbf{x}$ vektor „mögött” lévő p szerint periodikus függvény e modellben

$$x(t) = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} X_n \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\frac{2\pi}{p}t} = \frac{1}{6}\left(9\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{p}t} + 3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{2\pi}{p}t} + 3\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\frac{2\pi}{p}t} + 9\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\frac{2\pi}{p}t}\right)$$

A p értékének valójában semmi szerepe, mert e függvényt csak a $k\frac{p}{n}$ ($k = 0, 1, \dots, 5$) pontokban értékeljük ki, így a fenti összegben csak a

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{p}\frac{pn}{6}} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{6}})^n = \varepsilon^n$$

értékek szerepelnek. Ezekre használható a

$$\begin{aligned} \varepsilon^n + \varepsilon^{6-n} &= (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{6}})^n + (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{6}})^n = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi n}{6}}) + (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi n}{6}}) \\ &= 2\cos n\frac{\pi}{3} = 2\cos\frac{2\pi}{p}\frac{pn}{6} \end{aligned}$$

összefüggés, így

$$x(t) = \frac{1}{6}\left(18\cos\frac{2\pi}{p}t + 6\cos 2\frac{2\pi}{p}t\right) = 3\cos\frac{2\pi}{p}t + \cos 2\frac{2\pi}{p}t.$$

A függvény tehát $3\cos\frac{2\pi}{p}t$, a „zaj” $\cos 2\frac{2\pi}{p}t$. □

Gyors Fourier-transzformáció A diszkrét Fourier-transzformáció gyors kiszámítására konstruált algoritmusoknak döntő szerepük van a mai kultúránk alapját jelentő digitális technika fejlődésében.

A diszkrét Fourier-transzformált kiszámításához, azaz az n-edrendű Fourier-mátrixszal való szorzás kiszámításához n^2 szorzás elvégzésére van szükség. Bármely olyan algoritmust, mely e transzformáció eredményét $O(n \log n)$, azaz konstansszor $n \log n$ lépésben elvégzi, *gyors Fourier-transzformációnak* nevezzük. Sok változata létezik, mi csak az elsőként publikált, legismertebbet ismertetjük.

A transzformáció gyorsaságának becsléséhez most minden aritmetikai művelet elvégzésének idejét tekintsünk azonosnak. A DFT kiszámítására, azaz a Fourier-mátrixszal való szorzáshoz minden sorban N szorzás, $N-1$ összeadás kell, és N sor van, így a szükséges műveletek száma $N(2N-1)$.

Az egyszerűség kedvéért legyen a továbbiakban N kettőhatvány, és csoportosítsuk az X_k-t megadó összeget az indexek paritása szerint, azaz külön adjuk össze a páros és külön a páratlan indexűeket. Vegyük észre, hogy ez az összeg két fele akkora méretű Fourier-transzformációból megkapható:

$$
\begin{aligned}
X_k &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \mathrm{e}^{\frac{-2\pi \mathrm{i}}{N} kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \omega_N^{kn} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} \mathrm{e}^{\frac{-2\pi \mathrm{i}}{N} 2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} \mathrm{e}^{\frac{-2\pi \mathrm{i}}{N} (2n+1)k} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} \mathrm{e}^{\frac{-2\pi \mathrm{i}}{N/2} nk} + \mathrm{e}^{\frac{-2\pi \mathrm{i}}{N} k} \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} \mathrm{e}^{\frac{-2\pi \mathrm{i}}{N/2} nk} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} \omega_{N/2}^{nk} + \omega_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} \omega_{N/2}^{nk} \\
&= E_k + \omega_N^k O_k.
\end{aligned}
$$

Hogy különbséget tegyünk az N és $N/2$ dimenziós vektorok transzformációi közt, az N-edik és $N/2$-edik egységgyököt jelölje

$$
\omega_N = \mathrm{e}^{\frac{-2\pi \mathrm{i}}{N}}, \text{ és } \omega_{N/2} = \mathrm{e}^{\frac{-2\pi \mathrm{i}}{N/2}}.
$$

És ezen a ponton azzal tudjuk csökkenteni a számításokat, hogy mivel az E_k és O_k összegek $N/2$ szerint periodikusak, így $k \geq N/2$ esetén E_k és O_k értékét már nem kell újra számolni, ugyanis

$$
E_{k+N/2} = E_k, \quad O_{k+N/2} = O_k,
$$

és az ω_N^k együttható is újrahasznosítható:

$$
\omega_N^{k+N/2} = \mathrm{e}^{\frac{-2\pi \mathrm{i}}{N}(k+N/2)} = \mathrm{e}^{\frac{-2\pi \mathrm{i}}{N}(k)} \mathrm{e}^{\frac{-2\pi \mathrm{i}}{N}\frac{N}{2}} = -\mathrm{e}^{\frac{-2\pi \mathrm{i}}{N}(k)} = -\omega_N^k.
$$

Ezeket összevetve tehát $k < N/2$ esetén

$$\begin{aligned} X_k &= E_k + \omega_N^k O_k, \\ X_{k+N/2} &= E_k - \omega_N^k O_k. \end{aligned}$$

Így, ha E_k és O_k már ki van számolva, X_k és $X_{k+N/2}$ kiszámításához csak egy szorzásra, egy összeadásra és egy kivonásra van szükség, azaz az X_k $(0 \le k < N)$ együtthatók $3N/2$ művelettel megkaphatók. Ezután rekurzív módon E_k és O_k kiszámítását is ugyanígy végezzük: mivel fele akkora a vektor, de kettő van belőle, itt is $3N/2$ műveletre lesz szükség. Mivel N kettőhatvány, például $N = 2^s$, így $s = \log_2 N$-szer kell megismételnünk ezt a lépést, vagyis a teljes transzformáció műveletigénye $\frac{3}{2} N \log_2 N$. Konkrétan néhány N esetén:

N	$2^4 = 16$	$2^8 = 256$	$2^{10} = 1024$	$2^{16} = 65536$
DFT	496	130816	2096128	8589869056
FFT	96	3072	15360	1572864
hányados	> 5	> 42	> 136	> 5461

A műveletigény fenti számításában nem vettük figyelembe ω_N^k kiszámításának költségeit. Ha e hatvány kiszámítása C aritmetikai művelettel egyenértékű, akkor is csak $\frac{C+3}{2} N \log_2 N$ műveletre van szükségünk. Ezzel tehát bizonyítottuk a következő tételt:

A tételbeli eljárást Gauss már ismerte és 1805-ben használta a másodiknak fölfedezett Pallas és a harmadiknak fölfedezett Juno nevű kisbolygó pályájának kiszámításához. A felező eljárást Danielson és Lánczos 1942-ben újra fölfedezték, de ők sem vizsgálták az algoritmus sebességét. Az FFT ismertté és népszerűvé Cooley és Tukey 1965-ben megjelent cikke után vált.

7.100. tétel (Gyors Fourier-transzformáció). *Létezik olyan algoritmus, mely egy N-dimenziós vektor diszkrét Fourier-transzformáltját legföljebb $O(N \log_2 N)$ aritmetikai művelet elvégzésével kiszámolja.*

A fenti bizonyításban szereplő algoritmus pszeudokódja:

Mivel e transzformáció is lineáris leképezésekből áll, a gyors Fourier-transzformáció mátrixszorzat-alakba is fölírható:

$$\mathbf{F}_N = \mathbf{\Delta}_N \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{N/2} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}_{N/2} \end{bmatrix} \mathbf{\Pi}_N,$$

ahol $\mathbf{\Pi}_N$ az a permutációs mátrix, mely előre veszi a páros indexű elemeket, $\mathbf{\Delta}_N$ pedig a „fél” transzformáltakat összeadó, és a páratlan indexűeket egy ω-hatvánnyal beszorzó mátrix. Ezek kisebb indexű

```
function FFT(x)
    N ← dim(x)
    X legyen N-dimenziós vektor
    if N = 1 then
        X_0 ← x_0
    else
        y ← x páros indexű elemei
        z ← x páratlan indexű elemei
        Y ← FFT(y)
        Z ← FFT(z)
        for k ← 0 to N/2 − 1 do
            E ← Y_k
            O ← e^(−2πi/N k) Z_k
            X_k ← E + O
            X_{k+N/2} ← E − O
    return X
```

7.26. ábra: FFT algoritmus. A rekurzív függvény bemenete egy tetszőleges komplex $\mathbf{x}$ vektor, kimenete a diszkrét Fourier-transzformált $\mathbf{X}$ vektor.

példányai:

$$\mathbf{\Pi}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Pi}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Delta}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\mathrm{i} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mathrm{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{I}_2 & -\mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Delta}_8 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_4 & \mathbf{D}_4 \\ \mathbf{I}_4 & -\mathbf{D}_4 \end{bmatrix}$$

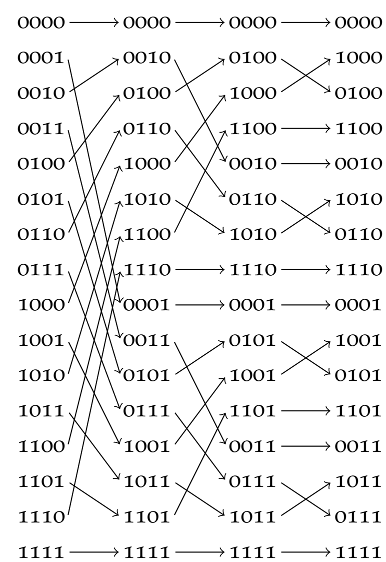
A $\mathbf{\Delta}$ mátrixokban szereplő diagonális mátrixok az egységmátrixok, és az ω hatványait tartalmazó $\mathbf{D}$ mátrixok, ahol $\mathbf{D}_k = \operatorname{diag}(1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{k-1})$. Tehát például

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_8 &= \mathbf{\Delta}_8 \begin{bmatrix} \mathbf{F}_4 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}_4 \end{bmatrix} \mathbf{\Pi}_8 \\ &= \mathbf{\Delta}_8 \begin{bmatrix} \mathbf{\Delta}_4 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{\Delta}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_2 & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}_2 & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{F}_2 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_4 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{\Pi}_4 \end{bmatrix} \mathbf{\Pi}_8. \end{aligned}$$

Látjuk, hogy a rekurzió következtében a transzformálandó vektort először a $\mathbf{\Pi}$-mátrixokból álló blokkmátrixokkal kell szorozni. E mátrixok szorzata is permutációmátrix. Hatását e konkrét esetben kiszámoljuk a fent megadott $\mathbf{\Pi}_4$ és $\mathbf{\Pi}_8$ mátrixok behelyettesítésével:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{\Pi}_4 & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{\Pi}_4\end{bmatrix}\mathbf{\Pi}_8\mathbf{x} = \begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_0\\x_4\\x_2\\x_6\\x_1\\x_5\\x_3\\x_7\end{bmatrix}.$$

Ez első pillanatban áttekinthetetlen permutációnak tűnik, de valójában egy igen egyszerűen leírható transzformációt kapunk: a transzformálandó $\mathbf{x}$ vektor k-adik koordinátáját ($k = 0, 1, \dots, N-1$) a j-edik helyébe viszi, ha j bináris alakja éppen fordítottja k bináris alakjának. Például ha $N = 16$, és $k = 6$, akkor x_{12} a harmadik koordináta helyére kerül a permutáció során, mivel $12 = 1100_2$, és ennek fordítottja $0011_2 = 3$. Ennek igazolása rendkívül egyszerű, ha észrevesszük, hogy az i-edik $\mathbf{\Delta}$-mátrixszal való szorzás épp jobbról az első i koordináta szerinti lexikografikus sorrendbe rendezi az elemeket. Ennek szemléltetésére elég az a 7.27 ábrán bemutatott $N = 16$ eset vizsgálata.



7.27. ábra: Az $\mathbf{X}$ vektor koordinátáinak indexeit binárisan fölírva, jól követhető azok mozgása a permutációk során.

Vektorok konvolúciója Vektorok konvolúciója igen sok helyen felmerül: a polinomok szorzásától kezdve az olyan transzformációkig, ahol egy koordinátát szomszédainak egy rögzített lineáris kombinációjával kell helyettesíteni. A gyors Fourier-transzformációval hatékonyan számolható.

Megoldások

7.1. Igen, $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, mátrixa $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{bmatrix}$.

7.2. Nem, az $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} + \mathbf{x}$ leképezés a $\mathbf{0}$ vektort nem a $\mathbf{0}$-ba képzi, így nem lehet mátrixleképezés!

7.4. Igen, a mátrix

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}) = (\mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathsf{T}})\mathbf{x} = \begin{bmatrix}a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3\\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3\\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2\end{bmatrix}$$

7.5. A bizonyítások a mátrixműveletek tulajdonságaiból következnek. Ott, ahol valamelyik mátrixazonosságot használjuk, az ekvivalenciát kimondó nyíl fölé M-betűt írunk, ahol pedig a függvények közti műveleti tulajdonságokat használjuk, ott egy F-betűt:

a) $(A+B)(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x}) \overset{F}{\iff} A(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x}) \iff \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} \overset{M}{\iff} (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x}$.

b) $(cA)(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x}) \overset{F}{\iff} cA(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x}) \iff c\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} \overset{M}{\iff} (c\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x}$

c) $(X \circ Y)(\mathbf{x}) = Z(\mathbf{x}) \overset{F}{\iff} X(Y(\mathbf{x})) = Z(\mathbf{x}) \iff \mathbf{X}(\mathbf{Y}\mathbf{x}) = \mathbf{Z}\mathbf{x} \overset{M}{\iff} (\mathbf{X}\mathbf{Y})\mathbf{x} = \mathbf{Z}\mathbf{x}$.

7.6. A 7.2. tételből, illetve a 7.5.. feladatból tudjuk, hogy $(A \circ B)(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{x}$ és $(B \circ A)(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{x}$. Így ha $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, azaz $\mathbf{A}$ inverze $\mathbf{B}$, akkor $(A \circ B)(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{x}$, és hasonlóan $(B \circ A)(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{x}$, azaz $A \circ B$ és $B \circ A$ az identikus leképezés. Hasonlóképp, ha $A \circ B$ és $B \circ A$ az identikus leképezés, akkor $(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{x} = (A \circ B)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ és $(\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{x} = (B \circ A)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, így $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ (ld. **??**. feladat), vagyis $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ egymás inverzei.

7.11. Ha $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}$, akkor C_{ij}-vel jelölve a $\mathbf{C}$ mátrix c_{ij}-hez tartozó előjeles aldeterminánsát kapjuk, hogy

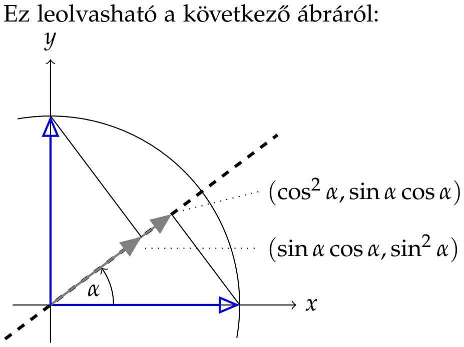
$$\begin{aligned}\operatorname{trace}(\mathbf{A}) &= \sum_i a_{ii} = \sum_i \frac{1}{\det \mathbf{C}} \sum_{j,k} C_{ij} b_{jk} c_{ki} \\ &= \frac{1}{\det \mathbf{C}} \left(\sum_{j \neq k} b_{jk} \sum_i C_{ij} c_{ki} + \sum_j b_{jj} \sum_i C_{ij} c_{ji} \right) = \ldots\ldots\end{aligned}$$

7.14. Az új egyenletrendszer sorterét az eredeti egyenletrendszer megoldásvektorai feszítik ki, ezért ennek nullterе megegyezik az eredeti sorterével, melyet a sorvektorok feszítenek ki. (Természetesen elég a sorvektorok közül a függetleneket kiválasztani. Esetünkben tehát a megadott egyenletrendszer nullterét kifeszítik az $(1,2,1,2,1)$ és az $(1,2,3,3,1)$ vektorok.)

7.16. *a)* A bizonyítandó képlet:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}.$$

Ez leolvasható a következő ábráról:



Az itt látható két derékszögű háromszög befogóinak hossza $\cos \alpha$, illetve $\sin \alpha$, és így például a $\cos \alpha$ hosszú szakasz két tengelyvetülete $\cos^2 \alpha$ és $\cos \alpha \sin \alpha$ hosszú, tehát $\mathbf{i}$ képe $(\cos^2 \alpha, \cos \alpha \sin \alpha)$. Hasonlóan $\mathbf{j}$ képe $(\sin \alpha \cos \alpha, \sin^2 \alpha)$. E két oszlopvektorból álló mátrix pedig valóban megegyezik a fent megadottal.

b) Az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vetülete az egyenesre

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{i} = \frac{\mathbf{i} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} \mathbf{b} = \frac{1}{b_1^2 + b_2^2} \begin{bmatrix} b_1^2 \\ b_1 b_2 \end{bmatrix} \quad \text{és}$$

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{j} = \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} \mathbf{b} = \frac{1}{b_1^2 + b_2^2} \begin{bmatrix} b_1 b_2 \\ b_2^2 \end{bmatrix}.$$

E két vektor egymás mellé írásával kapott mátrix lesz a leképezés mátrixa:

$$\frac{1}{b_1^2 + b_2^2} \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 \\ b_1 b_2 & b_2^2 \end{bmatrix}.$$

Ez megegyezik a (7.8) képlettel, azaz

$$\frac{1}{b_1^2 + b_2^2} \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 \\ b_1 b_2 & b_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix},$$

ugyanis ha a $\mathbf{b}$ vektor x-tengellyel bezárt szöge α, akkor $\cos \alpha = b_1 / \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, és $\sin \alpha = b_2 / \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$.

7.17. Ha P merőleges vetítés, akkor bármely $\mathbf{v}$ vektorra $\mathbf{v} - P\mathbf{v} \perp \mathbf{v}$, tehát a Pitagorasz-tétel szerint $|\mathbf{v}|^2 = |P\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v} - P\mathbf{v}|^2 \geq |P\mathbf{v}|^2$.

Fordítva, tegyük fel, hogy bár minden $\mathbf{v}$-re $|P\mathbf{v}| \leq |\mathbf{v}|$, de indirekt módon van olyan $\mathbf{v} \in \operatorname{Im} P$, hogy $\mathbf{v}$ nem merőleges $\operatorname{Ker} P$-re, azaz P nem merőleges vetítés. Legyen $\mathbf{v}$-nek $\operatorname{Ker} P$-re való merőleges vetülete $\mathbf{w}$. Ekkor $P(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = P\mathbf{v} = \mathbf{v}$, és $|\mathbf{v} - \mathbf{w}| < |\mathbf{v}|$, így $|\mathbf{v} - \mathbf{w}| < |P(\mathbf{v} - \mathbf{w})|$, ami ellentmond feltevésünknek.

7.18. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, így a (7.13) képlet szerint

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

7.19. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, így a (7.13) képlet szerint

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

7.20. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} 1/10 & 2/10 \\ 1/10 & 2/10 \end{bmatrix}$

7.21. $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$

7.22. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$

7.23. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} 1/10 & 2/10 & 0 \\ 1/10 & 2/10 & 0 \end{bmatrix}$

7.24. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} 5/9 & 2/9 & -4/9 \\ -4/9 & 2/9 & 5/9 \end{bmatrix}$

7.25. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$

7.26. $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}^+ = 1/30\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$

7.27. Mivel az $\mathbf{A}$ mátrix egy olyan $\mathbf{XY}$ felbontásával van megadva, melyben $\mathbf{X}$ teljes oszlop-, $\mathbf{Y}$ teljes sorrangú, ezért használható a **??** feladat eredménye. Így

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{Y}^\mathsf{T}(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^\mathsf{T} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

7.28. Az előző feladathoz hasonlóan a **??** feladat szerint

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{Y}^\mathsf{T}(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^\mathsf{T} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix}-4 & 5 & 1\\ -4 & 5 & 1\\ 3 & 0 & 3\\ 7 & -5 & 2\end{bmatrix}$$

7.29. A 7.30. tétel feladat szerint

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{Y}^\mathsf{T}(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^\mathsf{T} = \frac{1}{132}\begin{bmatrix}-32 & 34 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 2 & 4\\ 34 & -32 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

7.30. A létezés bizonyítható a pszeudoinverz megkonstruálása nélkül is, de mi inkább konstruktív bizonyítást adunk. Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, akkor megadunk egy olyan $\mathbf{A}^+ \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mátrixot, melyre $\mathbf{A}^+(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, ha $\mathbf{x} \in \mathcal{S}(\mathbf{A})$, és $\mathbf{A}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$, ha $\mathbf{z} \perp \mathcal{O}(\mathbf{A})$ ($\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$).

Legyen $\mathbf{A} = \mathbf{BR}$ az $\mathbf{A}$ bázisfelbontása, ahol $\mathbf{R} = \mathrm{rref}(\mathbf{A})$ egy $r \times n$-es mátrix, $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ főoszlopaiból álló $m \times r$-es mátrix, és $r = \mathrm{r}(\mathbf{A})$. $\mathbf{R}$ sorvektorai a sortér egy $\mathcal{R}$ bázisát adják. Jelölje egy tetszőleges $\mathbf{x}$ sortérbeli vektor e bázisra vonatkozó koordinátás alakját $[\mathbf{x}]_\mathcal{R}$, így $\mathbf{x} = \mathbf{R}^\mathsf{T}[\mathbf{x}]_\mathcal{R}$ és $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{R}^\mathsf{T}[\mathbf{x}]_\mathcal{R}$. Olyan mátrixot keresünk tehát, melyre $\mathbf{A}^+\mathbf{y} = \mathbf{x}$, azaz $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{R}^\mathsf{T}[\mathbf{x}]_\mathcal{R} = \mathbf{R}^\mathsf{T}[\mathbf{x}]_\mathcal{R}$. Kihasználjuk, hogy $\mathbf{B}$ és $\mathbf{R}^\mathsf{T}$ teljes oszloprangú, így $\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B}$ és $\mathbf{R}\mathbf{R}^\mathsf{T}$ invertálható. Kiindulva az $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ egyenletből, annak mindkét oldalát $(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}$-tal, majd $\mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{R}\mathbf{R}^\mathsf{T})^{-1}$-zel szorozva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= \mathbf{A}\mathbf{R}^\mathsf{T}[\mathbf{x}]_\mathcal{R} = \mathbf{B}\mathbf{R}\mathbf{R}^\mathsf{T}[\mathbf{x}]_\mathcal{R}\\ (\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{y} &= (\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{R}\mathbf{R}^\mathsf{T}[\mathbf{x}]_\mathcal{R} = \mathbf{R}\mathbf{R}^\mathsf{T}[\mathbf{x}]_\mathcal{R}\\ \mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{R}\mathbf{R}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{y} &= \mathbf{R}^\mathsf{T}[\mathbf{x}]_\mathcal{R} = \mathbf{x}.\end{aligned}$$

Eszerint $\mathbf{A}^+ = \mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{R}\mathbf{R}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}$ jó jelölt. Megmutatjuk, hogy az így definiált $\mathbf{A}^+$ mátrix eleget tesz a pszeudoinverz definíciójának. Ha $\mathbf{x} \in \mathcal{S}(\mathbf{A})$, és $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, akkor épp $\mathbf{A}^+$ származtatásából adódóan $\mathbf{A}^+\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Legyen tehát $\mathbf{z} \perp \mathcal{O}(\mathbf{A})$, azaz $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$. Ekkor, mivel $\mathbf{B}$ oszlopai kifeszítik az $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ alteret, $\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Így

$$\mathbf{A}^+\mathbf{z} = \mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{R}\mathbf{R}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{z} = \mathbf{0}.$$

Képezzük az $m \times m$-es $\mathbf{C} = [\mathbf{A}\mathbf{R}^\mathsf{T}|\mathbf{Z}]$ mátrixot, ahol $\mathbf{Z}$ oszlopvektorai alkossák $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ egy bázisát. Mivel $\mathbf{A}\mathbf{R}^\mathsf{T}$ oszlopai az $\mathcal{O}(\mathbf{A})$-ban bázist alkotnak, ezért $\mathbf{C}$ oszlopai függetlenek, így $\mathbf{C}$ invertálható. Ha $\mathbf{X}$ egy pszeudoinverz, akkor annak definíciója szerint $\mathbf{X}\mathbf{C} = [\mathbf{R}^\mathsf{T}|\mathbf{O}]$, így $\mathbf{A}^+\mathbf{C} = \mathbf{X}\mathbf{C}$, amiből $\mathbf{X} = \mathbf{A}^+$. Ezzel az egyértelműséget is igazoltuk.

7.31. *1. megoldás:* Ha $\mathbf{A}$ merőleges vetítés mátrixa, akkor $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}$ okán $\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \mathcal{O}(\mathbf{A})$, és a sortér minden $\mathbf{x}$ vektorára $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}$, így $\mathbf{A}^+\mathbf{x} = \mathbf{x}$ is igaz lesz. Másrészt $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}$ miatt $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$, tehát minden $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ esetén $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{0}$, és definíció szerint $\mathbf{A}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$ is fönnáll, tehát $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^+$ hatása az $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ és annak merőleges kiegészítő alterén is megegyezik, így a két mátrix azonos.

2. megoldás: A Penrose-tétel alapján azt kell ellenőriznünk, hogy $\mathbf{A}$ a négy feltétel mindegyikét teljesíti, mint pszeudoinverz. Ez igaz, hisz $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A} = \mathbf{A}^2$ miatt $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}$, és $(\mathbf{A}^2)^\mathsf{T} = \mathbf{A}^2$.

Az állítás megfordítása nem igaz. Például az $\mathbf{A} = -\mathbf{I}$ mátrixra $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}$, de a $-\mathbf{I}$ mátrixra $(-\mathbf{I})^2 \neq -\mathbf{I}$, tehát $-\mathbf{I}$ nem vetítés mátrixa.

7.32. Az első állítás azonnal következik a (7.10) egyenlőségből, ugyanis ha $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú, akkor

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^+\mathbf{A} &= \left((\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)\mathbf{A}\\ &= (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \mathbf{I}\end{aligned}$$

A másik állítás hasonlóan adódik a (7.11) képletből.

7.33. Ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 1$, akkor létezik olyan $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{a}\mathbf{b}^\mathsf{T}$. Ekkor a pszeudoinverz kiszámításáról szóló **??** feladat (**??**) képlete szerint

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^+ &= \mathbf{b}(\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b})^{-1}(\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a})^{-1}\mathbf{a}^\mathsf{T}\\ &= \frac{1}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b}}\mathbf{b}\mathbf{a}^\mathsf{T}\\ &= \frac{1}{\mathrm{trace}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})}\mathbf{A}^\mathsf{T}.\end{aligned}$$

Az utóbbi egyenlőség azon múlik, hogy mind $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b}$, mind $\mathrm{trace}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})$ az összes $a_i^2 b_j^2$ alakú elem összege, ahol $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$. A vektorokra vonatkozó állítás ennek speciális esete.

7.34. Az állítás igazolásához elég csak a Penrose-tétel négy feltételét ellenőrizni.

7.35. A 7.34. feladat alapján az alábbi blokkosítással és 1-rangú mátrixok pszeudoinverzére vonatkozó állításból azonnal adódik a válasz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]^+ = \left[\begin{array}{c|cc|c} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

7.36. ....

III. rész

Mátrixok sajátságai

E rész a mátrixok legfontosabb tulajdonságait, sajátságait vizsgálja. A *sajátságokra* való utalás egyúttal egy szójáték, mely a mátrix *sajátértékének*, *sajátvektorának* és *sajátalterének* igen fontos fogalmára, valamint a születésekor ugyancsak *sajátértéknek* nevezett szinguláris értékre utal. Vizsgálatainkat a négyzetes mátrixok lehető legegyszerűbb – diagonális – alakra hozásával kezdjük, amihez a sajátértékek meghatározása vezet. Az alkalmazásokban az utóbbi időben különösen fontossá vált, és minden mátrixra működő másik diagonalizáló technika a szinguláris értékekhez kapcsolódik. Ennek tárgyalását a diagonalizálhatósághoz kapcsolódó kérdések tisztázása, a „majdnem diagonális alak”, a Jordan-féle normálalak leírása követi, végül e részt az alkalmazásokban különösen fontos nemnegatív mátrixok vizsgálata zárja.

green&blue (CC) by Joós Andi

8

Sajátérték, diagonalizálás

Egy mátrix jellemzésének különösen hatékony eszköze azoknak a nullvektortól különböző $\mathbf{x}$ vektoroknak a meghatározása, amelyeket a mátrixszal való szorzás önmagukkal párhuzamos vektorokba visz, azaz amelyekre $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$. E vektorok ismerete olyan bázis megtalálásához is hozzásegít, amelyben e mátrix lényegesen egyszerűbb – például diagonális – alakot ölt.

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér

A sajátérték és a sajátvektor fogalma Kezdjük egy egyszerű feladattal, melyből kiolvasható annak lényege, amiről e fejezetben szó lesz.

8.1. PÉLDA (JÓ BÁZIS TÜKRÖZÉSHEZ). *Tükrözzük a 3-dimenziós tér vektorait a tér egy megadott síkjára! Geometriai szemléletünkre hagyatkozva válasszunk e lineáris leképezés leírásához egy megfelelő bázist, majd írjuk fel a tükrözés e bázisra vonatkozó mátrixát!*

MEGOLDÁS. A síkra való tükrözés a síkra merőleges vektorokat ellentettjükbe viszi, míg a sík vektorait helyben hagyja. A tér minden vektora egyértelműen előáll egy síkba eső és egy rá merőleges vektor összegeként. A mellékelt ábra szemlélteti, hogy a tér mindegyik vektorának tükörképe úgy kapható meg, hogy a síkba eső összetevőjét meghagyjuk, és ahhoz adjuk a síkra merőleges összetevő ellentettjét. Természetes módon adódik az ötlet, hogy válasszuk ki a sík egy tetszőleges bázisát (álljon ez az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokból), és e két vektorhoz vegyünk hozzá egy a síkra merőleges $\mathbf{c}$ vektort harmadik bázisvektornak. Ekkor a tükröző T leképezés hatása e vektorokon: $T\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $T\mathbf{b} = \mathbf{b}$ és $T\mathbf{c} = -\mathbf{c}$. Az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ bázisban T mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Így e bázisban egy tetszőleges (x, y, z) vektor tükörképe $(x, y, -z)$. □

E példában úgy választottunk bázist, hogy olyan vektorokat kerestünk, melyek önmaguk skalárszorosába mennek, azaz amelyek kielégítenek egy $T\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ alakú egyenletet. Ez a következő definícióhoz vezet, melyet először csak mátrixokra mondunk ki.

8.2. DEFINÍCIÓ (SAJÁTÉRTÉK, SAJÁTVEKTOR). *Azt mondjuk, hogy a λ szám az $\mathbf{A}$ mátrix* sajátértéke, *ha létezik olyan nemnulla $\mathbf{x}$ vektor, melyre $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Az ilyen $\mathbf{x}$ vektorokat az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó* sajátvektorainak, *a $(\lambda, \mathbf{x})$ párokat pedig az $\mathbf{A}$* sajátpárjainak *nevezzük.*

8.3. PÉLDA (SAJÁTÉRTÉK, SAJÁTVEKTOR). *Igazoljuk, hogy az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ mátrixnak -1 egy sajátértéke, és $(2,1)$ az egyik hozzátartozó sajátvektora, azaz $(-1,(2,1))$ egy sajátpár. Mutassuk meg, hogy a $(2,(1,2))$ pár egy másik sajátpár!*

MEGOLDÁS. Valóban,

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

E mátrix egy másik sajátértéke 2, ugyanis

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

□

Ha $\mathbf{x}$ egy sajátvektor, akkor minden nemnulla konstansszorosa is az, ugyanis

$$\mathbf{A}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{A}\mathbf{x} = c\lambda\mathbf{x} = \lambda(c\mathbf{x}),$$

azaz $\mathbf{A}(c\mathbf{x}) = \lambda(c\mathbf{x})$. Ennél több is igaz:

8.4. ÁLLÍTÁS (A SAJÁTVEKTOROK ALTEREI). *Ha az $\mathbf{A}$ mátrixnak λ egy sajátértéke, akkor a λ-hoz tartozó sajátvektorok a nullvektorral együtt alteret alkotnak, mely megegyezik $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ nullterével.*

BIZONYÍTÁS. A nem nullvektor $\mathbf{x}$ pontosan akkor egy λ sajátértékhez tartozó sajátvektor, ha kielégíti az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ egyenletet, azaz az $\mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletet, vagyis ha megoldása a homogén lineáris $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletnek. Ez pedig épp azt jelenti, hogy $\mathbf{x}$ eleme $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ nullterének. □

8.5. DEFINÍCIÓ (SAJÁTALTÉR). *A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektorai és a nullvektor által alkotott alteret a λ sajátértékhez tartozó* sajátaltérnek *nevezzük.*

8.6. PÉLDA (SAJÁTALTÉR BÁZISÁNAK MEGHATÁROZÁSA). *Adjuk meg az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix 2-höz, mint sajátértékhez tartozó sajátalterét úgy, hogy megadjuk egy bázisát! Tegyük meg ugyanezt a 10-hez tartozó sajátaltérrel is.

Megoldás. Először ellenőrizzük, hogy a 2 sajátérték! Ehhez meg kell mutatni, hogy az $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása. Hozzuk az együtthatómátrixot redukált lépcsős alakra:

$$\mathbf{A}-2\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1&6&1\\1&6&1\\1&6&1\end{bmatrix}\quad\Longrightarrow\quad\begin{bmatrix}1&6&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Mivel $\mathrm{r}(\mathbf{A}-2\mathbf{I})=1$, ezért az $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ egyenletrendszer szabad változóinak száma 2, és megoldása

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}-6s-t\\s\\t\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}-6\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Tehát a sajátaltér egy bázisa a $(-6,1,0)$ és $(-1,0,1)$ vektorokból áll.

A 10 is sajátérték, mivel az $(\mathbf{A}-10\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása, ugyanis

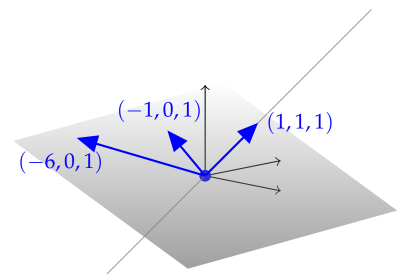
$$\mathbf{A}-10\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-7&6&1\\1&-2&1\\1&6&-7\end{bmatrix}\quad\Longrightarrow\quad\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

tehát a megoldás

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}t\\t\\t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Így a sajátalteret az $(1,1,1)$ vektor feszíti ki.

A két sajátaltér egyike 2-, másika 1-dimenziós altér. Ezt szemlélteti a 8.1. ábra. □



8.1. ábra: A 8.6. feladatbeli $\mathbf{A}$ mátrix sajátalterei: a 2-höz tartozó 2-dimenziós altér, melyet a $(-6,1,0)$ és $(-1,0,1)$ vektorok feszítenek ki, és a 10-hez tartozó 1-dimenziós altér, melyet a $(1,1,1)$ vektor feszít ki.

Karakterisztikus polinom Láttuk, hogy az $\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$ egyenletnek pontosan akkor van a zérusvektortól különböző megoldása, ha a homogén lineáris $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása. Ez a 6.3. tétel szerint pontosan akkor igaz, ha

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0. \tag{8.1}$$

Ez tehát azt jelenti, hogy λ pontosan akkor sajátérték, ha kielégíti a (8.1) egyenletet. Ezt az egyenletet az $\mathbf{A}$ mátrix *karakterisztikus egyenletének* nevezzük. Ha $\mathbf{A}$ egy $n\times n$-es mátrix, akkor az egyenlet bal oldala a determináns kifejtése után egy n-edfokú polinom, melyet *karakterisztikus polinomnak* nevezünk. Az n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomját $\chi_{\mathbf{A}}$-val jelöljük, ennek általános alakja tehát

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda)=(-1)^n\lambda^n+p_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+p_1\lambda+p_0. \tag{8.2}$$

A karakterisztikus polinomot a

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$$

determinánssal is szokás definiálni. Előnye, hogy ekkor a polinom főegyütthatója mindig 1, míg az általunk használt definíció szerint a páratlan rendű mátrixok karakterisztikus polinomjának -1 a főegyütthatója. Hátránya viszont az, hogy a konstans tag nem mindig a determináns, másrészt a kézzel való számolás is nehézkesebb, ezért az elemi feladatok egyszerűbb számolhatósága érdekében is hasznosabb a $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ alakot választani.

8.7. PÉLDA (KARAKTERISZTIKUS POLINOM FELÍRÁSA). *Határozzuk meg az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

mátrixok karakterisztikus polinomját és ahol lehet, próbáljunk meg általánosabb érvényű állításokat megsejteni az eredmény alapján!

MEGOLDÁS. Ki kell számítanunk a $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ determináns értékét:

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc \\ &= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) \\ &= \lambda^2 - \operatorname{trace}(\mathbf{A})\lambda + \det\mathbf{A}. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Kimondható a következtetés: 2×2-es mátrixok karakterisztikus polinomját a mátrix nyomával és determinánsával is ki tudjuk fejezni.

A **B** mátrix karakterisztikus polinomja

$$\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & b \\ 0 & 1-\lambda & c \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

Ebből leolvasható, hogy a háromszögmátrixok karakterisztikus polinomjának alakját nem befolyásolják a főátlón kívüli elemek (ld. a 8.8. tételt).

A **C** mátrix karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} a-\lambda & b & c \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a-\lambda)\lambda^2 + b\lambda + c \\ &= -\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c. \end{aligned}$$

Ez azt sejteti, hogy minden polinomhoz könnyen konstruálható olyan mátrix, melynek az a karakterisztikus polinomja (ld. a **??** feladatot). □

Az előző feladat tanulságait külön állításokban is megfogalmazzuk:

8.8. ÁLLÍTÁS (HÁROMSZÖGMÁTRIXOK SAJÁTÉRTÉKEI). *A háromszögmátrixok és így a diagonális mátrixok sajátértékei megegyeznek a főátló elemeivel.*

BIZONYÍTÁS. Ha **A** háromszögmátrix, akkor $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ is, és egy háromszögmátrix determinánsa megegyezik főátlóbeli elemeinek szorzatával. Eszerint az $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ háromszögmátrix karakterisztikus egyenlete

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\dots(a_{nn} - \lambda) = 0,$$

aminek a gyökei a_{ii} $(i = 1, \ldots, n)$. Így ezek az $\mathbf{A}$ sajátértékei. □

8.9. ÁLLÍTÁS (DETERMINÁNS, NYOM ÉS A SAJÁTÉRTÉKEK). *Ha az n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, akkor*

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \\ \operatorname{trace}(\mathbf{A}) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \end{aligned}$$

Ezek az értékek megjelennek a karakterisztikus polinomban: a determináns a konstans tag, a nyom a $(-\lambda)^{n-1}$ együtthatója.

BIZONYÍTÁS. A karakterisztikus polinom gyöktényezős alakja:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \ldots (\lambda_n - \lambda)$$

$\lambda = 0$ behelyettesítése után kapjuk, hogy

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n.$$

Az állítás nyomra vonatkozó részének bizonyítását feladatként tűzzük ki. □

A valós 2×2-es mátrixok sajátaltereinek jellemzése Olyan eredményekkel fogunk megismerkedni e paragrafusban, melyek általánosíthatóak lesznek magasabb dimenzióra, de 2-dimenzió esetén egyszerűbb a szemléltetésük.

Láttuk, hogy ha $\mathbf{x}$ sajátvektor, akkor bármely konstansszorosa is az. Így egy egyenessel párhuzamos vektorok közül elég csak egy vektor képét vizsgálni, mondjuk az egységvektorét. Hasznos lesz tehát a lineáris leképezések korábban megismert egységkör-ábrázolása (ld. 7.7 ábra).

8.10. PÉLDA (2×2-ES MÁTRIXOK SAJÁTVEKTORAINAK ÁBRÁZOLÁSA). *Határozzuk meg a 7.11. és a* **??** *példákban is szereplő*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait. Szemléltessük ezeket az egységkör-ábrákban.

MEGOLDÁS. Egyszerű számolással meghatározható mind a négy mátrix karakterisztikus egyenlete, sajátértékei és sajátvektorai, bár a $\mathbf{D}$ mátrix esetén ezek komplex számokat is tartalmaznak. A karakterisztikus polinomot jelölje p, indexében a mátrix jelével. Ezután megadjuk a sajátértékeket, majd a sajátvektorokat:

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1, \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \frac{1}{2}, \qquad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\chi_{\mathbf{B}}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda - 1, \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\chi_{\mathbf{C}}(\lambda) = \lambda^2 - 1, \qquad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\chi_{\mathbf{D}}(\lambda) = \lambda^2 + 1, \qquad \lambda_1 = \mathrm{i},\ \lambda_2 = -\mathrm{i}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

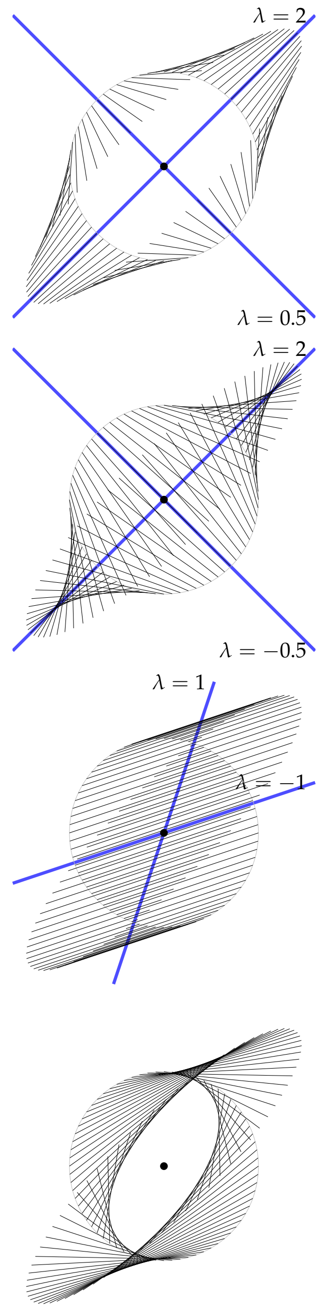
Némi nehézséget a $\mathbf{D}$ mátrix okoz, ezért az ahhoz tartozó számításokat részletezzük:

$$|\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} - \lambda & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$$\lambda_1 = \mathrm{i}: \quad \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} - \mathrm{i} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} - \mathrm{i} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ amiből } \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = -\mathrm{i}: \quad \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} + \mathrm{i} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} + \mathrm{i} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ amiből } \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A négy mátrixhoz tartozó egységkörábra a 8.2 ábrán látható. □



8.2. ábra: A négy leképezés sajátirányai.

8.11. TÉTEL (2 × 2-ES SZIMMETRIKUS MÁTRIXOK SAJÁTALTEREI). *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy* 2×2*-es szimmetrikus mátrix. Ekkor*

a) $\mathbf{A}$ *minden sajátértéke valós,*

b) $\mathbf{A}$*-nak pontosan akkor van két azonos sajátértéke, ha a*$\mathbf{I}$ *alakú, ekkor a sík összes vektora sajátvektor,*

c) minden egyéb esetben $\mathbf{A}$*-nak két különböző sajátértéke van, és ekkor sajátalterei merőlegesek egymásra.*

BIZONYÍTÁS. A 2×2-es szimmetrikus valós mátrix általános alakja $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ b & d \end{smallmatrix}\right]$, ahol $a, b, d \in \mathbb{R}$. Ennek karakterisztikus egyenlete a (8.3) szerint $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - b^2)$. Az egyenlet diszkriminánsa $D = (a+d)^2 - 4(ad - b^2) = (a-d)^2 + 4b^2 \geq 0$. Tehát a gyökök, vagyis a sajátértékek valósak. Ez bizonyítja *a)*-t. A két sajátérték pontosan akkor egyezik meg, ha $D = 0$, ez viszont csak $a = d$ és $b = 0$ esetén lehetséges, ami bizonyítja *b)*-t. A *c)* állítás igazolását a feladatok közt tűzzük ki. □

Mátrix összes sajátértékének és sajátvektorának meghatározása Az előző paragrafusokban leírtak alapján egy mátrix sajátértékeinek és sajátvektorainak meghatározása két lépésben elvégezhető:

1. megoldjuk a $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ karakterisztikus egyenletet, ennek gyökei a sajátértékek,

2. minden λ sajátértékhez meghatározzuk az $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ nullterének egy bázisát, az általa kifeszített altér nemzérus vektorai a λ-hoz tartozó sajátvektorok.

8.12. PÉLDA (Az összes sajátérték és sajátvektor meghatározása). *Határozzuk meg a*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

MEGOLDÁS. Az első lépés a karakterisztikus egyenletet felírása és megoldása. A kiszámítandó determináns háromszögalakú, így értéke a főátlóbeli elemek szorzata:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)^2$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei és így az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Tekintsük először a $\lambda_1 = 0$ esetet. $\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}$ nullterének meghatározásához redukált lépcsős alakra hozzuk az $\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}$ mátrixot:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{aligned} x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ennek megoldása $x_1 = t$, azaz az összes megoldás

$$\begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát a $\lambda_1 = 0$ sajátértékhez tartozó sajátaltér az $(1,0,0)$ vektor által kifeszített altér.

Tekintsük ezután a $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ esetet. Meghatározzuk az $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ mátrix nullterét.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow 2x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

Ennek az (egy egyenletből álló) egyenletrendszernek a megoldása: $x_2 = s$, $x_3 = t$, $x_1 = (s+t)/2$, azaz

$$\begin{bmatrix} (s+t)/2 \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát a $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátaltér az $(\frac{1}{2}, 1, 0)$ és az $(\frac{1}{2}, 0, 1)$ vektorok által kifeszített altér. □

Az $n \times n$-es mátrixok karakterisztikus egyenlete n-edfokú. Egy ilyen egyenlet megoldására $n \leq 4$ esetén van megoldóképlet, ezért ezeket az egyenleteket – például egy komputer algebra program segítségével – meg tudjuk oldani. Egyébként vagy szerencsénk van, és az egyenlet olyan alakú, amilyenhez vannak gyors megoldási lehetőségek, vagy csak közelítő megoldás megtalálására van esély.

8.13. PÉLDA (MAGASABBFOKÚ KARAKTERISZTIKUS EGYENLET). *Határozzuk meg az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

MEGOLDÁS. A karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2(2-\lambda) + 24 - 12(1-\lambda) - 4(2-\lambda) \\ &= -(\lambda^3 - 4\lambda^2 - 11\lambda - 6) \end{aligned}$$

E harmadfokú egyenlet megoldására használhatunk számítógépet, megoldóképletet, vagy például a függelékben megtalálható racionálisgyöktételt. Eszerint a karakterisztikus egyenlet $-(\lambda+1)^2(\lambda-6) = 0$, így gyökei $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ és $\lambda_3 = 6$.

A $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ esetben

$$\mathbf{A} + \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Ennek megoldása

$$\begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

azaz a -1 sajátértékhez tartozó sajátalteret a $(-1, 1, 0)$ és a $(-1, 0, 1)$ vektorok feszítik ki.

A $\lambda_3 = 6$ esetben

$$\mathbf{A} - 6\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & -4 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \begin{aligned} x_1 \qquad - \frac{2}{3}x_3 &= 0 \\ x_2 - \frac{2}{3}x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ennek megoldása a törtek alkalmazását elkerülő $x_3 = 3t$ paraméterválasztással

$$\begin{bmatrix} 2t \\ 2t \\ 3t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Tehát a $\lambda_3 = 6$ sajátértékhez tartozó sajátalteret a $(2, 2, 3)$ vektor feszíti ki. □

A karakterisztikus egyenlet komplex gyökei Ha valóselemű mátrixot vizsgálunk, megeshet, hogy a karakterisztikus egyenletnek vannak nem valós gyökei. Mivel a valós számok egyúttal komplexek is, a valós elemű mátrixot tekinthetjük komplex eleműnek is, ekkor viszont a karakterisztikus egyenlet komplex gyökeit is sajátértéknek tekinthetjük. Ebben az esetben a komplex sajátértékhez komplex elemű sajátvektor fog tartozni, amint azt már láthattuk a 8.10. példában.

8.14. példa (Komplex sajátértékek és komplex elemű sajátvektorok). *Határozzuk meg a komplex elemű*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

Megoldás. A karakterisztikus egyenlet

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \lambda^2 - \lambda + 1.$$

A $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ egyenlet gyökei $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

Először vizsgáljuk az $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ sajátértéket:

$$\mathbf{A} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} i & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} i \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \implies x - iy = 0.$$

Ennek az egyenlet(rendszer)nek a megoldása az $y = t$ paraméterválasztással

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} it \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát az $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ sajátértékhez tartozó sajátaltér egy bázisa az $(i, 1)$ vektorból áll.

Az $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ sajátérték esetén

$$\mathbf{A} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} i & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \implies x + iy = 0.$$

Ennek az egyenlet(rendszer)nek a megoldása az $y = t$ paraméterválasztással

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -it \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát az $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ sajátértékhez tartozó sajátalteret a $(-i, 1)$ sajátvektor feszíti ki. □

A karakterisztikus egyenlet többszörös gyökei: az algebrai és a geometriai multiplicitás Ha λ a karakterisztikus egyenlet k-szoros gyöke, vagy más szóval λ multiplicitása vagy *algebrai multiplicitása* k, akkor a λ-hoz tartozó sajátaltér d dimenziójára $1 \leq d \leq k$. Ezt az állítást később bebizonyítjuk. A sajátaltér dimenzióját szokták a λ sajátérték *geometriai multiplicitásának* nevezni. A 8.12. és a 8.13. példák olyan eseteket mutattak, amikor a sajátértékek algebrai és geometriai multiplicitása azonos, azaz minden sajátaltér épp annyi dimenziós, amennyi a gyök (algebrai) multiplicitása. A következő feladat azt mutatja, hogy a sajátaltér dimenziója kisebb is lehet.

8.15. PÉLDA (SAJÁTÉRTÉK ALGEBRAI ÉS GEOMETRIAI MULTIPLICITÁSA). *Határozzuk meg az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ és a } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és azok algebrai és geometriai multiplicitását!

MEGOLDÁS. Mivel $\mathbf{A}$ háromszögmátrix, ezért karakterisztikus polinomja $(4 - \lambda)^3$, a 4 tehát háromszoros gyök, azaz algebrai multiplicitása 3. Mivel

$$\mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ezért az $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer az $y = 0$, $z = 0$ alakot ölti, aminek megoldása

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Eszerint $\mathbf{A}$ sajátaltere 1-dimenziós, melyet az $(1, 0, 0)$ vektor feszít ki. A $\lambda = 4$ sajátérték geometriai multiplicitása tehát 1.

A $\mathbf{B}$ mátrix karakterisztikus polinomja $(1 - \lambda)^2(2 - \lambda)^2$, ennek gyökei 1 és 2, és mindegyiknek kettő az algebrai multiplicitása. Meghatározzuk sajátaltereiket. $\lambda = 1$ esetén

$$\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{B} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az ehhez tartozó homogén egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát az altér dimenziója 2, vagyis a geometriai multiplicitás megegyezik az algebraival. Ha $\lambda = 2$, akkor

$$\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{B} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az ehhez tartozó homogén egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát az altér dimenziója most 1, vagyis a geometriai multiplicitás kisebb, mint az algebrai. □

Sajátértékek és a mátrix hatványai A mátrixok függvényeinek számolása szoros kapcsolatban van a sajátértékekkel. E témában első lépés a mátrixhatványok sajátértékeinek és sajátvektorainak meghatározása.

8.16. TÉTEL (MÁTRIX INVERTÁLHATÓSÁGA ÉS A 0 SAJÁTÉRTÉK). *Az* $\mathbf{A}$ *mátrix pontosan akkor invertálható, ha a* 0 *nem sajátértéke.*

BIZONYÍTÁS. $\mathbf{A}$ pontosan akkor invertálható, ha $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, de ez ekvivalens azzal, hogy $\det(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) \neq 0$, azaz 0 nem sajátértéke $\mathbf{A}$-nak. □

8.17. TÉTEL (MÁTRIX HATVÁNYAINAK SAJÁTÉRTÉKEI ÉS SAJÁTVEKTORAI). *Ha* λ *az* $\mathbf{A}$ *mátrix egy sajátértéke és* $\mathbf{x}$ *egy hozzá tartozó sajátvektor, akkor bármely egész* n *esetén* λ^n *sajátértéke az* $\mathbf{A}^n$ *mátrixnak és* $\mathbf{x}$ *egy hozzá tartozó sajátvektor, amennyiben* λ^n *és* $\mathbf{A}^n$ *is értelmezve van.*

Bizonyítás. $n = 0$ esetén $\lambda^0 = 1$ és $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$, és ekkor minden vektor az 1 sajátértékhez tartozó sajátvektor, tehát ekkor az állítás igaz.

Pozitív n-re indukcióval igazoljuk az állítást: $n = 1$ esetén nyilván igaz, $n = 2$ esetén:

$$\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \lambda(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2\mathbf{x}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy ha $n = k - 1$ esetén már igaz az állítás, akkor $n = k$ esetén is:

$$\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\lambda^{k-1}\mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^k\mathbf{x}.$$

Ha $\mathbf{A}$ invertálható, akkor

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \text{ amiből } \frac{1}{\lambda}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}, \text{ azaz } \lambda^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}.$$

Végül negatív kitevők esetén:

$$\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}, \text{ amiből } \lambda^{-k}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-k}\mathbf{x}. \qquad \square$$

8.18. tétel (Mátrix hatványainak hatása). *Tegyük fel, hogy λ_1, λ_2,… λ_k sajátértékei az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixnak, és hogy $\mathbf{x}_1$,… $\mathbf{x}_k$ hozzájuk tartozó sajátvektorok. Ha egy n-dimenziós $\mathbf{v}$ vektor előáll e sajátvektorok lineáris kombinációjaként, azaz*

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_k\mathbf{x}_k,$$

akkor bármely egész m esetén

$$\mathbf{A}^m\mathbf{v} = c_1\lambda_1^m\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2^m\mathbf{x}_2 + \ldots + c_k\lambda_k^m\mathbf{x}_k.$$

Bizonyítás. A bizonyítás magától értetődő, hisz

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^m\mathbf{v} &= \mathbf{A}^m(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_k\mathbf{x}_k)\\ &= c_1\mathbf{A}^m\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{A}^m\mathbf{x}_2 + \ldots + c_k\mathbf{A}^m\mathbf{x}_k\\ &= c_1\lambda_1^m\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2^m\mathbf{x}_2 + \ldots + c_k\lambda_k^m\mathbf{x}_k. \qquad \square\end{aligned}$$

► Sajnos az nem igaz, hogy minden mátrixhoz találunk n független sajátvektort, amelyek lineáris kombinációjaként minden vektor felírható, így e tétel csak a sajátvektorok lineáris kombinációjaként előálló vektorokról szól! E tétel azt mutatja, fontos kérdés annak eldöntése, hogy egy mátrix sajátvektoraiból mikor alkotható bázis.

Speciális mátrixok sajátértékei A mátrixok egyes különleges tulajdonságai a sajátértékek bizonyos tulajdonságát is befolyásolják.

8.19. TÉTEL (SPECIÁLIS MÁTRIXOK SAJÁTÉRTÉKE). *Legyen* **A** *egy* n-*edrendű valós mátrix. Ekkor*

a) *ha* **A** *szimmetrikus, akkor minden sajátértéke valós,*

b) *ha* **A** *ferdén szimmetrikus, akkor minden sajátértéke imaginárius,*

c) *ha* **A** *ortogonális, akkor minden sajátértékének* 1 *az abszolút értéke,*

d) **A** *pontosan akkor nilpotens, ha minden sajátértéke* 0*, azaz karakterisztikus polinomja* λ^n *alakú.*

BIZONYÍTÁS. *a), b)* Legyen $(\lambda, \mathbf{x})$ egy **A**-hoz tartozó sajátpár. Az $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ egyenlőség mindkét oldalát balról szorozzuk be **x** adjungáltjával (konjugáltjának transzponáltjával):

$$\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{Ax} = \mathbf{x}^{\mathsf{H}}\lambda\mathbf{x} = \lambda|\mathbf{x}|^2.$$

Vegyük mindkét oldal adjungáltját (konjugáltjának transzponáltját), kihasználva hogy mivel **A** valós, ezért $\mathbf{A}^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$:

$$\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} = \bar{\lambda}|\mathbf{x}|^2.$$

Legyen $\lambda = a + ib$. Ha **A** szimmetrikus, azaz $\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}$, akkor $\lambda = \bar{\lambda}$, azaz $a + ib = a - ib$. Így λ imaginárius része 0, tehát λ valós. Ha **A** ferdén szimmetrikus, azaz $\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = -\mathbf{A}$, akkor $a + ib = -a + ib$, azaz λ valós része 0, így λ imaginárius.

c) Ha **A** ortogonális, akkor bármely **x** vektorra $|\mathbf{Ax}| = |\mathbf{x}|$. Így ha **x** sajátvektor, akkor $|\mathbf{x}| = |\mathbf{Ax}| = |\lambda\mathbf{x}| = |\lambda||\mathbf{x}|$, amiből $|\lambda| = 1$.

d) Ha $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, és λ sajátértéke **A**-nak, akkor λ^k sajátértéke az $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$ mátrixnak, annak viszont csak a 0 sajátértéke, így **A**-nak is minden sajátértéke 0. Az állítás megfordítása a Cayley–Hamilton-tételből következik, melyet hamarosan bizonyítunk. Eszerint minden mátrix kielégíti karakterisztikus polinomját, így ha a karakterisztikus polinom $\lambda^n = 0$, akkor $\mathbf{A}^n = \mathbf{O}$, vagyis **A** nilpotens. □

Az előző tétel bizonyításából minimális változtatással megkapható a következő tétel bizonyítása is:

8.20. TÉTEL (SPECIÁLIS KOMPLEX MÁTRIXOK SAJÁTÉRTÉKEI). *Ha az* n-*edrendű komplex* **A** *mátrix*

a) *önadjungált, akkor minden sajátértéke valós,*

b) *ferdén önadjungált, akkor minden sajátértéke imaginárius,*

c) *unitér, akkor minden sajátértékének* 1 *az abszolút értéke.*

Feladatok

8.1. Igazoljuk a **??** tétel *c)* állítását, mely szerint ha egy 2×2-es szimmetrikus valós mátrixnak két különböző sajátértéke van, akkor sajátalterei merőlegesek egymásra.

Hasonlóság, diagonalizálhatóság

Egy lineáris transzformáció sajátértékei és karakterisztikus polinomja megőrződnek a különféle bázisokban fölírt mátrixaira is. Olyan bázist keresünk, melyben mátrixa a legegyszerűbb alakú.

Lineáris transzformációk sajátértékei A sajátérték, sajátvektor, sajátaltér fogalma természetes módon átvihető lineáris leképezésekre is.

8.21. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓ SAJÁTÉRTÉKE, SAJÁTVEKTORA). *Azt mondjuk, hogy a λ szám az L lineáris transzformáció* sajátértéke, *ha létezik olyan nemnulla $\mathbf{x}$ vektor, melyre $L\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Az ilyen $\mathbf{x}$ vektorokat az L lineáris transzformáció λ sajátértékhez tartozó* sajátvektorainak *nevezzük.*

Ha a lineáris transzformáció $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vagy $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezés, mely valamilyen egyszerű geometriai transzformációt valósít meg, akkor néha a transzformáció mátrixának ismerete nélkül is könnyen meghatározhatjuk a sajátértékeket és sajátvektorokat.

8.22. PÉLDA (LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓ SAJÁTÉRTÉKE, SAJÁTALTERE). *Adjuk meg – pusztán geometriai szemléletünkre hagyatkozva – az alábbi lineáris leképezések sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátaltereket.*

a) a sík vektorainak tükrözése egy egyenesre (vagy pontjainak tükrözése egy origón átmenő egyenesre);
b) a sík vektorainak merőleges vetítése egy egyenesre (vagy pontjainak merőleges vetítése egy origón átmenő egyenesre);
c) a tér vektorainak elforgatása egy egyenes körül a π egész számú többszörösétől különböző szöggel;
d) a tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra;
e) a tér vektorainak tükrözése egy síkra.

MEGOLDÁS. Az előző fejezetben, így a 7.7. állításban bizonyítottakhoz hasonlóan látható, hogy mindegyik feladatbeli transzformáció lineáris.

a) Egy egyenesre való tükrözés esetén csak az egyenessel párhuzamos és rá merőleges vektorok mennek saját konstansszorosukba, mégpedig az egyenessel párhuzamos vektorok saját magukba, a rá merőlegesek a saját ellentettjükbe. Tehát e transzformációnak az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltere az egyenessel párhuzamos vektorokból, a -1-hez tartozó sajátaltere a rá merőleges vektorokból áll. A pontokra vonatkozó állítás a pontokba mutató helyvektorokkal adódik.

b) A sík merőleges vetítése egy egyenesre – hasonlóan az előző esethez – helyben hagyja az egyenessel párhuzamos vektorokat, és a $\mathbf{0}$-vektorba viszi a rá merőlegeseket. Tehát az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltér az egyenessel párhuzamos vektorokból, a 0-hoz tartozó sajátaltere a rá merőleges vektorokból áll.

c) A tér egyenes körüli elforgatása a forgástengellyel párhuzamos vektorokat önmagukba viszi, és ha a forgatás szöge különbözik π egész számú többszöröseitől, semelyik másik vektort sem viszi a saját skalárszorosába. Így az egyetlen sajátérték az 1, amelyhez tartozó sajátaltér a forgástengellyes párhuzamos vektorokból áll.

d) A tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra helyben hagyja a sík összes vektorát, míg a síkra merőleges vektorokat a $\mathbf{0}$ vektorba viszi, tehát a két sajátérték 1 és 0. Az 1-hez tartozó sajátaltér a sík vektoraiból, a 0-hoz tartozó sajátaltér a rá merőleges vektorokból áll.

e) E feladatot megoldottuk a 8.1. példában. A két sajátérték 1 és -1, az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltér a sík vektoraiból, a -1-hoz tartozó sajátaltér a rá merőleges vektorokból áll. □

Egy lineáris leképezéshez bázisonként más-más mátrix tartozhat, de a sajátértékeik mégis ugyanazok, hisz egy vektor képe csak a leképezéstől függ, nem a választott bázistól.

Hasonló mátrixok sajátértékei A 7.15. és a 7.16. tételekből tudjuk, hogy egy lineáris leképezéshez különböző bázisokban tartozó mátrixok hasonlóak. Ezen felül tudjuk azt is, hogy fontos mátrixtulajdonságok invariánsak a hasonlóságra. E paragrafusban e tulajdonságok körét fogjuk bővíteni.

8.23. TÉTEL (SAJÁTÉRÉKHEZ KAPCSOLÓDÓ INVARIÁNSOK). *Ha* $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, *akkor* $\mathbf{A}$ *és* $\mathbf{B}$ *karakterisztikus polinomja azonos, így sajátértékei, azok algebrai, sőt geometriai multiplicitásai is megegyeznek.*

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás során föltesszük, hogy valamely invertálható $\mathbf{C}$ mátrixszal $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}$. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} &= \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C} - \lambda\mathbf{C}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{C})\\ &= \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}\mathbf{C})\\ &= \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{C},\end{aligned}$$

azaz $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ és $\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}$ is hasonlóak. A 7.16. tétel szerint hasonló mátrixok determinánsa megegyezik, így $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})$, azaz megegyeznek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ karakterisztikus polinomjai is. Ez maga után vonja, hogy megegyeznek sajátértékeik, és azok (algebrai) multiplicitásai. A geometriai multiplicitások egyenlőségéhez elég belátni, hogy $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ és $\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}$ nullterének dimenziója megegyezik, azt viszont ugyancsak a 7.16. tételben igazoltuk. □

► Ismerjük a polinom együtthatói és gyökei közti összefüggéseket, így a sajátértékeknek a polinom együtthatóit adó függvényei is invariánsak. Például a harmadfokú esetben:

$$\begin{aligned}&(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)\\&\quad=-\lambda^3+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\lambda^2-(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)\lambda+\lambda_1\lambda_2\lambda_3.\end{aligned}$$

Tehát $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$, $\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1$ és $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ invariáns mennyiségek. Általában egy n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrixra invariánsak a sajátértékek következő függvényei:

$$\begin{aligned}e_1(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)&=\sum_{1\le i\le n}\lambda_i=\operatorname{trace}(\mathbf{A}),\\e_2(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)&=\sum_{1\le i<j\le n}\lambda_i\lambda_j,\\e_3(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)&=\sum_{1\le i<j<k\le n}\lambda_i\lambda_j\lambda_k,\\&\ \vdots\\e_n(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)&=\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n=\det(\mathbf{A}).\end{aligned}$$

Az itt felsorolt e_1, e_2,…, e_n függvényeket *elemi szimmetrikus polinomoknak* nevezzük. A sajátértékek utolsónak említett függvénye a determináns, melynek invariáns voltát megmutattuk a 7.16. tételben. Hamarosan igazoljuk, hogy minden mátrix hasonló egy felső háromszögmátrixhoz, melynek főátlójában a sajátértékek vannak. Így hasonló mátrixok nyoma megegyezik, hisz a sajátértékek összegével egyenlő.
► Fontos következménye e tételnek, hogy van értelme *lineáris transzformáció karakterisztikus polinomjáról*, beszélni (legalábbis véges dimenziós esetben, pl. $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ vagy $\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ transzformációk esetén).

Mátrixok diagonalizálása és sajátfelbontása Igen fontos kérdés, hogy egy adott lineáris leképezés sajátvektoraiból kiválasztható-e egy bázis. Ebben a bázisban ugyanis mátrixa – mint azt bizonyítani fogjuk – diagonális alakot ölt.

8.24. DEFINÍCIÓ (DIAGONALIZÁLHATÓSÁG). *Az $n\times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix* diagonalizálható*, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz ha létezik egy olyan diagonális $\mathbf{\Lambda}$ és egy invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy*

$$\mathbf{\Lambda}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}.\tag{8.4}$$

8.25. TÉTEL (DIAGONALIZÁLHATÓSÁG SZÜKSÉGES ÉS ELÉGSÉGES FELTÉTELE). *Az $n\times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, azaz pontosan akkor létezik olyan $\mathbf{C}$ mátrix, melyre $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ diagonális, ha $\mathbf{A}$-nak van n lineárisan független sajátvektora. Ekkor a diagonális mátrix az $\mathbf{A}$ sajátértékeiből, $\mathbf{C}$ a sajátvektoraiból áll.*

BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{A}$ hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz van olyan $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$ diagonális, akkor $\mathbf{C}$-vel balról szorozva a $\mathbf{C\Lambda} = \mathbf{AC}$ egyenlőséget kapjuk. Ha $\mathbf{C} = [\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \dots\ \mathbf{x}_n]$ és $\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, akkor

$$[\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \dots\ \mathbf{x}_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix} = \mathbf{A}[\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \dots\ \mathbf{x}_n]. \tag{8.5}$$

Itt a bal oldali mátrix i-edik oszlopa $\lambda_i\mathbf{x}_i$, a jobb oldali mátrixé $\mathbf{Ax}_i$. Ezek megegyeznek, azaz $\mathbf{Ax}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$, tehát $\mathbf{x}_i$ a λ_i sajátértékhez tartozó sajátvektor. Mivel $\mathbf{C}$ invertálható, ezért oszlopvektorai függetlenek, ami bizonyítja az állításunk egyik felét. Tegyük most fel, hogy van $\mathbf{A}$-nak n független sajátvektora. Képezzünk a sajátértékekből egy $\mathbf{\Lambda}$ diagonális mátrixot, úgy hogy a $\mathbf{C}$ mátrix i-edik oszlopába kerülő $\mathbf{x}_i$ vektorhoz tartozó λ_i sajátérték a $\mathbf{\Lambda}$ mátrix i-edik oszlopába kerüljön. Mivel $\lambda_i\mathbf{x}_i = \mathbf{Ax}_i$, ezért fönnáll a (8.5) összefüggés, azaz $\mathbf{\Lambda}$ hasonló $\mathbf{A}$-hoz. □

► A $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$ átírható

$$\mathbf{A} = \mathbf{C\Lambda C}^{-1} \tag{8.6}$$

alakba, amit az $\mathbf{A}$ mátrix *sajátfelbontásának* nevezünk.

8.26. PÉLDA (MÁTRIX DIAGONALIZÁLÁSA). *Diagonalizálható-e a 8.12. példabeli*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

mátrix?

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait meghatároztuk a 8.12. példában. Mivel $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, a hozzájuk tartozó sajátvektorok $(1,0,0)$, $(1/2,1,0)$ és $(1/2,0,1)$, és ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ezért $\mathbf{A}$ hasonló a $\mathbf{\Lambda}$ diagonális mátrixhoz, ahol

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix}1 & \frac12 & \frac12\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Ez könnyen igazolható a $\mathbf{C\Lambda} = \mathbf{AC}$ összefüggés ellenőrzésével:

$$\begin{bmatrix}1 & \frac12 & \frac12\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac12 & \frac12\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

□

*Bal sajátvektorok és a sajátfelbontás diadikus alakja** Az $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ egyenlet helyett vizsgálhatjuk az $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \lambda\mathbf{y}^\mathsf{T}$ egyenletet is.

Az $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \lambda\mathbf{y}^\mathsf{T}$ egyenlet $\mathbf{y}^\mathsf{T} \neq \mathbf{0}^\mathsf{T}$ feltételnek megfelelő sorvektorait az $\mathbf{A}$ mátrix *bal sajátvektorainak* nevezzük. E megfogalmazásban a sajátvektorokat szokás jobb sajátvektoroknak is nevezni.

A fenti egyenletet transzponálva kapjuk, hogy

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y},$$

vagyis a bal sajátvektorok a transzponált sajátvektorainak transzponáltjai. Mivel $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^\mathsf{T}) = \det(\mathbf{A}^\mathsf{T} - \lambda\mathbf{I})$, azaz $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ karakterisztikus polinomja azonos, ezért a bal és jobb sajátvektorokhoz tartozó sajátértékek azonosak. A bal és jobb sajátvektorok azonban általában nem egyeznek meg.

Ha $\mathbf{A}$ diagonalizálható, azaz $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$, akkor a 8.25. tételhez hasonlóan a $\mathbf{\Lambda C}^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}$ mátrixegyenletből azt kapjuk, hogy $\mathbf{C}^{-1}$ sorvektorai $\mathbf{A}$ bal sajátvektorai. Jelölje ugyanis a $\mathbf{C}^{-1}$ mátrix i-edik sorvektorát $\mathbf{y}_i^\mathsf{T}$, ekkor

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{y}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n^\mathsf{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{y}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n^\mathsf{T} \end{bmatrix} \mathbf{A} \tag{8.7}$$

tehát $\lambda_i\mathbf{y}_i^\mathsf{T} = \mathbf{y}_i^\mathsf{T}\mathbf{A}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, vagyis $\mathbf{y}_i^\mathsf{T}$ valóban bal sajátvektor. Ekkor a sajátfelbontás azonnal diádok összegévé bontható:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{C\Lambda C}^{-1} &= [\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \dots\ \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{y}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n^\mathsf{T} \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1^\mathsf{T} + \lambda_2\mathbf{x}_2\mathbf{y}_2^\mathsf{T} + \dots + \lambda_n\mathbf{x}_n\mathbf{y}_n^\mathsf{T} \end{aligned} \tag{8.8}$$

Ezt nevezzük a *sajátfelbontás diadikus alakjának*.

8.27. PÉLDA (SAJÁTFELBONTÁS DIADIKUS ALAKJA ÉS A BAL SAJÁTVEKTOROK). *Határozzuk meg a 8.26. és a 8.12. példában szereplő*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix bal sajátvektorait, sajátfelbontását és annak diadikus alakját.

MEGOLDÁS. A bal sajátvektorok megegyeznek a transzponált sajátvektorainak transzponáltjaival. Így a bal sajátvektorok a szokásos technikával kiszámolhatók. Ha azonban a sajátfelbontást is kiszámoljuk, a bal sajátvektorok kiolvashatók a $\mathbf{C}^{-1}$ mátrixból is. A 8.26. példában meghatároztuk a $\mathbf{C}$ mátrixot, annak inverzét kiszámolva kapjuk a sajátfelbontást:

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ebből a diádokká való átírás a következő:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

*Diagonalizálható mátrixok polinomjai és a Cayley–Hamilton-tétel** Belátjuk, hogy ha egy mátrixot behelyettesítünk saját karakterisztikus polinomjába, nullmátrixot kapunk.

Ha $p(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ egy tetszőleges polinom, akkor értelmezhető e polinomnak egy tetszőleges négyzetes mátrixban fölvett értéke, vagyis értelmezhető négyzetes mátrix polinomja a következő képlettel:

$$p(\mathbf{A}) = c_n \mathbf{A}^n + c_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + c_1 \mathbf{A} + c_0 \mathbf{I}.$$

Ha az $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható, és sajátfelbontása $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$, akkor $\mathbf{A}^2 = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{C}^{-1}$. Hasonlóképp tetszőleges nemnegatív k egészre

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{C}^{-1}.$$

Eszerint bármely $p(x)$ polinomra $p(\mathbf{A}) = \mathbf{C}p(\mathbf{\Lambda})\mathbf{C}^{-1}$. Másrészt bármely diagonális mátrix polinomja a diagonális elemek polinomjával számolható, azaz

$$p\left(\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\right) = \operatorname{diag}\left(p(\lambda_1), p(\lambda_2), \ldots, p(\lambda_n)\right).$$

Tehát bizonyítottuk a következő állítást:

8.28. ÁLLÍTÁS (DIAGONALIZÁLHATÓ MÁTRIX POLINOMJA). *Legyen* $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$, *ahol* $\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, *és* $p(x)$ *egy tetszőleges polinom. Ekkor*

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & p(\lambda_n) \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1}.$$

Jelölje most $\chi_{\mathbf{A}}$ az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomját! Tehát ha λ az $\mathbf{A}$ sajátértéke, akkor $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$. Innen azonnal adódik, hogy $\chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, ugyanis

$$\begin{aligned}\chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) &= \mathbf{C}\,\chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{\Lambda})\,\mathbf{C}^{-1}\\ &= \mathbf{C}\,\operatorname{diag}(\chi_{\mathbf{A}}(\lambda_1), \chi_{\mathbf{A}}(\lambda_2), \dots, \chi_{\mathbf{A}}(\lambda_n))\,\mathbf{C}^{-1}\\ &= \mathbf{O}.\end{aligned}$$

Ez az állítás nem csak diagonalizálható mátrixokra igaz, hanem általánosan is. Erre azonnal mutatunk egy egyszerű, de rossz bizonyítást! Mivel a karakterisztikus polinom $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, gondolhatnánk, hogy akkor $\chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{I}) = \det(\mathbf{O}) = 0$. Ez azonban hibás érvelés: λ helyébe egy mátrixban mátrixokat helyettesítettünk, ráadásul a jobb oldalon skalár, a bal oldalon mátrix áll!

8.29. tétel (Cayley–Hamilton-tétel). *Ha $\mathbf{A}$ egy tetszőleges négyzetes mátrix, melynek karakterisztikus polinomja $\chi_{\mathbf{A}}$, akkor $\chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$. Az $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja így

$$\det \mathbf{B} = \chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + p_1\lambda + p_0. \tag{8.9}$$

$\mathbf{B}$ bármely eleméhez tartozó előjeles aldetermináns λ egy legföljebb $n-1$-edfokú polinomja, így léteznek olyan konstans elemű $\mathbf{C}_0$, $\mathbf{C}_1, \dots,$ $\mathbf{C}_{n-1}$ mátrixok, hogy

$$\operatorname{adj} \mathbf{B} = \lambda^{n-1}\mathbf{C}_{n-1} + \dots + \lambda\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_0. \tag{8.10}$$

A mátrix inverzéről szóló 6.28. tételbeli (6.3) képlet szerint $\det(\mathbf{B})\mathbf{I} = \mathbf{B}\operatorname{adj}(\mathbf{B})$. Ennek jobb oldalán elvégezzük a (8.10) szerinti behelyettesítést:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}\operatorname{adj}\mathbf{B} &= (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\left(\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k\mathbf{C}_k\right)\\ &= \mathbf{A}\mathbf{C}_0 + \left(\sum_{k=1}^{n-1}\lambda^k(\mathbf{A}\mathbf{C}_k - \mathbf{C}_{k-1})\right) - \lambda^n\mathbf{C}_{n-1}.\end{aligned}$$

Felírjuk a $\det(\mathbf{B})\mathbf{I} = \mathbf{B}\operatorname{adj}(\mathbf{B})$ egyenlőség bal és jobb oldalán álló együtthatók egyenlőségét, és mindegyiket beszorozzuk $\mathbf{A}$ megfelelő hatványával az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned}(-1)^n\mathbf{I} &= -\mathbf{C}_{n-1} && \cdot\,\mathbf{A}^n\\ p_{n-1}\mathbf{I} &= \mathbf{A}\mathbf{C}_{n-1} - \mathbf{C}_{n-2} && \cdot\,\mathbf{A}^{n-1}\\ &\;\;\vdots && \;\;\vdots\\ p_2\mathbf{I} &= \mathbf{A}\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1 && \cdot\,\mathbf{A}^2\\ p_1\mathbf{I} &= \mathbf{A}\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0 && \cdot\,\mathbf{A}\\ p_0\mathbf{I} &= \mathbf{A}\mathbf{C}_0.\end{aligned}$$

A beszorzás után kapott egyenlőségeket összeadva kapjuk, hogy

$$(-1)^n\mathbf{A}^n + p_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + p_1\mathbf{A} + p_0\mathbf{I} = \mathbf{O},$$

a jobb oldalon ugyanis teleszkóösszegszerűen minden tag kiesik. Ezzel tehát bizonyítottuk, hogy $\chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$. □

Különböző sajátértékek sajátalterei A diagonalizálhatóság fontos voltára tekintettel érdemes további feltételeket gyűjteni, melyek könnyen ellenőrizhetők.

Több elégséges feltétel származtatható a következő tételből:

8.30. TÉTEL (KÜLÖNBÖZŐ SAJÁTÉRTÉKEK SAJÁTVEKTORAI). *Ha λ_1, $\lambda_2, \ldots$ λ_k különböző sajátértékei az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixnak, akkor a hozzájuk tartozó $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \ldots$ $\mathbf{x}_k$ sajátvektorok lineárisan függetlenek.*

BIZONYÍTÁS. Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy e vektorok lineárisan összefüggők. Ekkor van a vektorok közt olyan, amely csak a kisebb indexűek lineáris függvénye. Legyen ezek közül a legkisebb indexű $\mathbf{x}_i$, azaz

$$\mathbf{x}_i = c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}, \tag{8.11}$$

de az i-nél kisebb indexű vektorok már lineárisan függetlenek. Szorozzuk meg az egyenlőség mindkét oldalát balról az $\mathbf{A}$ mátrixszal:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{A}(c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}) = c_1\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\mathbf{A}\mathbf{x}_{i-1},$$

majd használjuk ki, hogy e vektorok sajátvektorok:

$$\lambda_i\mathbf{x}_i = c_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\lambda_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}. \tag{8.12}$$

Ezután a (8.11) egyenlet mindkét oldalát λ_i-vel szorozva kapjuk, hogy

$$\lambda_i\mathbf{x}_i = c_1\lambda_i\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\lambda_i\mathbf{x}_{i-1}. \tag{8.13}$$

Végül a (8.13) egyenletből a (8.12) egyenletet kivonva kapjuk, hogy

$$\mathbf{0} = c_1(\lambda_i - \lambda_1)\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}(\lambda_i - \lambda_{i-1})\mathbf{x}_{i-1},$$

Mivel az $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}$ vektorok már lineárisan függetlenek, és a $\lambda_1, \ldots,$ λ_i értékek különbözőek, ezért $c_1 = \cdots = c_{i-1} = 0$. Eszerint

$$\mathbf{x}_i = 0\mathbf{x}_1 + \cdots + 0\mathbf{x}_{i-1} = \mathbf{0},$$

ami ellentmondás, hisz $\mathbf{x}_i$ sajátvektor, tehát nem lehet a $\mathbf{0}$. Ez bizonyítja az indirekt feltevés helytelen voltát, azaz igazolja állításunkat. □

► Szokás úgy fogalmazni, hogy a különböző sajátértékekhez tartozó sajátalterek lineárisan függetlenek, hisz bárhogy választunk mindegyikükből egy-egy nemzérus vektort, azok lineárisan függetlenek lesznek.

► Másik fontos következménye e tételnek, hogy ha különböző sajátértékekhez tartozó sajátalterek mindegyikéből lineárisan független vektorokat választunk, akkor még ezek egyesítése is lineárisan független lesz. Ha ugyanis lineárisan összefüggnének, akkor az egy altérbe eső vektorok lineáris kombinációit összevonva egyetlen vektorrá, minden sajátértékhez egy-egy sajátvektort kapnánk, melyek összefüggők lennének, ami a fenti tételnek ellentmond.
► Speciálisan az is igaz, hogy különböző sajátértékekhez tartozó sajátalterek mindegyikéből egy bázist választva, azok egyesítése is lineárisan független vektorrendszert ad.

8.31. KÖVETKEZMÉNY (KÜLÖNBÖZŐ SAJÁTÉRTÉKEK ÉS A DIAGONALIZÁLHATÓSÁG). *Ha az n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrixnak n darab különböző sajátértéke van, akkor diagonalizálható.*

BIZONYÍTÁS. A 8.30. tétel szerint n különböző sajátértékhez n független sajátvektor tartozik, ami a 8.25. tétel szerint épp azt jelenti, hogy a mátrix diagonalizálható. □

Végezetül fölsorolunk néhány mátrixosztályt, melyekbe tartozó mátrixok mindegyike egyformán viselkedik a diagonalizálhatóságra nézve:

a) Egy valós n-edrendű mátrix nem diagonalizálható a valós mátrixok körében, ha karakterisztikus egyenletének vannak nem valós gyökei, mert a diagonalizált alakban volnának nem valós számok. Például a

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix a valósok fölött nem diagonalizálható, de a komplexek fölött igen (ld. a **??** feladatot).

b) Nem diagonalizálhatók a nilpotens mátrixok, például a

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix (**??** feladat).

c) Diagonalizálható minden szimmetrikus mátrix, sőt, sajátvektoraiból ortonormált bázis is kiválasztható. Ezt hamarosan belátjuk (9.2. tétel).

8.32. PÉLDA (DIAGONALIZÁLHATÓSÁG MEGÁLLAPÍTÁSA). *Döntsük el,* *hogy az alábbi mátrixok közül melyik diagonalizálható valós mátrixként!*

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&-4\\4&1\end{bmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{bmatrix},\ \mathbf{D}=\begin{bmatrix}6&9\\9&6\end{bmatrix}.$$

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{A}$ mátrix nilpotens, mert $\mathbf{A}^2=\mathbf{O}$, így nem diagonalizálható. A $\mathbf{B}$ mátrixnak vannak nem valós sajátértékei, így a valósok fölött nem diagonalizálható, de a komplexek fölött igen, mert két különböző sajátértéke van. A $\mathbf{C}$ mátrixnak különbözőek a sajátértékei, és mind valósak (1, 4, 6), így diagonalizálható. A $\mathbf{D}$ mátrix szimmetrikus, tehát diagonalizálható. □

*Sajátértékek multiplicitása és a diagonalizálhatóság** A sajátértékek algebrai és geometriai multiplicitása, valamint a diagonalizálhatóság közt egyszerű, de fontos összefüggés van. Nevezetesen a geometriai multiplicitás sosem nagyobb az algebrainál, másrészt a diagonalizálhatóság ekvivalens azzal, hogy a geometriai és algebrai multiplicitások minden sajátérték esetén megegyeznek.

8.33. TÉTEL (ALGEBRAI ÉS GEOMETRIAI MULTIPLICITÁS KAPCSOLATA). *Egy mátrix valamely sajátértékének geometriai multiplicitása nem lehet nagyobb az algebrai multiplicitásánál.*

BIZONYÍTÁS. Az $\mathbf{A}$ mátrix egy μ sajátértékének geometriai multiplicitását jelölje g. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{A}-\mu\mathbf{I}$ nullterének g a dimenziója. Legyen egy bázisa $\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_g\}$. Egészítsük ki e bázist az egész tér bázisává az $\mathbf{x}_{g+1},\dots,\mathbf{x}_n$ vektorokkal. E független vektorokból képzett $\mathbf{C}=[\mathbf{x}_1\ \dots\ \mathbf{x}_g|\mathbf{x}_{g+1}\ \dots\ \mathbf{x}_n]$ mátrix invertálható. Írjuk $\mathbf{C}$-t blokkmátrix alakba: $\mathbf{X}$ legyen az első g oszlopból álló blokk, $\mathbf{Y}$ a maradék, azaz $\mathbf{C}=[\mathbf{X}|\mathbf{Y}]$. Mivel $\mathbf{X}$ oszlopai a μ-höz tartozó sajátvektorok, ezért $\mathbf{AX}=\mu\mathbf{X}$. A $\mathbf{C}^{-1}$ inverzet első g sora után bontsuk blokkokra:

$$\mathbf{C}^{-1}=\left[\begin{array}{c}\mathbf{Z}\\\hline\mathbf{W}\end{array}\right].$$

Írjuk fel az $\mathbf{I}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}$ összefüggést blokkmátrix alakban:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{I}_g&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{I}_{n-g}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{Z}\\\mathbf{W}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{X}&\mathbf{Y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{ZX}&\mathbf{ZY}\\\mathbf{WX}&\mathbf{WY}\end{bmatrix}.$$

Innen leolvasható, hogy $\mathbf{WX}=\mathbf{O}$, $\mathbf{ZY}=\mathbf{O}$, $\mathbf{ZX}=\mathbf{I}_g$, $\mathbf{WY}=\mathbf{I}_{n-g}$. Ezeket fölhasználva kapjuk, hogy

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}=\begin{bmatrix}\mathbf{Z}\\\mathbf{W}\end{bmatrix}\mathbf{A}\begin{bmatrix}\mathbf{X}&\mathbf{Y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{ZAX}&\mathbf{ZAY}\\\mathbf{WAX}&\mathbf{WAY}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mu\mathbf{I}_g&\mathbf{ZAY}\\\mathbf{O}&\mathbf{WAY}\end{bmatrix},$$

ugyanis $\mathbf{ZAX} = \mathbf{Z}\mu\mathbf{X} = \mu\mathbf{ZX} = \mu\mathbf{I}_g$, és $\mathbf{WAX} = \mu\mathbf{WX} = \mathbf{O}$. Az így kapott mátrix karakterisztikus polinomja

$$\begin{vmatrix} \mu\mathbf{I}_g - \lambda\mathbf{I}_g & \mathbf{ZAY} \\ \mathbf{O} & \mathbf{WAY} - \lambda\mathbf{I}_{n-g} \end{vmatrix},$$

ami a 6.30. tétel szerint $(\mu - \lambda)^g \det(\mathbf{WAY} - \lambda\mathbf{I}_{n-g})$. Ez pedig azt jelenti, hogy $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$ és ezzel együtt $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomjának μ legalább g-szeres algebrai multiplicitású gyöke. □

8.34. TÉTEL (DIAGONALIZÁLHATÓSÁG ÉS A GEOMETRIAI MULTIPLICITÁS). *Egy n-edrendű négyzetes mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha a sajátértékeihez tartozó geometriai multiplicitások összege n.*

BIZONYÍTÁS. ($\Rightarrow$) Ha a mátrix diagonalizálható, akkor egy adott sajátértékhez tartozó sajátaltér dimenziója megegyezik e sajátérték geometriai multiplicitásával. A geometriai multiplicitások összege tehát épp n, hisz egyetlen sajátvektor sem lehet két sajátaltérben.

($\Leftarrow$) A geometriai multiplicitás nem nagyobb az algebrainál, az algebraiak összege pedig legföljebb n (komplex esetben pontosan n, valós esetben lehet n-nél kisebb is, ha a karakterisztikus polinomnak vannak nem valós gyökei). Így ha a geometriai multiplicitások összege n, akkor minden sajátaltérből kiválasztva egy bázist, és véve ezek egyesítését, egy n sajátvektorból álló független vektorrendszert kapunk (ld. a 8.30. tétel utáni megjegyzéseket). Így tehát a mátrix diagonalizálható. □

► E tétel elegáns megfogalmazása így hangzik: egy $\mathbb{T}$ test fölötti n-edrendű mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha a $\mathbb{T}^n$ tér előáll sajátaltereinek direkt összegeként.

► A tétel lineáris leképezésekre is kimondható: az $A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ lineáris leképezés pontosan akkor diagonalizálható, ha sajátalterei dimenziójának összege n.

8.35. PÉLDA (LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓ DIAGONALIZÁLÁSA). *Az alábbi lineáris leképezésekhez keressünk – pusztán geometriai szemléletünkre hagyatkozva – olyan bázist, melyben a mátrixuk diagonális. Használjuk fel a 8.22. példa eredményeit.*

a) a sík vektorainak tükrözése egy egyenesre (vagy pontjainak tükrözése egy origón átmenő egyenesre);
b) a sík vektorainak merőleges vetítése egy egyenesre (vagy pontjainak merőleges vetítése egy origón átmenő egyenesre);
c) a tér vektorainak elforgatása egy egyenes körül a π egész számú többszörösétől különböző szöggel;
d) a tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra;
e) a tér vektorainak tükrözése egy síkra.

MEGOLDÁS. A 8.22. példában meghatároztuk e leképezések sajátaltereit. Ezeket használjuk a következőkben.

a) Az egyenes – melyre tükrözünk – egyik irányvektora legyen $\mathbf{a}$, egy rá merőleges nemnulla vektor legyen $\mathbf{b}$. Ekkor $T\mathbf{a} = \mathbf{a}$ és $T\mathbf{b} = -\mathbf{b}$, ahol T a tükröző lineáris leképezés. Ennek az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázisban a mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Az egyenes – melyre vetítünk – egyik irányvektora legyen $\mathbf{a}$, egy rá merőleges nemnulla vektor legyen $\mathbf{b}$. Ekkor $P\mathbf{a} = \mathbf{a}$ és $P\mathbf{b} = \mathbf{0}$, ahol P a vetítő lineáris leképezés. Ennek az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázisban a mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) E leképezésnek nincs valós diagonális mátrixa, mert csak egyetlen valós sajátaltere van, és az csak 1-dimenziós: ez a tengely irányvektora által kifeszített altér. A forgástengelyre merőleges sík ugyan nem sajátaltér, de a forgatás önmagába viszi (az ilyet nevezik *invariáns altérnek*), így ennek bázisával egy „diagonálishoz közeli” alakot kaphatunk. Ha a forgás tengelyének egy irányvektora $\mathbf{a}$, a rá merőleges sík egy ortonormált bázisa $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, ahol a $\mathbf{b}$ vektor $\pi/2$ radiánnal való elforgatottja épp $\mathbf{c}$, akkor az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ bázisban a forgató F leképezés mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

ugyanis $F\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $F\mathbf{b} = \cos\alpha\mathbf{b} + \sin\alpha\mathbf{c}$, $F\mathbf{c} = -\sin\alpha\mathbf{b} + \cos\alpha\mathbf{c}$.

d) A sík, melyre vetítünk az 1 sajátértékhez tartozik. Ha ebben választunk egy $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázist, és $\mathbf{c}$ egy a síkra merőleges nemzérus vektor, akkor $T\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $T\mathbf{b} = \mathbf{b}$, $T\mathbf{c} = \mathbf{0}$, így T mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e) A sík, melyre tükrözünk az 1 sajátértékhez tartozik. Ha ebben választunk egy $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázist, és $\mathbf{c}$ egy a síkra merőleges nemzérus vektor, akkor $T\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $T\mathbf{b} = \mathbf{b}$, $T\mathbf{c} = -\mathbf{c}$, így T mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

□

*Diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontása** A diagonalizálható $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$ alakja egy hasznos felbontását, az ún. spektrálfelbontását adja a mátrixnak.

Legyen $\mathbf{A}$ spektruma $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$. Bontsuk fel a $\mathbf{\Lambda}$ mátrixot blokkdiagonális alakra úgy, hogy az azonos sajátértékek egy blokkba kerüljenek, majd ennek megfelelően bontsuk fel a $\mathbf{C}$ és $\mathbf{C}^{-1}$ mátrixot is blokkokra a következők szerint:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{I} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \lambda_2\mathbf{I} & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \lambda_k\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \dots & \mathbf{X}_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{Y}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_k^\mathsf{T} \end{bmatrix}.$$

Írjuk föl e mátrixokkal az $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$ felbontást, majd fejtsük ki a blokkműveleteket:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \dots & \mathbf{X}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{I} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \lambda_2\mathbf{I} & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \lambda_k\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{Y}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_k^\mathsf{T} \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1^\mathsf{T} + \lambda_2\mathbf{X}_2\mathbf{Y}_2^\mathsf{T} + \dots + \lambda_k\mathbf{X}_k\mathbf{Y}_k^\mathsf{T} \\ &= \lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2 + \dots + \lambda_k\mathbf{P}_k, \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{P}_i = \mathbf{X}_i\mathbf{Y}_i^\mathsf{T}$ a λ_i sajátértékhez tartozó mátrix, melyről a következőket fogjuk megmutatni:

8.36. ÁLLÍTÁS (DIAGONALIZÁLHATÓ MÁTRIXOK SPEKTRÁLFELBONTÁSA). *Minden $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ spektrumú diagonalizálható $\mathbf{A}$ mátrix felírható*

$$\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2 + \dots + \lambda_k\mathbf{P}_k$$

alakban, ahol

a) $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_k = \mathbf{I}$,

b) $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j = \mathbf{O}$, *ha* $i \neq j$,

c) $\mathbf{P}_i$ *az* $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})$ *sajátaltérre való* $\mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})$ *altér menti vetítés.*

► Valójában több is igaz, nevezetesen megmutatható, hogy a fenti három feltétel szükséges és elégséges feltétele annak, hogy $\mathbf{A}$ diagonalizálható legyen. E tételt a diagonalizálható mátrixok spektráltételének is nevezik.

BIZONYÍTÁS. A fent konstruált felbontásról megmutatjuk, hogy eleget tesz a feltételeknek.

a) A $\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{I}$ egyenlőséget blokkmátrixokként kezelve és fölhasználva a $\mathbf{P}_i = \mathbf{X}_i\mathbf{Y}_i^\mathsf{T}$ egyenlőségeket kapjuk, hogy $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_k = \mathbf{I}$.

b) A $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{I}$ egyenlőség blokkmátrixalakja viszont az $\mathbf{Y}_i^\mathsf{T}\mathbf{X}_i = \mathbf{I}$, és az $\mathbf{Y}_i^\mathsf{T}\mathbf{X}_j = \mathbf{O}$ ($i \neq j$) egyenlőségre vezet, ahonnan $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j = \mathbf{X}_i\mathbf{Y}_i^\mathsf{T}\mathbf{X}_j\mathbf{Y}_j^\mathsf{T} = \mathbf{O}$.

c) Az előzőekből adódik, hogy $\mathbf{P}_i^2 = \mathbf{P}_i$, ugyanis $\mathbf{P}_i^2 = \mathbf{X}_i(\mathbf{Y}_i^\mathsf{T}\mathbf{X}_i)\mathbf{Y}_i^\mathsf{T} = \mathbf{X}_i\mathbf{Y}_i^\mathsf{T} = \mathbf{P}_i$. Eszerint tehát $\mathbf{P}_i$ vetítés. Meg kell még mutatnunk, hogy $\mathcal{O}(\mathbf{P}_i) = \mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})$. Ehhez fölhasználjuk, hogy bármely két $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ mátrixra $\mathcal{O}(\mathbf{XY}) \subseteq \mathcal{O}(\mathbf{X})$.

$$\mathcal{O}(\mathbf{P}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{X}_i\mathbf{Y}_i^\mathsf{T}) \subseteq \mathcal{O}(\mathbf{X}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{X}_i\mathbf{Y}_i^\mathsf{T}\mathbf{X}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{P}_i\mathbf{X}_i) \subseteq \mathcal{O}(\mathbf{P}_i).$$

Tehát mindenütt egyenlőség áll fenn, és $\mathcal{O}(\mathbf{P}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{X}_i) = \mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})$, hiszen $\mathcal{O}(\mathbf{X}_i)$ a λ_i-hez tartozó sajátaltér. Végül megmutatjuk, hogy a vetítés nulltere $\mathcal{N}(\mathbf{P}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})$. Kihasználva a fönt bizonyítottakat kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}_i(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}) = \mathbf{P}_i\left(\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\mathbf{P}_j - \lambda_i\sum_{j=1}^{k}\mathbf{P}_j\right) = \sum_{j=1}^{k}(\lambda_j - \lambda_i)\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j = \mathbf{O}.$$

Eszerint $\mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}) \subseteq \mathcal{N}(\mathbf{P}_i)$. Másrészt $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}) = \mathcal{O}(\mathbf{P}_i)$, így a dimenziótétel miatt $\dim\mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}) = \dim\mathcal{N}(\mathbf{P}_i)$, ami bizonyítja, hogy $\mathcal{N}(\mathbf{P}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})$. □

8.37. PÉLDA (SPEKTRÁLFELBONTÁS). *Határozzuk meg a 8.12., a 8.26. és a 8.27. példákban szereplő*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix spektrálfelbontását.

MEGOLDÁS. E felbontáshoz felhasználhatjuk a 8.27. példában már kiszámolt sajátfelbontás diadikus alakját összevonva az azonos sajátértékhez tartozó diádokat, de kiemelve a sajátértéket:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= 0\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= 0\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Tehát

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{I}$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{O}$, e két mátrix valóban vetítő mátrix, hisz $\mathbf{P}_1^2 = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2^2 = \mathbf{P}_2$, és láthatóan a sajátalterekre vetítenek (ld. 8.12.). □

Sajátalterek direkt összege Eddigi eredményeinket úgy foglalhatjuk össze, hogy egy n-edrendű valós négyzetes mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha $\mathbb{R}^n$ minden nem zérus vektora egyértelműen felbomlik sajátvektorok összegére.

Az $\mathbb{R}^n$ teret többször is felbontottuk két altér direkt összegére. Most általánosítjuk a direkt összeg fogalmát.

8.38. DEFINÍCIÓ. *Legyenek $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$,..., $\mathcal{V}_k$ az $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ tér alterei. Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{V}$ tér a $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$,..., $\mathcal{V}_k$ alterek direkt összege – jelölésben $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{V}_k$ –, ha az alterek páronkénti metszete csak a nullvektorból áll, és az alterek összege az egész tér, azaz ha*

a) $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \{\mathbf{0}\}$, *ha* $i \neq j$ *és*

b) $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V} + \ldots + \mathcal{V}_k$.

A két altér direkt összegére kimondott és bizonyított 7.36. tétel természetes módon átvihető több altér összegére is. Az ott adott bizonyítás minimális változtatással itt is működik:

8.39. TÉTEL (A DIREKT ÖSSZEG TULAJDONSÁGAI). *Legyenek $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$,..., $\mathcal{V}_k$ az $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ tér alterei. Az alábbi állítások ekvivalensek:*

a) $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{V}_k$

b) *$\mathcal{V}$ minden vektora egyértelműen előáll egy $\mathcal{V}_1$-, egy $\mathcal{V}_2$-... és egy $\mathcal{V}_k$-beli vektor összegeként,*

c) *$\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$,..., $\mathcal{V}_k$ alterek egy-egy bázisának egyesítése a a $\mathcal{V}$ bázisát adja,*

d) $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \{\mathbf{0}\}$, *ha* $i \neq j$ *és* $\dim \mathcal{V}_1 + \dim \mathcal{V}_1 + \ldots + \dim \mathcal{V}_1 = n$.

► Az $\mathbb{R}^3$ tér standard bázisvektorai által generál 1-dimenziós alterek legyenek $\mathcal{V}_1 = \operatorname{span} \mathbf{i}$, $\mathcal{V}_2 = \operatorname{span} \mathbf{j}$ és $\mathcal{V}_3 = \operatorname{span} \mathbf{k}$. Ekkor $\mathbb{R}^3 = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \mathcal{V}_3$.

► A 3-dimenziós tér egy síkjára való tükrözés sajátalterei a sík, melyre tükrözünk (ez a $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó altér) és a síkra merőleges egyenes (mely a $\lambda = -1$ sajátértékhez tartozik). $\mathbb{R}^3$ e két altér direkt összege, mivel $\mathbb{R}^3$ minden vektora egyértelműen felbomlik egy síkba eső és egy rá merőleges vektor összegére.

► A tétel nem csak $\mathbb{R}^n$-re de bármely $\mathbb{F}$ test fölötti $\mathbb{F}^n$ térre is hasonlóan kimondható.

A fentiek alapján diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontásáról szóló tétel egy gyönyörű megfogalmazáshoz vezet:

8.40. TÉTEL (DIAGONALIZÁLHATÓ MÁTRIXOK SAJÁTALTEREI). *Az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha $\mathbb{R}^n$ előáll az $\mathbf{A}$ sajátaltereinek direkt összegeként.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ egy tetszőleges vektor. Ha $\mathbf{A}$ diagonalizálható, akkor a 8.36. tétel szerint $\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{P}_k$ az $\mathbf{A}$

mátrix spektrálfelbontása, így

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 \mathbf{x} + \lambda_2 \mathbf{P}_2 \mathbf{x} + \cdots + \lambda_k \mathbf{P}_k \mathbf{x} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \ldots + \mathbf{v}_k,$$

ahol a $\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{P}_i \mathbf{x}$ vektor valóban a λ_i-hez tartozó sajátaltérben van, tehát a tér sajátaltereinek összege. Mivel a sajátaltereknek csak a nullvektor a közös elemük, ezért ez az összeg egyúttal direkt összeg.

Ha $\mathbb{R}^n$ előáll sajátaltereinek direkt összegeként, akkor a sajátalterek dimenzióinak összege n, azaz a geometriai multiplicitások összege n, így az $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható. □

► A tétel nem csak mátrixokra, de lineáris leképezésekre is kimondható: egy $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés pontosan akkor diagonalizálható, ha $\mathbb{R}^n$ felbomlik L sajátaltereinek direkt összegére.

► A 3-dimenziós térben szemléltető példák a síkra való tükrözés, a síkra való vetítés, az egyenesre való tükrözés és az egyenesre való vetítés. Mindhárom példában $\mathbb{R}^3$ egy 2- és egy 1-dimenziós altér direkt összegére bomlik.

► A 3-dimenziós tér egy egyenese körüli α szögű ($\alpha \neq k\pi$) elforgatás nem diagonalizálható, bár látjuk, hogy a forgatás síkja és tengelye két olyan altér, melyek direkt összege az egész tér. E példa vezet majd a Jordan-féle normálalakhoz.

A sajátérték kiszámítása

A sajátértékek karakterisztikus polinomból való kiszámítása igen számításigényes módszer. A sajátértékek becslésére, közelítésére használt – többnyire iteratív technikákat használó – algoritmusok sokkal hatékonyabbak. Ráadásul az ezekben használt elvek nem csak a numerikus számítások szempontjából fontosak.

Gersgorin-körök Egy mátrix elemeiből nagyon egyszerű számításokkal becslések adhatók a sajátértékekre. A komplex számsík Gersgorin-körei például tartalmazzák az összes sajátértéket.

Az $n \times n$-es valós vagy komplex $\mathbf{A}$ mátrix Gersgorin-körein az a_{ii} középpű, és r_i^{sor} sugarú G_i^{sor}, illetve r_i^{osz} sugarú G_i^{osz} köröket értjük ($i = 1, 2, \ldots, n$), ahol

E körök Szemjon Aranovics Gersgorin orosz matematikus nevét viselik, mely a ciril betűkről való átírás miatt többféle alakban is előfordul, például Gershgorin, Gerschgorin, Geršgorin.

$$r_i^{\text{sor}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad r_i^{\text{osz}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ji}|. \tag{8.14}$$

Más szavakkal pl. a G_i^{sor} kör középpontja a_{ii}, sugara az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorában lévő, nem a főátlón lévő elemek abszolút értékeinek összege, míg G_i^{osz} sugara az i-edik oszlop nem a főátlón lévő elemei abszolút értékének összege.

8.41. PÉLDA (GERSGORIN-KÖRÖK). *Rajzoljuk föl a*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

mátrix Gersgorin köreit!

A megoldás a 8.3 ábrán látható.

8.42. TÉTEL (GERSGORIN-KÖRÖK TULAJDONSÁGAI). *Legyen* **A** *valós vagy komplex $n \times n$-es mátrix. Ekkor igazak a következők:*

a) Minden sajátérték benne van a G_i^{sor} körök egyesítésében.

b) Minden sajátérték benne van a G_i^{osz} körök egyesítésében.

c) Minden sajátérték benne van az előző két halmaz metszetében.

d) Ha a G_i^{sor} körök egy k-elemű részhalmaza diszjunkt a maradék $n-k$ kör mindegyikétől, akkor uniójuk multiplicitással számolva pontosan k sajátértéket tartalmaz.

BIZONYÍTÁS. Jelölje $\sigma(\mathbf{A})$ az **A** mátrix spektrumát!

a) Az állítás szerint $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\text{sor}}$. A λ sajátértékhez tartozó egyik sajátvektort osszuk el legnagyobb abszolút értékű koordinátájával. E vektort jelölje **x**, legyen $x_i = 1$, tehát $|x_j| \le 1$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Mivel $\lambda = \lambda x_i = [\lambda \mathbf{x}]_i = [\mathbf{A}\mathbf{x}]_i = \sum_j a_{ij} x_j$, így $\lambda - a_{ii} = \sum_{j \ne i} a_{ij} x_j$, tehát

$$|\lambda - a_{ii}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} a_{ij} x_j \right| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}||x_j| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}| = r_i^{\text{sor}}.$$

b) Mivel **A** és $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ sajátértékei megegyeznek, ezért sorok helyett oszlopokkal ugyanezek a számítások megismételhetők.

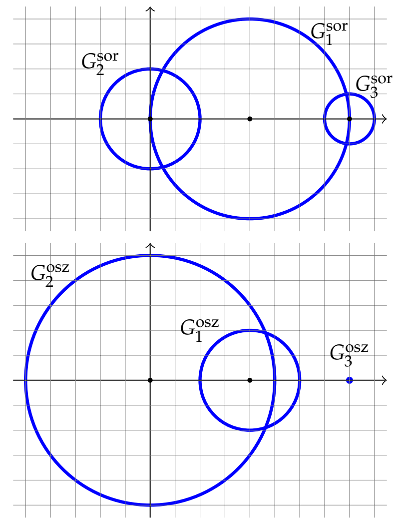
c) A sajátértékek az előző két pontban megadott halmazok mindegyikében, így metszetükben is benne vannak.

d) Legyen $\mathbf{B}(r)$ az a mátrix, melynek elemeire $b_{ii} = a_{ii}$ és $b_{ij} = r a_{ij}$, ha $i \ne j$. Mátrixműveletekkel kifejezve

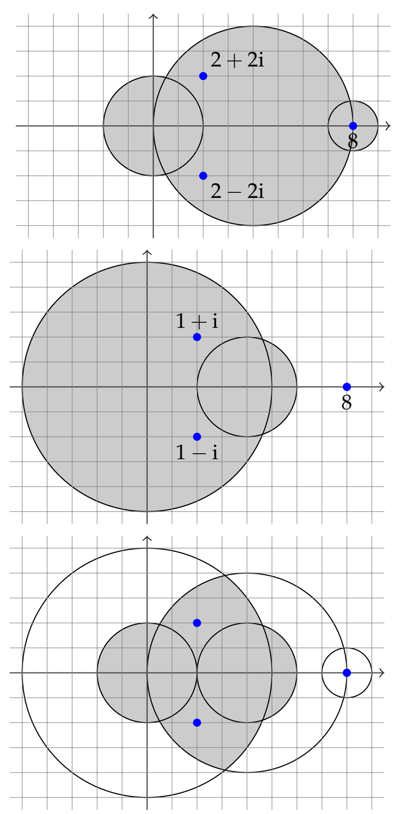
$$\mathbf{B}(r) = r\mathbf{A} + (1 - r)\operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn}).$$

Eszerint $\mathbf{B}(0) = \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$, $\mathbf{B}(1) = \mathbf{A}$. Változzék r folyamatosan 0-tól 1-ig. Eközben $\mathbf{B}(r)$ Gersgorin-körei 0-sugarúból indulva nőnek az **A** Gersgorin-köreiig, középpontjaik közben nem változnak. Mivel a sajátértékek a mátrix elemeinek folytonos függvényei, ezért az egymással fedésbe kerülő, de a többitől diszjunkt maradó k számú kör által lefedett sajátértékek száma k marad. □

kör	közép-pont	sugár
G_1^{sor}	$a_{11} = 4$	$r_1^{\text{sor}} = \|-4\| = 4$
G_2^{sor}	$a_{22} = 0$	$r_2^{\text{sor}} = 2$
G_3^{sor}	$a_{33} = 8$	$r_3^{\text{sor}} = 1$
G_1^{osz}	$a_{11} = 4$	$r_1^{\text{osz}} = 2$
G_2^{osz}	$a_{22} = 0$	$r_2^{\text{osz}} = \|-4\| + \|1\| = 5$
G_3^{osz}	$a_{33} = 8$	$r_3^{\text{osz}} = 0$



8.3. ábra: Az **A** mátrix Gersgorin körei



8.4. ábra: Az **A** mátrix sajátértékeit tartalmazza *a)* a sorösszeg szerinti halmaz, *b)* az oszlopösszeg szerinti halmaz, *c)* a két halmaz metszete

► Az nem igaz, hogy mindegyik Gersgorin-körben van legalább egy sajátérték. Például az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix sajátértékei $1+\mathrm{i}$ és $1-\mathrm{i}$. Ezek nem esnek bele sem a 0-középű, 1-sugarú sem a 2 középű 1-sugarú Gersgorin-körbe (ld. 8.4 *a), b)* ábra).

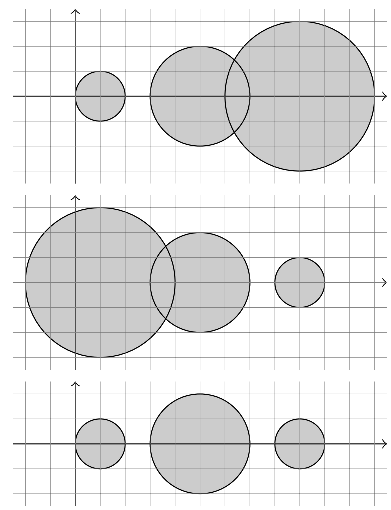
► Az előző megjegyzésnek megfelelően nem lehet úgy keresni a sajátértékeket, hogy minden főátlóbeli elemhez a sor- és oszlopösszegek közül a kisebbiket választjuk. Helyesen a tétel *a)* és *b)* pontjaiban konstruált halmazok metszetét kell venni, ami például esetünkben a 8.4 *c)* ábrán látható.

8.43. példa (Gersgorin-körök használata). *Mutassuk meg a Gersgorin-körök segítségével, hogy a*

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

mátrixnak minden sajátértéke valós.

Megoldás. Mivel valós elemű mátrix komplex gyökei párosával egymás konjugáltjai, ezért ha egy Gersgorin-kör diszjunkt a többitől, abban csak egy valós sajátérték lehet. A $\mathbf{B}$ mátrix sorok szerinti Gersgorin-körei azt mutatják, hogy az 1-középű 1-sugarú körben egy valós sajátérték van. Mivel a másik két kör metszi egymást, ezért a másik két sajátérték még lehetne nem valós. Az oszlopok szerinti 9-középű 1-sugarú Geschgorin-kör viszont egy újabb valós sajátértéket garantál, így a harmadik is szükségképpen az. Ezt mutatja a sorok és oszlopok szerinti halmazok metszete is. A sajátértékek a $[0,2]$, $[3,7]$ és $[8,10]$ intervallumokba esnek (ld. 8.5 ábra). □



8.5. ábra: A $\mathbf{B}$ mátrix sorösszeg és oszlopösszeg szerinti Gersgorin körei és ezek metszete. Utóbbi mutatja, hogy $\mathbf{B}$-nek három valós sajátértéke van.

8.44. állítás (Domináns főátlójú mátrix invertálhatósága). *Bármely soronként domináns főátlójú valós vagy komplex mátrix invertálható. Hasonló igaz az oszloponként domináns főátlójú mátrixokra is.*

Bizonyítás. A 2.58. definíció szerint az $\mathbf{A}$ mátrix soronként domináns főátlójú, ha bármely főátlóbeli elemére $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$. Ez épp azt jelenti, hogy $\mathbf{A}$ minden Gersgorin-körének középpontja messzebb van az origótól, mint amekkora a sugara, azaz a 0 szám egyik Gersgorin-körben sincs benne, tehát a 0 nem sajátérték, így $\mathbf{A}$ invertálható. □

Hatványmódszer A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei, a négynél magasabb fokú polinomokra viszont nem létezik megoldóképlet, így elvileg sem létezhet olyan módszer, mely a sajátértékeket mindig pontosan ki tudja számolni. A sajátértékek teszőlegesen pontos közelítésére viszont hatékony algoritmusok lézteznek. Ezek legalapvetőbbike a hatványmódszer.

Négyzetes mátrix egy sajátértékét *szigorúan dominánsnak* nevezzük, ha egyszeres multiplicitású, és abszolút értékben nagyobb az összes többinél. A hozzá tartozó sajátvektort és sajátalteret *szigorúan domináns sajátvektornak, ill. sajátaltérnek*, a belőlük alkotott párt *szigorúan domináns sajátpárnak* nevezzük.

A *hatványmódszer* megadja négyzetes mátrix szigorúan domináns sajátpárját.

Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak λ_1 szigorúan domináns sajátértéke. Összes sajátértékét indexeljük úgy, hogy fennálljon az

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_m|$$

összefüggés. Legyen $\mathbf{v}_i$ egy λ_i-hez tartozó sajátvektor. Világos, hogy λ_1 valós, egyébként $\bar{\lambda_1}$ egy tőle különböző, de azonos abszolút értékű sajátérték lenne.

Legyen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ egy olyan vektor, mely előáll a sajátvektorok lineáris kombinációjaként. Ha $\mathbf{A}$ diagonalizálható, akkor minden vektor ilyen. Legyen tehát $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m$. Ekkor tetszőleges k nemnegatív egészre

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^k\mathbf{x} &= c_1\mathbf{A}^k\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{A}^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{A}^k\mathbf{v}_m \\ &= c_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\lambda_m^k\mathbf{v}_m. \end{aligned}$$

Ekkor λ_1^k-val való osztás után $k \to \infty$ esetén

$$\frac{1}{\lambda_1^k}\mathbf{A}^k\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}_m \to c_1\mathbf{v}_1,$$

ugyanis $(\lambda_i/\lambda_1)^k \to 0$, ha $i > 1$. Eszerint ha $c_1 \neq 0$, akkor $\mathbf{A}^k\mathbf{x}$ iránya tart a domináns sajátvektor irányához. Ezt egy példán szemléltetjük.

8.45. PÉLDA. *Tekintsük az*

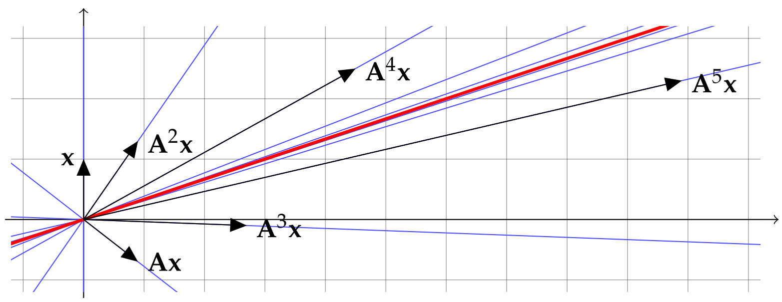
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.7 & 0.9 \\ 0.9 & -0.7 \end{bmatrix}$$

mátrixot! Határozzuk meg domináns sajátértékét és sajátalterét! Legyen $\mathbf{x} = (0, 1)$. *Számítsuk ki az* $\mathbf{A}^k\mathbf{x}$ *vektorokat néhány* k *értékre szemléltetve irányuknak a domináns sajátvektor irányához való tartását!*

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja $\det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}) = x^2 - x - 2$, ennek gyökei $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, így a szigorúan domináns sajátérték $\lambda_1 = 2$. A hozzá tartozó sajátalteret a $(3, 1)$ vektor feszíti ki. Egy programmal kiszámoltuk az $\mathbf{A}^k\mathbf{x}$ vektorokat a $k = 0, 1, \ldots, 8$ értékekre:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbf{A}^k\mathbf{x}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.9 \\ -0.7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.9 \\ 1.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.7 \\ -0.1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9.9 \\ 2.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 18.9 \\ 7.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 38.7 \\ 11.9 \end{bmatrix}$

A vektorok hossza láthatóan végtelenhez konvergál, de az általuk kifeszített altereknek a domináns sajátaltérhez való tartása így is jól leolvasható a 8.6 ábráról.



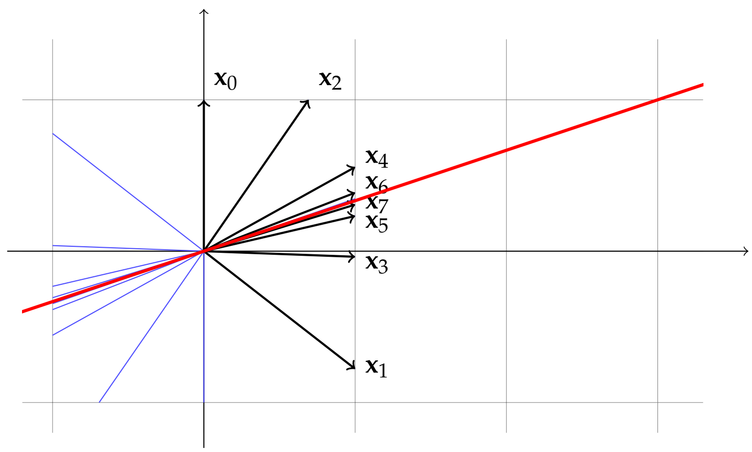
8.6. ábra: Az $\mathbf{A}^k\mathbf{x}$ vektorok ($k = 0, 1, \ldots, 5$) jelölt irányaik, valamint ezek határértéke: az $\mathbf{A}$ mátrix $\lambda = 2$ sajátértékhez tartozó sajátaltere (pirossal színezve).

Ha a domináns sajátérték abszolút értéke kisebb lenne 1-nél, akkor az $\mathbf{A}^k\mathbf{x}$ vektorsorozat a nullvektorhoz konvergálna. Ezért érdemes e sorozatot normálni, például osztani a hosszával. Még egyszerűbb elosztani a vektort a legnagyobb abszolút értékű koordinátájával. (Az így kapott vektorsorozat nem biztos, hogy konvergens lesz. Lehet, hogy pl. egy-egy koordinátahelyen alternáló divergens sorozatot kapunk. Ez elkerülhető, ha valamelyik nem nullához konvergáló koordináta előjelét egy esetleges -1-gyel szorzással mindig pozitívvá tesszük.) Jelölje $\mathbf{x}_k$ az $\mathbf{A}^k\mathbf{x}$ vektor legnagyobb koordinátájával való osztása után kapott vektort, és jelölje i ennek a koordinátának az indexét. Tehát $[\mathbf{x}_k]_i = 1$. Az alábbi táblázat az $\mathbf{x}_k$ és az $[\mathbf{Ax}_k]_i$ értékeket mutatja (utóbbi azt adja meg, hogy az 1 értékű koordináta hányszorosára változik az $\mathbf{A}$-val való szorzás után):

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1.000\\-0.778\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.692\\1.000\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1.000\\-0.037\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1.000\\0.556\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1.000\\0.232\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1.000\\0.386\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1.000\\0.307\end{bmatrix}$
$[\mathbf{Ax}_k]_i$		-0.700	1.000	-0.769	1.667	2.200	1.909	2.047

Az $\mathbf{x}_k$ vektorokat szemlélteti a 8.7 ábra. Sorozatuk határértéke az $(1, 1/3)$ vektor, ami a domináns sajátvektor. Általánosan is igaz, hogy az így kapott $\mathbf{x}_k$ sorozat elemei a szigorúan domináns sajátvektor becslését adják. Egyúttal a domináns sajátérték becslésére is kiadódik. Könnyen bizonyítható ugyanis, hogy ha $\mathbf{x}_k$ i-edik koordinátája 1, akkor $\mathbf{Ax}_k$ i-edik koordinátája a λ_1 egy becslését adja, pontosabban e sorozat határértéke λ_1. E konkrét példában a fenti táblázat alsó sora épp ezt a sorozatot tartalmazza, mely a $\lambda_1 = 2$ értékhez konvergál. □

8.46. TÉTEL (HATVÁNYMÓDSZER). *Ha λ_1 az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix szigorúan domináns sajátértéke, akkor létezik olyan $\mathbf{x}_0$ vektor, hogy az $\mathbf{A}^k\mathbf{x}_0$ vektorok által kifeszített alterek sorozata a domináns sajátaltérhez konvergál.*



8.7. ábra: Az $\mathbf{x}_k$ vektorok és a sajátaltér.

E tételt fentebb bizonyítottuk abban a speciális esetben, amikor $\mathbf{x}_0$ a sajátvektorok lineáris kombinációja. Valójában elég csak azt kikötni, hogy az $\mathbf{x}_0$ vektornak a domináns sajátvektor irányába eső összetevője ne a zérusvektor legyen.

Feladatok

Gersgorin-körök

8.2. Mutassuk meg, hogy az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

mátrixnak legalább két sajátértéke valós.

8.3. utassuk meg, hogy az alábbi mátrixok minden sajátértéke valós! *a)* $\begin{bmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Megoldások

8.2. A 9-közepű 1-sugarú Gersgorin-körben csak 1 gyök lehet, így az valós. Mivel összesen 4 gyöke van és a komplexek párosan fordulnak elő, ezért kell még valós gyöknek lennie.

8.3. *a)* A sorokhoz tartozó Gersgorin-körök közül az 1-középű, 1-sugarú kör diszjunkt a többitől, így ebben a körben egy van egy valós sajátérték, az oszlopokhoz tartozók közül a 9-középű, 1-sugarú diszjunkt a többitől, így ebben a körben is van egy valós sajátérték, és ha két sajátérték valós, akkor a harmadik is. Az *a)*-beli mátrixban a sorokra, a *b)*-beliben az oszlopokra alkalmazva

9
Diagonalizálás ortonormált bázisban

Számtalan műszaki és tudományos probléma valós szimmetrikus mátrixok vizsgálatára vezet. Ezek szerencsés esetek, mert ilyenkor sajátvektorokból álló ortonormált bázis is található, és ez sok számítást egyszerűvé és numerikusan is stabilabbá tesz. A szimmetrikus mátrixok használatát a kvadratikus alakok jeírásán demonstráljuk.

Ortogonális és unitér diagonalizálás

Egy mátrixot diagonalizálni azzal ekvivalens, hogy a hozzá tartozó mátrixleképezéshez egy olyan bázist találni, melyben mátrixa diagonális. Különösen szerencsés, ha e bázis még ortonormált is.

Valós mátrixok ortogonális diagonalizálása, valós spektráltétel Megmutatjuk, hogy a valós mátrixok közt pontosan a szimmetrikusak azok, amelyekhez található olyan ortonormált bázis, melyben az diagonális alakot ölt.

A 8.25. tétel szerint a diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele, hogy létezzék a mátrix rendjével egyező számú független sajátvektora. Ha e vektorok ortonormált rendszert alkotnak, akkor a belőlük alkotott mátrix ortogonális mátrix.

9.1. DEFINÍCIÓ (ORTOGONÁLIS DIAGONALIZÁLHATÓSÁG). *Az* $\mathbf{A}$ *mátrix* ortogonálisan diagonalizálható, *ha találunk egy ortogonális* $\mathbf{Q}$ *és egy diagonális* $\mathbf{\Lambda}$ *mátrixot, hogy* $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$.

► A definícióbeli egyenlőséggel ekvivalens alak: $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^\mathsf{T}$.

► Az nyilvánvaló, hogy ha egy mátrix ortogonálisan diagonalizálható, akkor szimmetrikus, ha ugyanis $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^\mathsf{T}$, akkor

$$\mathbf{A}^\mathsf{T} = (\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = (\mathbf{Q}^\mathsf{T})^\mathsf{T}\mathbf{\Lambda}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{A}.$$

E fejezet fő célja az állítás megfordításának igazolása. Ennek érdekében először megmutatjuk, hogy szimmetrikus mátrix sajátalterei nem csak függetlenek egymástól, de merőlegesek is egymásra.

9.2. TÉTEL (SZIMMETRIKUS MÁTRIX SAJÁTALTEREI). *Szimmetrikus mátrix bármely két különböző sajátaltere merőleges egymásra.*

BIZONYÍTÁS. Két különböző sajátaltér két különböző sajátértékhez tartozik. Megmutatjuk, hogy az egyik altér bármelyik vektora merőleges a másik altér bármely vektorára. Legyen tehát $(\lambda, \mathbf{x})$ és $(\mu, \mathbf{y})$ két sajátpár, ahol $\lambda \neq \mu$ két különböző sajátértéke $\mathbf{A}$-nak. Így $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ és $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mu\mathbf{y}$. Ebből adódik, hogy

$$\lambda(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x})^\mathsf{T}\mathbf{y} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mu\mathbf{y} = \mu(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{y}).$$

Eszerint $(\lambda - \mu)(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{y}) = 0$, de $\lambda - \mu \neq 0$, ezért $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$, azaz a két vektor merőleges egymásra. □

9.3. TÉTEL (VALÓS SPEKTRÁLTÉTEL). *A valós* $\mathbf{A}$ *mátrix pontosan akkor diagonalizálható ortogonálisan, ha szimmetrikus.*

BIZONYÍTÁS. Az állítás egyik felét megmutattuk a 9.7. definíció után. A másik felét az $\mathbf{A}$ mátrix rendjére vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. $n = 1$ esetén nincs mit bizonyítani, ekkor $\mathbf{A}$ szimmetrikus és diagonális alakú. Tegyük fel, hogy minden legföljebb $n-1$-edrendű mátrixra igaz az állítás, azaz hogy ha szimmetrikus, akkor ortogonálisan hasonló egy diagonális mátrixhoz. Mivel $\mathbf{A}$ szimmetrikus, ezért minden sajátértéke valós. Legyen ezek egyike λ, a hozzá tartozó egyik egységnyi hosszú sajátvektor $\mathbf{u}_1$. Egészítsük ki $\mathbf{u}_1$-et a teljes tér egy $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ ONB-ává. Ekkor a $\mathbf{Q}_0 = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \dots\ \mathbf{u}_n]$ mátrix ortogonális, és

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_0^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{u}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^\mathsf{T} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{u}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^\mathsf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{u}_1 & \mathbf{A}\mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{A}\mathbf{u}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{u}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^\mathsf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda\mathbf{u}_1 & \mathbf{A}\mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{A}\mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{B},
\end{aligned} \tag{9.1}$$

ugyanis $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ ONB, így $\mathbf{u}_1^\mathsf{T}(\lambda\mathbf{u}_1) = \lambda(\mathbf{u}_1^\mathsf{T}\mathbf{u}_1) = \lambda$, és $i > 1$ esetén $\mathbf{u}_i^\mathsf{T}(\lambda\mathbf{u}_1) = \lambda(\mathbf{u}_i^\mathsf{T}\mathbf{u}_1) = 0$. A $\mathbf{B}$ blokkmátrixban tehát $\mathbf{A}_1$ egy $(n-1) \times (n-1)$-es valós mátrix. Másrészt

$$\mathbf{B}^\mathsf{T} = (\mathbf{Q}_0^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q}_0)^\mathsf{T} = \mathbf{Q}_0^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_0^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 = \mathbf{B},$$

azaz $\mathbf{B} = \left[\begin{smallmatrix} \lambda & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{smallmatrix}\right]$ szimmetrikus, tehát $\mathbf{B} = \left[\begin{smallmatrix} \lambda & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{smallmatrix}\right]$, és $\mathbf{A}_1$ is szimmetrikus!

Mivel $\mathbf{B}$ hasonló $\mathbf{A}$-hoz, ezért sajátértékeik megegyeznek, tehát $\mathbf{A}_1$ minden sajátértéke $\mathbf{A}$-nak is sajátértéke. A teljes indukció miatt viszont $\mathbf{A}_1$-hez létezik olyan $\mathbf{Q}_1$ ortogonális és $\mathbf{\Lambda}_1$ diagonális mátrix, hogy $\mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{Q}_1^\mathsf{T}$. Ekkor viszont a $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0\left[\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix ortogonális, hisz két ortogonális mátrix szorzata, és $\mathbf{A}$-t hasonlóvá teszi egy diagonális mátrixhoz:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} &= \left(\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}\right)^\mathsf{T} \mathbf{A} \left(\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \mathbf{Q}_0^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1^\mathsf{T}\mathbf{A}_1\mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Ezzel bizonyítottuk, hogy a szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix is ortogonálisan diagonalizálható. □

► A tétel bizonyítása egyúttal ötletet ad a diagonalizálás megvalósításához is. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix egy λ sajátértékét, és állítsuk elő a

$$\begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}, \quad \text{és az} \quad \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}$$

mátrixokat. A következő lépésben ismételjük meg e lépést az $\mathbf{A}_1$ mátrixszal, de az ott előálló $(n-2) \times (n-2)$-es $\mathbf{Q}_2$ mátrixból az

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ 0 & 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix}$$

ortogonális mátrixot képezzük, stb. Végül az így kapott mátrixok szorzata lesz $\mathbf{Q}$, azaz

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ 0 & 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix} \cdots$$

9.4. PÉLDA. *Diagonalizáljuk az alábbi mátrixot ortogonálisan!*

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg az áttérés mátrixát a standardról arra a bázisra, melyben e mátrix diagonális alakot vesz fel!

Megoldás. A karakterisztikus polinom:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20,$$

melynek gyökei 2, 2 és 5. Tehát a diagonális alak $\operatorname{diag}(2,2,5)$. Az áttérés mátrixához szükségünk lesz a sajátvektorokra. $\lambda = 2$ esetén:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

az $x+y+z=0$ egyenletrendszer megoldása pedig $(x,y,z) = (-1,1,0)s + (-1,0,1)t$. Ennek az altérnek egy bázisa tehát a $(-1,1,0)$ és a $(-1,0,1)$ vektorokból áll. A $\lambda = 5$ esetén:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

amely egyenletrendszer megoldása $(x,y,z) = (1,1,1)t$. A két különböző sajátaltérből való vektorok merőlegesek egymásra, de a $\lambda = 2$-höz tartozó sajátaltér két sajátvektora nem alkot ortogonális rendszert, ezért az általuk kifeszített térben új bázist keresünk, egy ortonormáltat. Legyen az $\mathbf{a} = (-1,1,0)/\sqrt{2}$ vektor az egyik, ekkor

$$(-1,0,1) - \left((-1,0,1) \cdot \frac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}}\right) \frac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right).$$

Ezt normálva kapjuk a $\mathbf{b} = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$ vektort, végül a $\lambda = 5$-höz tartozó normált vektor $\mathbf{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. A standard bázisra való áttérés mátrixa tehát az $[\mathbf{a}|\mathbf{b}|\mathbf{c}]$ mátrix, azaz

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Ennek inverze lesz a standard bázisról való áttérés mátrixa, mely – ortogonális mátrixról lévén szó – a transzponáltja, azaz

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

□

*Schur-felbontás** Olyan ortonormált bázist találni, melyben egy mátrix egyszerűbb alakú, akkor is fontos, ha az az alak nem a diagonális. Ilyen például a felsőháromszög-mátrix-alak.

A valós spektráltétel bizonyításának csekély változtatása egy másik hasznos tételre vezet. Az ott konstruált $\mathbf{B}$ mátrixban ugyanis elimináltuk az $\mathbf{A}$ első oszlopának főátló alatti elemeit. Ezt a lépést ismételve elérhető, hogy a mátrixot felső háromszög-alakra hozzuk.

9.5. TÉTEL (SCHUR-FELBONTÁS).
a) Minden valós négyzetes $\mathbf{A}$ *mátrix, melynek összes sajátértéke valós, ortogonálisan hasonló egy* $\mathbf{T}$ *felső háromszögmátrixhoz, azaz van olyan* $\mathbf{Q}$ *ortogonális mátrix, hogy* $\mathbf{A} = \mathbf{QTQ}^\mathsf{T}$.
b) Minden komplex négyzetes $\mathbf{A}$ *mátrix unitéren hasonló egy* $\mathbf{T}$ *felső háromszögmátrixhoz, azaz van olyan* $\mathbf{U}$ *unitér mátrix, hogy* $\mathbf{A} = \mathbf{UTU}^\mathsf{H}$.

► Fontos megjegyezni, hogy a tétel valós és komplex mátrixokra vonatkozó része közt csak annyi a különbség, hogy valós mátrixoknál megköveteltük a sajátértékek valós voltát, míg komplexeknél nem tettünk semmi kikötést – sejthetően azért, mert komplex mátrix sajátértékei mindig komplexek.

BIZONYÍTÁS. A bizonyítást csak a valós esetre írjuk le, a komplex eset tárgyalása lényegében azonos.

Követve a 9.3. tételt, teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 1$ esetén az állítás nyilván igaz. A feltételek szerint $\mathbf{A}$ minden sajátértéke valós, legyen ezek egyike λ, a hozzá tartozó egységnyi sajátvektorok egyike $\mathbf{u}_1$. Innen a 9.3. tétel bizonyítását megismételjük egészen a (9.1) mátrix előállításáig, azaz kapjuk, hogy az $\mathbf{u}_1$ vektort kiegészítve a teljes tér egy $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ ONB-ává, az ortogonális $\mathbf{Q}_0 = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \dots\ \mathbf{u}_n]$ mátrixszal

$$\mathbf{Q}_0^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}.$$

Mivel $\mathbf{B}$ hasonló $\mathbf{A}$-hoz, ezért sajátértékeik megegyeznek, tehát $\mathbf{A}_1$ minden sajátértéke $\mathbf{A}$-nak is sajátértéke. A teljes indukció miatt viszont $\mathbf{A}_1$-hez létezik olyan $\mathbf{Q}_1$ ortogonális és $\mathbf{T}_1$ felső háromszög mátrix, hogy $\mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{T}_1\mathbf{Q}_1^\mathsf{T}$. Ekkor viszont a $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0\left[\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix ortogonális, hisz két ortogonális mátrix szorzata, és $\mathbf{A}$-t hasonlóvá teszi egy felsőháromszög-mátrixhoz:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} &= \left(\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}^\mathsf{T}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1\end{bmatrix}\right)^\mathsf{T}\mathbf{A}\left(\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}^\mathsf{T}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}^\mathsf{T}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1\end{bmatrix}^\mathsf{T}\mathbf{Q}_0^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}^\mathsf{T}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}^\mathsf{T}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1^\mathsf{T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda & \mathbf{v}^\mathsf{T}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}^\mathsf{T}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\lambda & \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{Q}_1\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1^\mathsf{T}\mathbf{A}_1\mathbf{Q}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda & \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{Q}_1\\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_1\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Ez utóbbi mátrix pedig felsőháromszög-mátrix. □

9.6. PÉLDA (SCHUR-FELBONTÁS). *Hozzuk ortogonális hasonlósági transzformációval felső háromszögalakra az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}7 & 6 & -3\\ 3 & 17 & -6\\ -12 & 14 & 4\end{bmatrix}$$

mátrixot!

MEGOLDÁS. A karakterisztikus polinom $-x^3 + 28x^2 - 245x + 686 = (7-x)^2(14-x)$. A 7 kétszeres sajátérték, a sajátaltér 1-dimenziós, sajátvektor $\mathbf{x}_1 = (2,3,6)$, a 14-hez tartozó sajátvektor $\mathbf{x}_2 = (9,17,13)$, diagonalizálni nem lehet, mivel a geometriai multiplicitások összege (2) kisebb az algebraiak összegénél (3).

Az első sajátvektorhoz választunk egy ortonormált bázist, abból képezzük a $\mathbf{Q}_0$ és a $\mathbf{Q}_0^T\mathbf{A}\mathbf{Q}_0$ mátrixot:

E példa mátrixához található racionális elemű ortogonális mátrix, mi a számítások könnyebb követhetősége érdekében ezt adtuk meg. Ilyen mátrix keresése nem része a példának, mivel a gyakorlatban nemigen találkozni ilyen speciális esettel.

$$\mathbf{Q}_0 = [\mathbf{x}_1|\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_3] = \frac{1}{7}\begin{bmatrix}2 & -6 & 3\\ 3 & -2 & -6\\ 6 & 3 & 2\end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_0^T\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 = \left[\begin{array}{c|cc}7 & 0 & -21\\ \hline 0 & 14 & 0\\ 0 & 7 & 7\end{array}\right]$$

tehát

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix}14 & 0\\ 7 & 7\end{bmatrix}.$$

A 7 sajátértékhez tartozó sajátvektor $(0,1)$, rá merőleges a $(1,0)$. Így

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \quad \left[\begin{array}{c|c}1 & 0\\ \hline 0 & \mathbf{Q}_1\end{array}\right] = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Innen

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathbf{Q}_1\end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix}2 & 3 & -6\\ 3 & -6 & -2\\ 6 & 2 & 3\end{bmatrix}, \text{ és ebből}$$

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}7 & -21 & 0\\ 0 & 7 & 7\\ 0 & 0 & 14\end{bmatrix}$$

□

*Mátrixok unitér diagonalizálása** A valós mátrixok ortogonális diagonalizálhatóságához hasonlóan a komplex mátrixok unitér diagonalizálhatósága is alapvető kérdés. Itt azonban a normális mátrixok játsszák a főszerepet.

9.7. DEFINÍCIÓ (UNITÉR DIAGONALIZÁLHATÓSÁG). *Az* $\mathbf{A}$ *mátrix* unitéren diagonalizálható, *ha találunk egy* $\mathbf{U}$ *unitér és egy* $\mathbf{\Lambda}$ *diagonális mátrixot, melyre* $\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{\Lambda}$ *(illetve* $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}$*).*

► A szimmetrikus és önadjungált mátrixok közti analógiai alapján azt várjuk, hogy az önadjungált mátrixok lesznek az unitéren diagonalizálhatók. (A valós spektráltétel bizonyításának első része, azaz a $\Rightarrow$ irány bizonyítása nem vihető át valós szimmetrikus mátrixokról komplex önadjungált mátrixokra, mivel $\mathbf{\Lambda}^{\mathsf{H}} = \mathbf{\Lambda}$ csak valós mátrixokra igaz.) A valóságban mátrixok egy jóval tágabb köre fog az unitéren diagonalizálhatók közé tartozni: ezek lesznek a normális mátrixok.

9.8. DEFINÍCIÓ (NORMÁLIS MÁTRIX). *Azt mondjuk, hogy az* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *mátrix* normális, *ha* $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}$, *azaz ha felcserélhető saját adjungáltjával.*

► Könnyen ellenőrizhető, hogy normális az összes komplex önadjungált, ferdén önadjungált és unitér, valamint az összes valós szimmetrikus, ferdén szimmetrikus és ortogonális mátrix.

► Vannak olyan normális mátrixok is, melyek nem tartoznak a fenti listában felsoroltak közé. Például az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix normális, mert

$$\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

► A normális mátrixok sok szép tulajdonsággal rendelkeznek, melyekre a továbbiakban visszatérünk, a legfontosabbat a következő tétel mondja ki.

9.9. TÉTEL (UNITÉR DIAGINALIZÁLHATÓSÁG). *Az* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *mátrix pontosan akkor unitéren diagonalizálható, ha normális.*

BIZONYÍTÁS. ($\Rightarrow$) Tegyük fel, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}$, azaz $\mathbf{A}$ unitéren diagonalizálható. Mivel bármely komplex z számra $\bar{z}z = z\bar{z}$, ezért minden komplex diagonális mátrix normális, így $\mathbf{\Lambda}^{\mathsf{H}}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^{\mathsf{H}}$. Eszerint

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A} &= (\mathbf{U\Lambda U}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}}(\mathbf{U\Lambda U}^{\mathsf{H}}) = \mathbf{U\Lambda}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{U\Lambda U}^{\mathsf{H}} = \mathbf{U\Lambda}^{\mathsf{H}}\mathbf{\Lambda U}^{\mathsf{H}}\\
&= \mathbf{U\Lambda\Lambda}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = \mathbf{U\Lambda U}^{\mathsf{H}}\mathbf{U\Lambda}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = (\mathbf{U\Lambda U}^{\mathsf{H}})(\mathbf{U\Lambda U}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}} = \mathbf{AA}^{\mathsf{H}}.
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) A Schur-felbontás szerint minden komplex négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix előáll

$$\mathbf{A} = \mathbf{UTU}^{\mathsf{H}}$$

alakban, ahol $\mathbf{U}$ unitér, $\mathbf{T}$ felsőháromszög-mátrix. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ normális. Ekkor $\mathbf{T}$ is normális, ugyanis a fenti levezetéshez hasonlóan

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}^{\mathsf{H}}\mathbf{T} &= (\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{AU})^{\mathsf{H}}(\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{AU}) = \mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{UU}^{\mathsf{H}}\mathbf{AU} = \mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{AU}\\
&= \mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{AA}^{\mathsf{H}}\mathbf{U} = \mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{AUU}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{U} = (\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{AU})(\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{AU})^{\mathsf{H}} = \mathbf{TT}^{\mathsf{H}}.
\end{aligned}$$

A $\mathbf{T}$ mátrix alakja

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n}\\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix},$$

ezért $[\mathbf{T}^{\mathsf{H}}\mathbf{T}]_{11} = |t_{11}|^2$, $[\mathbf{TT}^{\mathsf{H}}]_{11} = |t_{11}|^2 + |t_{12}|^2 + \dots + |t_{1n}|^2$, amiből $t_{12} = \dots = t_{1n} = 0$ adódik. Hasonlóan fölírva a $[\mathbf{T}^{\mathsf{H}}\mathbf{T}]_{22}$ és a $[\mathbf{TT}^{\mathsf{H}}]_{22}$ elemeket kapjuk, hogy $t_{23} = \dots = t_{2n} = 0$, stb. Tehát $\mathbf{T}$ diagonális. □

Feladatok

Kvadratikus formák

A csupa másodfokú tagot tartalmazó többváltozós polinomok mátrixok saját-értékeinek és sajátvektorainak ismeretében egyszerűbb alakra hozhatók, így könnyebben vizsgálhatók. E témának számtalan lineáris algebrán kívüli matematikai és matematikán kívüli alkalmazása is van.

Homogén másodfokú polinomok mátrixszorzatos alakja Egy polinom egy tagja *másodfokú*, ha abban az ismeretlenek fokszámainak összege 2. Például az x, y és z változókban másodfokú tagok az alábbiak: $3x^2$, axy, $2b^3xz$, $-\pi^2z^2$. Az olyan többváltozós polinomot, melyben csak másodfokú tagok vannak, többváltozós *homogén másodfokú polinomnak* nevezzük. Például $2x^2+4xy-y^2$ egy 2-változós homogén másodfokú polinom. A $4xy=2xy+2yx$ felbontással e polinom egy szimmetrikus mátrixszal való mátrixszorzatos alakba írható:

$$2x^2+2xy+2yx-y^2=\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Általában is igaz, hogy

$$ax^2+2bxy+cy^2=ax^2+bxy+byx+cy^2=\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Hasonlóképp a háromváltozós homogén másodfokú polinomok is mátrixszorzatos alakba írhatók egy szimmetrikus mátrixszal:

$$\begin{aligned} &ax^2+2bxy+2cxz+dy^2+2eyz+fz^2 \\ =\ &ax^2+bxy+cxz+byx+dy^2+eyz+czx+ezy+fz^2 \\ =\ &\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

9.10. PÉLDA (MÁSODFOKÚ POLINOM MÁTRIXSZORZATOS ALAKJA). *Írjuk fel az $x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-5x_1x_2-3x_2x_1+5x_1x_3-x_3x_1$ kifejezést mátrixszorzatos alakban!*

MEGOLDÁS. A vegyes tagokat először összevonva, majd két egyenlő együtthatójú részre bontva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3\\
&= x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_1 + 2x_1x_3 + 2x_3x_1\\
&= x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_1 + 2x_2^2 + 0x_2x_3 + 2x_3x_1 + 0x_3x_2 + 2x_3^2\\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$ □

A fentieket követve az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektor koordinátáitól függő homogén másodfokú polinomok mindegyike

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$$

alakra hozható, ahol $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrix.

9.11. DEFINÍCIÓ (KVADRATIKUS FORMA). *Valós* kvadratikus formának *nevezzük azt az*

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$$

függvényt, ahol $\mathbf{A}$ *szimmetrikus mátrix. Analóg módon komplex kvadratikus forma az a*

$$\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{x}$$

függvény, ahol $\mathbf{A}$ *önadjungált.*

E szakaszban a továbbiakban kvadratikus formán – ha mást nem mondunk – valós kvadratikus formát értünk.

Főtengelytétel Egy kvadratikus formához tartozó szimmetrikus mátrix diagonalizálásával a kvadratikus forma is egyszerű alakra hozható.

A spektráltétel szerint minden valós szimmetrikus mátrix ortogonálisan diagonalizálható, azaz létezik egy olyan ortogonális $\mathbf{Q}$ mátrix, és egy diagonális $\mathbf{\Lambda}$ mátrix, melyre $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$. Tudjuk, hogy az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ mátrixleképezés mátrixa a $\mathbf{Q}$ oszlopvektorai által alkotott $\mathcal{Q}$ ortonormált bázisban $\mathbf{\Lambda}$. Ha egy tetszőleges $\mathbf{x}$ vektor alakja e bázisban $\mathbf{y}$, akkor $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$. E helyettesítést elvégezve ugyanennek a függvénynek a $\mathcal{Q}$ bázisban fölírt alakját kapjuk:

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{Q}\mathbf{y})^\mathsf{T}\mathbf{A}(\mathbf{Q}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{y} = \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{y}.$$

Eszerint a kvadratikus forma e bázisban nagyon egyszerűvé válik, csak négyzetes tagokat tartalmaz: $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$, ahol $\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Ezzel bizonyítottuk az alábbi tételt:

9.12. TÉTEL (FŐTENGELYTÉTEL). *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy* n*-edrendű valós szimmetrikus mátrix, melyet a* $\mathbf{Q}$ *mátrix ortogonálisan diagonalizál, azaz* $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$ *diagonális. Ekkor az* $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ *helyettesítés az* $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ *kvadratikus formát* *az* $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{y}$ *kvadratikus formába transzformálja, mely kifejtve csak négyzetes tagokat tartalmaz, azaz*

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2, \tag{9.2}$$

ahol λ_1, λ_2,..., λ_n *az* $\mathbf{A}$ *mátrix sajátértékei.*

► A tétel nevét később fogjuk részletesen megmagyarázni, most csak annyit, hogy az $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = c$ egyenletű felületnek a $\mathcal{Q}$ bázis vektorai mind szimmetriatengelyei, melyeket főtengelyeknek is nevezünk.
► Mivel $\mathbf{Q}$ ortogonális mátrix, ezért $\det\mathbf{Q} = 1$ vagy $\det\mathbf{Q} = -1$. Gyakorlati (például bizonyos 3-dimenziós) alkalmazásokban fontos lehet, hogy a $\mathcal{Q}$ bázis is jobbsodrású legyen, azaz hogy $\det\mathbf{Q} = 1$ legyen. Így a standard bázis beleforgatható az új bázisba. Ez elérhető, ha $\det\mathbf{Q} = -1$ esetén $\mathbf{Q}$ bármelyik oszlopát -1-szeresére változtatjuk. Ez a kvadratikus formát nem befolyásolja, hisz abban csak a sajátértékek szerepelnek.
► A főtengelytétel alkalmazását egy kvadratikus formán *főtengely-transzformációnak* nevezzük.

9.13. PÉLDA (FŐTENGELY-TRANSZFORMÁCIÓ). *Végezzük el a főtengely-transzformációt az*

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8xy + 4xz$$

kvadratikus formán. Keressünk olyan jobbsodrású ortonormált bázist, melyben épp ez a kvadratikus forma alakja. Mi az áttérés mátrixa?

MEGOLDÁS. A kvadratikus forma mátrixszorzat-alakja

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Mátrixának karakterisztikus polinomja $-\lambda^3 + 5\lambda^2 + 12\lambda - 36$, ennek gyökei, azaz a sajátértékek 6, -3, 2, a hozzájuk tartozó sajátvektorok rendre $(2,-2,1)$, $(-5,-4,2)$, $(0,1,2)$. Így a keresett kvadratikus forma

$$\begin{bmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = 6\xi^2 - 3\eta^2 + 2\zeta^2.$$

A sajátvektorokat normálva megkapjuk az ortonormált bázist, melynek vektoraiból képzett determináns

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{5}{3\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = -1,$$

tehát egy megfelelő ortonormált bázis: $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, $(\frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}})$, $(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$. □

Kvadratikus formák és mátrixok definitsége A főtengelytétel könnyen áttekinthetővé teszi a kvadratikus forma által fölvett értékek lehetséges előjelét. Ez lehetővé teszi a kvadratikus formák egy fontos osztályozását.

9.14. DEFINÍCIÓ (KVADRATIKUS FORMÁK ÉS MÁTRIXOK DEFINITSÉGE). *Azt mondjuk, hogy az* $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ *kvadratikus forma*

a) pozitív definit, *ha* $f(\mathbf{x}) > 0$,

b) pozitív szemidefinit, *ha* $f(\mathbf{x}) \geq 0$,

c) negatív definit, *ha* $f(\mathbf{x}) < 0$,

d) negatív szemidefinit, *ha* $f(\mathbf{x}) \leq 0$

bármely $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *vektor esetén, és azt mondjuk, hogy* f

e) indefinit, *ha pozitív és negatív értékeket is fölvesz.*

A szimmetrikus $\mathbf{A}$ *mátrixot pozitív/negatív definitnek/szemidefinitnek, illetve indefinitnek nevezzük, ha a hozzá tartozó kvadratikus forma az.*

► Ha $\mathbf{A}$ negatív definit, akkor $-\mathbf{A}$ pozitív definit. Hasonló állítás igaz a szemidefiniségre is.

► Ha $\mathbf{A} = [a]$, azaz $\mathbf{A}$ 1×1-es, akkor $\mathbf{A}$ pontosan akkor pozitív definit, ha $a > 0$.

► Az identikus mátrix pozitív definit, ugyanis $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2$, ami pozitív, ha $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

► Tetszőleges $\mathbf{A}$ valós mátrix esetén $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit, ugyanis $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = |\mathbf{A}\mathbf{x}|^2 \geqslant 0$.

► Világos, hogy ha egy kvadratikus formában csak négyzetes tagok szerepelnek, akkor azonnal leolvasható definitségének típusa. Például az $f(x,y) = x^2 + 2y^2$, $g(x,y) = x^2 - 2y^2$, $h(x,y) = -x^2 - 2y^2$, $k(x,y,z) = x^2 + 2y^2$ formákról látható, hogy f pozitív definit, hisz az $(x,y) \neq (0,0)$ esetén értéke mindig pozitív, g indefinit, h negatív definit, és k pozitív szemidefinit, hisz értéke $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ esetén is lehet 0 (ha $x = y = 0$, de $z \neq 0$). Miután a főtengelytétel szerint minden kvadratikus forma egyenlő a változók négyzeteinek a sajátértékekkel vett lineáris kombinációjával, ezért a definitség típusa pusztán csak a sajátértékek előjeleinek ismeretében eldönthető.

9.15. PÉLDA (DEFINITSÉG MEGHATÁROZÁSA A SAJÁTÉRTÉKEKBŐL). *Határozzuk meg az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

mátrixok definitségének típusát!

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei 1, 1 és 4. Így a főtengely-transzformáció után kapott

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \xi^2 + \eta^2 + 4\zeta^2$$

alakból látható, hogy e kvadratikus forma minden értéke pozitív, ha a változók nem mindegyike 0. Tehát e kvadratikus forma pozitív definit. Hasonlóképp a $\mathbf{B}$ sajátértékei -1, -1 és 2, a főtengely-transzformáció után kapott alak $-\xi^2 - \eta^2 + 2\zeta^2$. E forma negatív értéket vesz fel például az $(1, 0, 0)$ helyen, és pozitívat a $(0, 0, 1)$ helyen, tehát indefinit. Végül $\mathbf{C}$ sajátértékei -3, -3 és 0, így a főtengely-transzformáció után kapott alak $-3\xi^2 - 3\eta^2 + 0\zeta^2 = -3\xi^2 - 3\eta^2$. Ennek értéke a $(0, 0, 1)$ helyen 0, és pozitív értéket nem vesz fel, tehát negatív szemidefinit. □

9.16. TÉTEL (DEFINITSÉG MEGHATÁROZÁSA A SAJÁTÉRTÉKEKBŐL). *A valós szimmetrikus* $\mathbf{A}$ *mátrix, illetve az* $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ *kvadratikus forma pontosan akkor*

a) *pozitív definit, ha* $\mathbf{A}$ *minden sajátértéke pozitív;*
b) *pozitív szemidefinit, ha* $\mathbf{A}$ *minden sajátértéke nemnegatív;*
c) *negatív definit, ha* $\mathbf{A}$ *minden sajátértéke negatív;*
d) *negatív szemidefinit, ha* $\mathbf{A}$ *minden sajátértéke nempozitív;*
e) *indefinit, ha* $\mathbf{A}$*-nak van pozitív és negatív sajátértéke is.*

Definitség és főminorok Mátrix definitsége gyakran könnyen eldönthető főminorainak vagy vezető főminorainak értékéből.

Válasszuk ki egy négyzetes mátrix néhány sorát, és ugyanannyiadik sorszámú oszlopát, a többi sort és oszlopot hagyjuk el. Az így kapott négyzetes részmátrix determinánsát a mátrix *főminorának* nevezzük. Ha az első k sort és az első k oszlopot választjuk ki, *vezető főminorról* beszélünk, pontosabban a k-adrendű vagy k-adik vezető főminorról.

Ha egy mátrix diagonális alakú és pozitív definit, azaz minden sajátértéke pozitív, akkor minden főminora is pozitív, ha pozitív szemidefinit, akkor minden főminora nemnegatív. Ha e diagonális mátrix minden sajátértéke negatív, akkor vezető főminorai felváltva $- + - + - + \dots$ előjelűek. E megfigyelések átvihetők nem diagonális alakú mátrixokra is.

9.17. TÉTEL (DEFINIT MÁTRIXOK FŐMINORAI ÉS VEZETŐ FŐMINORAI). *A valós szimmetrikus* $\mathbf{A}$ *mátrix, illetve az* $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ *kvadratikus forma pontosan akkor*

a) *pozitív definit, ha* $\mathbf{A}$ *minden főminora pozitív;*
b) *pozitív szemidefinit, ha* $\mathbf{A}$ *minden főminora nemnegatív;*
c) *pozitív definit, ha* $\mathbf{A}$ *minden vezető főminora pozitív;*

d) negatív definit, ha **A** *minden páratlan rendű vezető főminora negatív, páros rendű vezető főminora pozitív.*

BIZONYÍTÁS. ... □

► Az állítás vezető főminorokra vonatkozó pontjai nem vihetők át minden további feltétel nélkül szemidefinit mátrixokra. Az ugyan igaz, hogy ha egy mátrix pozitív szemidefinit, akkor vezető főminorainak sorozata egy darabig pozitív, majd onnan 0. Ennek megfordítása viszont már nem igaz.

Szélsőérték A többváltozós függvények szélsőértékének első és második parciális deriváltjaira vonatkozó feltételei azonnal érthetővé válnak a definitség fogalmának segítségével.

A függvényanalízisből ismert Taylor tételének többváltozós alakja szerint egy legalább kétszer differenciálható $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény a következő alakban írható fel:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})(x_i - a_i) + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j) + \sum_{i,j} \varepsilon_{ij}(\mathbf{x})(x_i - a_i)(x_j - a_j),$$

ahol $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ az f értelemzési tartományának egy belső pontja.

Megoldások

10

Szinguláris érték

A szimmetrikus mátrix ortogonális diagonalizálását fogjuk általánosítani tetszőleges mátrixra, egy helyett két ortonormált bázis megkeresésével. Az egyik bázis a mátrixleképezés értemezési tartományának, a másik az értékkészletének lesz bázisa. Ebben az általánosításban a sajátértékek szerepét a szinguláris értékek veszik át, a spektrálfelbontását a szinguláris érték szerinti felbontás (SVD). Az alkalmazások közül kiemelkednek az információtömörítéssel kapcsolatosak, de az egyenletrendszerek megoldásához használt leghatékonyabbak közé tartozó algoritmusok is ide sorolhatók.

Szinguláris érték, szinguláris vektor, SVD

Azt tudjuk, hogy egy mátrixleképezés kölcsönösen egyértelmű a sortér és az oszloptér között. Olyan ortonormált bázisát keressük a sortérnek és az oszloptérnek, melyek közt a mátrixleképezés természetes kapcsolatot létesít.

Szinguláris érték és szinguláris vektorok Az, hogy az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix ortogonálisan diagonalizálható, azt jelenti, hogy létezik egy olyan $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \dots, \mathbf{v}_n\}$ ortonormált bázis, és léteznek olyan λ_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ számok, hogy $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ minden i indexre. Ha a mátrix téglalapalakú, például $m \times n$-es, azaz az értelmezési tartomány és az értékkészlet különböző tér is lehet, akkor mindkettőben választanunk kell egy bázist. Legyen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \dots, \mathbf{v}_n\}$ az értelmezési tartomány ONB-a, az értékkészleté pedig $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\}$. Az analógia $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$ alakú feltételek kikötését kívánja. Az $m > n$ és $m < n$ esetek nehézségeit leküzdendő szorítkozzunk a sortérre, azt ugyanis tudjuk, hogy az $A\colon \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ leképezés kölcsönösen egyértelmű a sortér és az oszloptér között. Így először csak e két altérben keressünk megfelelő bázist. Közös dimenziójuk a ranggal egyenlő, jelölje ezt r.

10.1. definíció (Szinguláris érték). *Azt mondjuk, hogy a pozitív $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ számok az r-rangú valós $\mathbf{A}$ mátrix* szinguláris értékei, *ha van olyan $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ ortonormált bázisa a sortérnek és $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ ortonormált bázisa az oszloptérnek, hogy*

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i, \quad i = 1, \ldots, r.$$

A $\mathbf{v}_i$ vektorokat jobb, *az $\mathbf{u}_i$ vektorokat* bal szinguláris vektoroknak *nevezzük.*

A *szinguláris érték* fogalmát 1907-ben Erhard Schmidt vezette be, de ő még *sajátértéknek* nevezte. Mai nevét 1937-ben kapta, mert különösen akkor tűnt hasznos eszköznek – például az egyenletrendszerek megoldásában –, amikor az együtthatómátrix szinguláris.

► E definíció fontos következménye, hogy mivel $|\mathbf{u}_i| = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, ezért $|\mathbf{A}\mathbf{v}_i| = \sigma_i$.

► A szinguláris értékekre adható olyan definíció is, melyben a két bázis létezése nem szerepel, csak az $\mathbf{A}$ mátrix – ezt később megemlítjük –, de didaktikai okból nem ezt használjuk.

► A szinguláris értékeket úgy is definiálhatjuk, hogy ha $k = \min(m, n)$, akkor a szinguláris értékek száma k, és csak annyit kötünk ki róluk, hogy nemnegatívak. Látni fogjuk, hogy ha $k > r$, akkor e definíció mellett $\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \cdots = \sigma_k = 0$.

► Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, akkor a 7.91. tételben a komplex terek alapvető altereiről mondottakat követve nem a sortérnek, hanem a sortér konjugáltjának valamint az oszloptérnek egy-egy ortonormált bázisát keressük.

► Például az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4/13 & 6 \\ 111/13 & -4 \end{bmatrix}$$

mátrix szinguláris értékei $\sigma_1 = 10$ és $\sigma_2 = 5$, jobb, illetve bal szinguláris vektorai

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{(4/5, -3/5), (3/5, 4/5)\}, \text{ illetve}$$
$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \{(-5/13, 12/13), (12/13, 5/13)\},$$

ugyanis

$$\begin{bmatrix} -4/13 & 6 \\ 111/13 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} -5/13 \\ 12/13 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -4/13 & 6 \\ 111/13 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 12/13 \\ 5/13 \end{bmatrix},$$

azaz fennállnak az $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \sigma_1 \mathbf{u}_1$ és az $\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \sigma_2 \mathbf{u}_2$ összefüggések. Végül könnyen elenőrizhető, hogy $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ és $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ egyarán ortonormált bázisai a sor-, illetve oszloptérnek, hisz e terek megegyeznek $\mathbb{R}^2$-tel.

Szinguláris felbontás Egy mátrix szinguláris értékei és vektorai egy mátrixfelbontást adnak, ezt fogjuk szinguláris érték szerinti felbontásnak nevezni.

Képezzük a szinguláris értékekből a diagonális

$$\mathbf{\Sigma}_1 = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r \end{bmatrix}$$

mátrixot, valamint a szinguláris vektorokból az $\mathbf{U}_1 = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ és a $\mathbf{V}_1 = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ mátrixokat. Ekkor az $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma\mathbf{u}_i$ egyenlőségek az

$$\mathbf{A}\mathbf{V}_1 = \mathbf{U}_1\mathbf{\Sigma}_1, \tag{10.1}$$

azaz az

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r \end{bmatrix} \tag{10.2}$$

alakot öltik. Egészítsük ki a $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ vektorrendszert a teljes n-dimenziós tér ONB-ává. Jelöljük a belőlük képzett $n \times n$-es ortogonális (unitér) mátrixot $\mathbf{V}$-vel, $n > r$ esetén az új vektorokból képzett mátrixot $\mathbf{V}_2$-vel, azaz $\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{r+1} & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$. Mivel $\mathbf{V}_2$ oszlopvektorai merőlegesek a sortérre (komplex esetben $\bar{\mathcal{S}}$-re), ezért a nulltérben vannak, tehát $r < i \leq n$ esetén $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$.

Hasonlóképp az előzőkhöz, egészítsük ki az $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ vektorrendszert a teljes m-dimenziós tér ONB-ává, és jelöljük e vektorokból képzett $m \times m$-es mátrixot $\mathbf{U}$-val. $m > r$ esetén legyen $\mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{r+1} & \dots & \mathbf{u}_m \end{bmatrix}$. Végül a $\mathbf{\Sigma}_1 = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ mátrixot egészítsük ki egy $m \times n$-es mátrixszá nullblokkok hozzávételével, jelölje e mátrixot $\mathbf{\Sigma}$, tehát $\mathbf{\Sigma} = \left[\begin{smallmatrix} \mathbf{\Sigma}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{smallmatrix}\right]$. Ekkor a (10.2) egyenlőség a következőképp módosítható:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{V} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{A}\mathbf{v}_r & | & \mathbf{A}\mathbf{v}_{r+1} & \dots & \mathbf{A}\mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sigma_1\mathbf{u}_1 & \dots & \sigma_r\mathbf{u}_r & | & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_r & | & \mathbf{u}_{r+1} & \dots & \mathbf{u}_m \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|ccc} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right] \\
&= \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}.
\end{aligned}$$

A mátrixok méreteit is kiírva $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{V}_{n\times n} = \mathbf{U}_{m\times m}\mathbf{\Sigma}_{m\times n}$, blokkmátrix alakba átírva

$$\mathbf{A}\left[\mathbf{V}_1 \mid \mathbf{V}_2\right] = \left[\mathbf{U}_1 \mid \mathbf{U}_2\right]\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{\Sigma}_1 & \mathbf{O}\\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{array}\right].$$

Ha $r = n$, illetve $r = m$, akkor $\mathbf{V}_2$, illetve $\mathbf{U}_2$ üresek, azaz 0 számú oszlopból állnak, ami értelemszerűen változtat e képleten. Mivel a négyzetes $\mathbf{V}$ mátrix oszlopvektorai ONB-t alkotnak, ezért valós esetben $\mathbf{V}$ ortogonális, így $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^{\mathsf{T}}$ (komplex esetben unitér, és $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^{\mathsf{H}}$). Ezt fölhasználva, az $\mathbf{AV} = \mathbf{U\Sigma}$ egyenlőségből kapjuk, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^{\mathsf{T}}$ ($\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^{\mathsf{H}}$).

Tekintsük e felbontás blokkmátrixalakját. A műveleteket blokkonként elvégezve, a $\mathbf{\Sigma}$-ban lévő nullmátrixok miatt a következőt kapjuk:

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{U}_1 \mid \mathbf{U}_2\right]\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{\Sigma}_1 & \mathbf{O}\\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\mathbf{V}_1^{\mathsf{T}}\\ \hline \mathbf{V}_2^{\mathsf{T}}\end{array}\right] = \mathbf{U}_1\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^{\mathsf{T}}.$$

Ez a következő definíciókhoz vezet:

10.2. DEFINÍCIÓ (SZINGULÁRIS FELBONTÁS). *A valós (komplex)* $\mathbf{A}$ *mátrix*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^{\mathsf{T}} \quad (\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^{\mathsf{H}})$$

alakú felbontását $\mathbf{A}$ szinguláris érték szerinti felbontásának*, vagy röviden* szinguláris felbontásának *nevezzük, ha* $\mathbf{U}$ *és* $\mathbf{V}$ *ortogonális (unitér) és* $\mathbf{\Sigma}$ *diagonális, főátlójában monoton csökkenően rendezett nem negatív valós számokkal. Az*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_1\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^{\mathsf{T}} \quad (\mathbf{A} = \mathbf{U}_1\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^{\mathsf{H}})$$

felbontást redukált szinguláris felbontásnak *nevezzük. Ha ezt a szorzatot az* $\mathbf{U}_1\mathbf{\Sigma}_1$ *oszlopvektorokra és a* $\mathbf{V}_1^{\mathsf{T}}$ *sorvektorokra blokkosított alakjára írjuk fel, akkor az* $\mathbf{A}$ *mátrix egy diadikus felbontását kapjuk, melyet* szinguláris érték szerinti diadikus felbontásnak *vagy a* szinguláris felbontás diadikus alakjának *nevezünk:*

$$\mathbf{A} = \sigma_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^{\mathsf{T}} + \sigma_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^{\mathsf{T}} + \cdots + \sigma_r\mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^{\mathsf{T}}.$$

(komplex esetben transzponált helyett adjungálttal).

► A mátrixszorzások elvégzésével és a megfelelő mátrixok ortogonalitásának ellenőrzésével igazolható, hogy az alábbi felbontás $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^{\mathsf{T}}$ alakú, tehát az

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2\\ -2 & 3 & -2\\ 4 & -2 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3\\ -2/3 & 1/3 & 2/3\\ 2/3 & 2/3 & 1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3\\ 2/3 & 1/3 & -2/3\\ 1/3 & 2/3 & 2/3\end{bmatrix}$$

egyenlőség jobb oldalán a bal oldalon lévő mátrix szinguláris felbontása áll.

► A $\mathbf{\Sigma}$ mátrixból leolvasható, hogy a felbontott mátrix rangja kettő, így a redukált szinguláris felbontás az $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ első két oszlopát (így $\mathbf{V}^\mathsf{T}$ első két sorát) és $\mathbf{\Sigma}$ bal felső 2×2-es blokkját tartalmazza:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

► Ennek alapján a szinguláris érték szerinti diadikus felbontás:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} &= 6 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4/3 & -4/3 & 2/3 \\ -8/3 & 8/3 & -4/3 \\ 8/3 & -8/3 & 4/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4/3 & -2/3 & 4/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 4/3 & 2/3 & -4/3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A szinguláris felbontás meghatározása A szinguláris értékek és a szinguláris érték szerinti felbontás egy egyszerű ötlettel visszavezethető egy sajátértékszámítási feladatra.

Tekintsük az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ (komplex esetben az $\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A}$) mátrixot! Mivel $\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{U} = \mathbf{I}$, ezért

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = (\mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T})^\mathsf{T}\mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T} = \mathbf{V\Sigma}^\mathsf{T}\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T} = \mathbf{V}(\mathbf{\Sigma}^\mathsf{T}\mathbf{\Sigma})\mathbf{V}^\mathsf{T}.$$

Ez épp $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ spektrálfelbontása, hisz $\mathbf{V}$ ortogonális (komplex esetben unitér), és $\mathbf{\Sigma}^\mathsf{T}\mathbf{\Sigma}$ diagonális ($\mathbf{\Sigma}^\mathsf{H}\mathbf{\Sigma}$ is). $\mathbf{\Sigma}^\mathsf{T}\mathbf{\Sigma} = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2, 0, \dots, 0)$, ezért $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ sajátértékei épp a szinguláris értékek négyzetei.

10.3. példa (Szinguláris értékek meghatározása). *Számítsuk ki az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix szinguláris értékeit, és írjuk fel szinguláris felbontását!

Megoldás. A szinguláris értékek megegyeznek $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ nemnulla sajátértékeinek gyökeivel.

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 20 & -14 & 4 \\ -14 & 17 & -10 \\ 4 & -10 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ennek karakterisztikus polinomja $x^3 - 45x^2 + 324x$, melynek gyökei 36, 9 és 0. Tehát a szinguláris értékek 6 és 3. Az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ mátrix egységnyi sajátvektorai:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 36 & \mathbf{v}_1 &= (2/3, -2/3, 1/3)\\
\lambda_2 &= \ \ 9 & \mathbf{v}_2 &= (2/3, 1/3, -2/3)\\
\lambda_3 &= \ \ 0 & \mathbf{v}_3 &= (1/3, 2/3, 2/3).
\end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{Av}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$, ezért $\mathbf{u}_i = \mathbf{Av}_i/\sigma_i$. Így kiszámolható $\mathbf{u}_1$ és $\mathbf{u}_2$ is:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{Av}_1}{\sigma_1} = \frac{(2,-4,4)}{6} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\\
\mathbf{u}_2 &= \frac{\mathbf{Av}_2}{\sigma_2} = \frac{(-2,1,2)}{3} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

A harmadik vektor ilyen módon nem számolható ki, mivel $\mathbf{Av}_3 = \mathbf{0}$, így az $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ rendszert nekünk kell kiegészítenünk $\mathbb{R}^3$ bázisává. Ezt több módon is megtehetjük. Mivel $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ az oszloptér bázisa, ezért a merőleges kiegészítő altérnek – vagyis $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ nullterének – bázisát keressük. E példában legegyszerűbb megoldás vektori szorzással számolni: $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = (-2/3, -2/3, -1/3)$. A szinguláris és a redukált szinguláris felbontás tehát:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2\\ -2 & 1 & -2\\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},\\
\mathbf{A} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2\\ -2 & 1\\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0\\ 0 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

A felírásban az $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ mátrixból is kiemeltünk $\frac{1}{3}$-ot, de ez is a mátrixhoz tartozik – egyébként nem lenne ortogonális. □

Az $\mathbf{U}$ mátrix meghatározására egy további módszer is adódik. Az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ helyett vizsgáljuk meg az $\mathbf{AA}^\mathsf{T}$ mátrixot.

$$\mathbf{AA}^\mathsf{T} = \mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T}(\mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = \mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T}\mathbf{V\Sigma}^\mathsf{T}\mathbf{U}^\mathsf{T} = \mathbf{U\Sigma}^2\mathbf{U}^\mathsf{T}.$$

Eszerint a szinguláris értékek az $\mathbf{AA}^\mathsf{T}$ mátrixból is meghatározhatók. Ennek pozitív sajátértékekhez tartozó sajátvektorai az $\mathbf{U}$ mátrix első r oszlopát adják.

Mivel $\mathbf{v}_i$ az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ mátrix σ_i^2 értékhez tartozó sajátvektora, ezért $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Av}_i = \sigma_i^2\mathbf{v}_i$, másrészt $\mathbf{Av}_i = \sigma_i\mathbf{u}_i$, így e két összefüggést összevetve kapjuk, hogy $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Av}_i = \mathbf{A}^\mathsf{T}(\sigma_i\mathbf{u}_i) = \sigma_i^2\mathbf{v}_i$, azaz

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u}_i = \sigma_i\mathbf{v}_i, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u}_i}{\sigma_i}.$$

Érdemes lehet az $\mathbf{AA}^\mathsf{T}$ pozitív sajátértékekhez tartozó sajátvektorait keresni, ha $m < n$, mert ekkor csak m-dimenziós vektorokkal kell számolni (ld. a 10.2. feladatot).

10.4. példa (Szinguláris felbontás). *Számítsuk ki az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix szinguláris érték szerinti felbontását!

Megoldás. $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$, melynek karakterisztikus polinomja $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$. Az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ sajátértékei 3 és 1, tehát $\mathbf{A}$ szinguláris értékei $\sqrt{3}$ és 1. A hozzájuk tartozó egységnyi hosszú sajátvektorok $\mathbf{v}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $\mathbf{v}_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Így

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{u}_i = \mathbf{A}\mathbf{v}_i/\sigma_i$ összefüggés alapján $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)$, $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$. Az előző példához hasonlóan $\mathbf{u}_3$ kiszámítható az $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ képlettel is, de most inkább számoljunk úgy, hogy keressük $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ nullterének bázisát. A nulltér meghatározásához meg kell oldani a $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszert. Innen is az adódik, hogy $\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$. (Itt választhatnánk e vektor ellentettjét is, mert $\mathbf{A}\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$, vagyis az előjelnek nincs szerepe.)

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Tehát a szinguláris felbontás

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

□

Szinguláris érték szerinti felbontás létezése Kérdés még, hogy bármely valós vagy komplex mátrixnak léteznek-e szinguláris értékei, azok egyértelműek-e, és ha igen, a szinguláris felbontás egyértelmű-e.

10.5. tétel (Az SVD létezése és $\boldsymbol{\Sigma}$ egyértelműsége). *Minden valós vagy komplex mátrixnak létezik szinguláris érték szerinti felbontása. A szinguláris értékek monoton csökkenő sorozata egyértelmű.*

Bizonyítás. A bizonyítást valós esetre írjuk le, komplexre lényegében azonos. Az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus ($\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A}$ önadjungált), mert $(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^\mathsf{T} = \mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{A}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$. Ennek következtében minden sajátértéke valós, így e mátrix ortogonálisan diagonalizálható. Másrészt minden sajátértéke nemnegatív, másként fogalmazva $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit, ugyanis tetszőleges $\mathbf{x}$ vektorra $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = |\mathbf{A}\mathbf{x}|^2 \geqslant 0$. A 0-tól különböző sajátértékek száma megegyezik $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ rangjával, hisz az megegyezik diagonális alakja nemnulla elemeinek számával. Másrészt ???? szerint $r = \mathrm{r}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A})$. Tehát, ha nagyság szerinti sorba rendezzük a sajátértékeket ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$), akkor $\lambda_i > 0$, ha $1 \leq i \leq r$, és $\lambda_i = 0$, ha $r < i \leq n$. Eszerint $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} > 0$, ha $1 \leq i \leq r$. Mivel $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ sajátértékei egyértelműek, ezért $\mathbf{A}$ szinguláris értékei is azok.

$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ ortogonálisan diagonalizálható: legyen $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ egy ortonormált bázisa. Mivel $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$, ha $i \neq j$, ezért

$$(\mathbf{A}\mathbf{v}_i) \cdot (\mathbf{A}\mathbf{v}_j) = \mathbf{v}_i^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_i(\lambda_j \mathbf{v}_j) = 0.$$

Eszerint $\{\mathbf{A}\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{A}\mathbf{v}_n\}$ ortogonális vektorrendszer, de vektorai közt lehetnek zérusvektorok. $|\mathbf{A}\mathbf{v}_i| = \sigma_i > 0$, ha $i \leqslant r$, ezért ekkor $\mathbf{A}\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$. Az

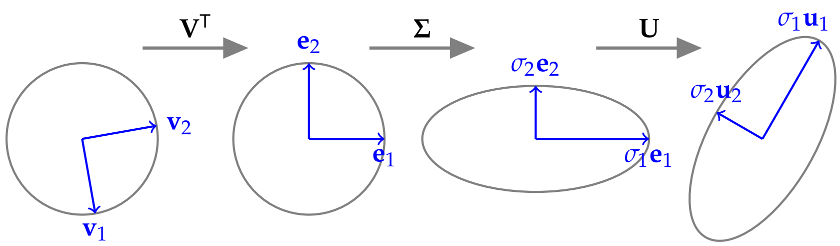
$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i}\mathbf{A}\mathbf{v}_i$$

vektorokból képzett r elemű $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ vektorrendszer ortonormált, az oszloptér vektoraiból áll, és mivel az oszloptér r-dimenziós, ezért annak egy bázisát adja. Így a $\mathbf{V}_1 = [\mathbf{v}_1|\dots|\mathbf{v}_r]$, $\mathbf{U}_1 = [\mathbf{u}_1|\dots|\mathbf{u}_r]$, $\mathbf{\Sigma} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ választással $\mathbf{A}$ egy redukált szinguláris felbontásához jutunk. A teljes szinguláris felbontást megkapjuk, az $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ vektorrendszernek az m-dimenziós tér ortonormált bázisává való kiegészítésével a fent részletezett módon. □

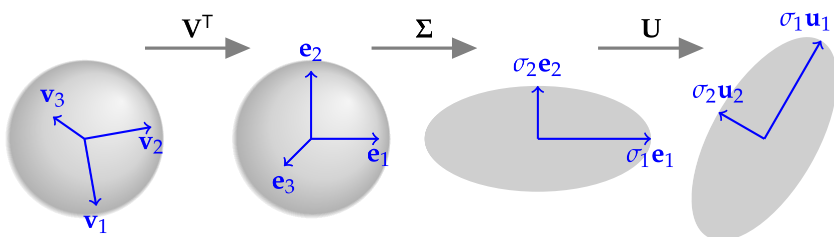
Szinguláris felbontás geometriai interpretációja A szinguláris felbontás segítségével jól szemléltethető, hogy egy lineáris leképezés hatására mi a képe egy egységgömbnek.

Először szemléltessük egy 2×2-es, valós, 2-rangú mátrix szinguláris felbontását, tényezőinek hatását ábrázolva. Mivel a felbontás $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\mathsf{T}$, először $\mathbf{V}^\mathsf{T}$ hat a sík vektoraira. $\mathbf{V}^\mathsf{T}$ ortogonális, tehát vagy egy forgatás, vagy egy tükrözés. Mivel $\mathbf{V}$ oszlopai épp a $\mathbf{v}_i$ vektorok, ezért $\mathbf{V}^\mathsf{T}\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i$. Ezután a $\mathbf{\Sigma}$ a két tengely irányában nyújt/összenyom: $\mathbf{\Sigma}\mathbf{e}_i = \sigma_i\mathbf{e}_i$. Végül $\mathbf{U}$ ismét egy forgatás vagy tükrözés: $\mathbf{U}\sigma\mathbf{e}_i = \sigma\mathbf{U}\mathbf{e}_i = \sigma\mathbf{u}_i$.

Ezután szemléltessük egy 2×3-as, valós, 2-rangú mátrix szinguláris felbontását. Először $\mathbf{V}^\mathsf{T}$ hat a tér vektoraira. $\mathbf{V}^\mathsf{T}$ ortogonális, és a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ortonormált bázist a standard bázisba viszi: $\mathbf{V}^\mathsf{T}\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$). Ezután a $\mathbf{\Sigma}$ a két első tengely irányában nyújt/összenyom: $\mathbf{\Sigma}\mathbf{e}_i = \sigma_i\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2$), azonban a harmadik tengely irányával párhuzamosan vetít: $\mathbf{\Sigma}\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$. A kép itt nem egy ellipszisvonal, hanem a teljes általa határolt tartomány. Végül az ortogonális $\mathbf{U}$ ezt elforgatja vagy tükrözi egy egyenesre.



10.1. ábra: Az egységkör képe. Legyen $\mathbf{A}$ egy 2×2-es, valós, 2-rangú mátrix. A $\mathbf{v}_i \mapsto \mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$ leképezés hatása az egységkörön lépésenként jól szemléltethető: $\mathbf{V}^\mathsf{T}\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{\Sigma}\mathbf{e}_i = \sigma_i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{U}\sigma\mathbf{e}_i = \sigma\mathbf{U}\mathbf{e}_i = \sigma\mathbf{u}_i$, azaz $\mathbf{V}^\mathsf{T}$ a $\{\mathbf{v}_i\}$ bázist a standardba viszi ortogonális leképezéssel, ott $\mathbf{\Sigma}$ tengelyirányban nyújtja/összenyomja, végül az ortogonális $\mathbf{U}$ hat rá.



10.2. ábra: Az egységgömb képe. Legyen $\mathbf{A}$ egy 2×3-as, valós, 2-rangú mátrix. A $\mathbf{v}_i \mapsto \mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i\mathbf{u}_i$ leképezés hatása az egységgömb felületén: $\mathbf{V}^\mathsf{T}\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i$ $(i = 1,2,3)$, $\mathbf{\Sigma}\mathbf{e}_i = \sigma_i\mathbf{e}_i$ $(i = 1,2)$, $\mathbf{U}\sigma\mathbf{e}_i = \sigma\mathbf{U}\mathbf{e}_i = \sigma\mathbf{u}_i$, azaz $\mathbf{V}^\mathsf{T}$ a $\{\mathbf{v}_i\}$ bázist a standardba viszi, ott $\mathbf{\Sigma}$ az első két tengelyirányban nyújtja/összenyomja, de a harmadik tengelyirányban vetít, így a gömbfelület képe egy ellipszistartomány, amire végül $\mathbf{U}$ hat.

10.6. TÉTEL (EGYSÉGGÖMB KÉPE). *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy* r*-rangú,* $m \times n$*-es valós mátrix. Az* $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ *leképezés* $\mathbb{R}^n$ *egységgömbjének felületét, azaz az* $\mathbf{e}^\mathsf{T}\mathbf{e} = 1$ *egyenletet kielégítő pontokat az* $\mathbb{R}^m$ *egy* r*-dimenziós altere*

a) egy ellipszoidjának felületére képzi, ha $r = n$*, és*

b) egy ellipszoidja által határolt tartományára képzi, ha $r < n$*.*

BIZONYÍTÁS. Tekintsük $\mathbf{A}$ szinguláris felbontásának diadikus alakját:

$$\mathbf{A} = \sigma_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^\mathsf{T} + \sigma_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^\mathsf{T} + \cdots + \sigma_r\mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^\mathsf{T}.$$

Ha $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ egy egységvektor, akkor $\mathbf{V}^\mathsf{T}\mathbf{e}$ is egységvektor, azaz $(\mathbf{v}_1^\mathsf{T}\mathbf{e})^2 + (\mathbf{v}_2^\mathsf{T}\mathbf{e})^2 + \cdots + (\mathbf{v}_n^\mathsf{T}\mathbf{e})^2 = 1$, hisz $\mathbf{V}$ ortogonális mátrix. Így a fenti diadikus alakot használva

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{e} &= \sigma_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^\mathsf{T}\mathbf{e} + \sigma_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^\mathsf{T}\mathbf{e} + \cdots + \sigma_r\mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^\mathsf{T}\mathbf{e} \\
&= (\sigma_1\mathbf{v}_1^\mathsf{T}\mathbf{e})\mathbf{u}_1 + (\sigma_2\mathbf{v}_2^\mathsf{T}\mathbf{e})\mathbf{u}_2 + \cdots + (\sigma_r\mathbf{v}_r^\mathsf{T}\mathbf{e})\mathbf{u}_r \\
&= x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \cdots + x_r\mathbf{u}_r,
\end{aligned}$$

ahol $x_i = \sigma_i\mathbf{v}_i^\mathsf{T}\mathbf{e}$ $(i = 1,2,\ldots,r)$. Legyen $x_i = 0$, ha $i = r+1,\ldots,m$ és $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ értékadással kapjuk, hogy $\mathbf{A}\mathbf{e} = \mathbf{U}\mathbf{x}$. Így $\mathbf{U}$ ortogonalitása miatt $|\mathbf{A}\mathbf{e}| = |\mathbf{U}\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$. Ennek alapján fölírható az az egyenlet, melyet $\mathbf{A}\mathbf{e}$ pontjai kielégítenek, mivel

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sigma_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_r}{\sigma_r}\right)^2 &= (\mathbf{v}_1^\mathsf{T}\mathbf{e})^2 + (\mathbf{v}_2^\mathsf{T}\mathbf{e})^2 + \cdots + (\mathbf{v}_r^\mathsf{T}\mathbf{e})^2 \\
&\le (\mathbf{v}_1^\mathsf{T}\mathbf{e})^2 + (\mathbf{v}_2^\mathsf{T}\mathbf{e})^2 + \cdots + (\mathbf{v}_n^\mathsf{T}\mathbf{e})^2 = 1.
\end{aligned}$$

Eszerint az egyenlet

$$\left(\frac{x_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sigma_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_r}{\sigma_r}\right)^2 = 1, \quad \text{ha } r = n,$$
$$\left(\frac{x_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sigma_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_r}{\sigma_r}\right)^2 \le 1, \quad \text{ha } r < n. \qquad \square$$

Polárfelbontás A komplex számok exponenciális alakja – azaz az $re^{i\varphi}$ alak – egy nemnegatív nyújtási tényező (r) és egy egységnyi abszolút értékű komplex szám ($e^{i\varphi}$, ami a komplex síkon φ-vel való forgatás) szorzata. A komplex síkon e szám polárkoordinátás alakja (r, φ). Az analóg mátrixfelbontás több mérnöki alkalmazásban, pl. az anyagtranszformációk leírásánál használható.

Polárfelbontáson egy négyzetes mátrixnak egy pozitív szemidefinit és egy ortogonális mátrix szorzatára való felbontását értjük.

10.7. TÉTEL (POLÁRFELBONTÁS). *Bármely komplex (valós) négyzetes* $\mathbf{A}$ *mátrix előáll*

$$\mathbf{A} = \mathbf{PQ}$$

alakban, ahol $\mathbf{P}$ *pozitív szemidefinit önadjungált (szimmetrikus) mátrix,* $\mathbf{Q}$ *pedig unitér (ortogonális). Ha* $\mathbf{A}$ *invertálható, akkor* $\mathbf{P}$ *pozitív definit, és a felbontás egyértelmű.*

BIZONYÍTÁS. A felbontás az $\mathbf{A}$ szinguláris felbontásából megkapható:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^{\mathsf{H}} = \mathbf{U\Sigma U}^{\mathsf{H}}\mathbf{UV}^{\mathsf{H}} = (\mathbf{U\Sigma U}^{\mathsf{H}})(\mathbf{UV}^{\mathsf{H}}),$$

ahonnan $\mathbf{P} = \mathbf{U\Sigma U}^{\mathsf{H}}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{UV}^{\mathsf{H}}$. $\mathbf{P}$ önadjungált, hisz $(\mathbf{U\Sigma U}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}} = \mathbf{U\Sigma}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = \mathbf{U\Sigma U}^{\mathsf{H}}$. A $\mathbf{P}$ pozitív szemidefinit, hisz hasonló a pozitív szemidefinit $\mathbf{\Sigma}$ mátrixhoz. Amennyiben $\mathbf{A}$ invertálható, akkor $\mathbf{\Sigma}$ pozitív definit.

$\mathbf{Q}$ unitér (ortogonális), hisz két unitér (ortogonális) mátrix szorzata. A $\mathbf{P}$ egyértelmű (nem csak akkor, ha pozitív definit), ugyanis

$$\mathbf{AA}^{\mathsf{H}} = \mathbf{PQQ}^{\mathsf{H}}\mathbf{P}^{\mathsf{H}} = \mathbf{PP}^{\mathsf{H}} = \mathbf{P}^2,$$

azaz $\mathbf{P} = \sqrt{\mathbf{AA}^{\mathsf{H}}}$, és pozitív szemidefinit önadjungált mátrix négyzetgyöke egyértelmű az önadjungált pozitív szemidefinit mátrixok körében (ld. 10.3. feladat). Ha $\mathbf{P}$ pozitív definit, akkor invertálható, így $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}$ is egyértelmű. $\square$

► A polárfelbontás nem csak analóg a komplex számok exponenciális alakjával, de még determinánsa is épp ezt az alakot adja: ha $\det \mathbf{P} = r$, $\det \mathbf{Q} = e^{i\varphi}$ (hisz $\mathbf{Q}$ unitér, így determinánsának abszolút értéke 1), akkor $\det \mathbf{A} = re^{i\varphi}$.

► Hasonló állítás mondható fordított sorrenddel is, ráadásul azonos unitér (ortogonális) mátrixszal, azaz létezik olyan pozitív szemidefinit önadjungált $\hat{\mathbf{P}}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{P}}$.
► Valós térben a polárfelbontás geometriai jelentése az, hogy minden mátrixleképezés két olyan leképezés kompozíciójaként áll elő, amelyekből az egyik forgatja vagy forgatva tükrözi a teret ($\mathbf{Q}$), a másik pedig egy ortonormált bázis tengelyei mentén nyújtja/összenyomja a teret minden tengelyirányban egy-egy nemnegatív tényező szerint.

10.8. példa (Polárfelbontás kiszámítása). *Számítsuk ki a 10.3. példában is szereplő*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix polárfelbontását!

Megoldás. A 10.3. példában megadtuk a valós $\mathbf{A}$ mátrix szinguláris felbontását. Így a $\mathbf{P} = \mathbf{U\Sigma U}^\mathsf{T}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{UV}^\mathsf{T}$ képletekbe való helyettesítés megadja a választ:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4/9 & -8/9 & 1/9 \\ -4/9 & 1/9 & -8/9 \\ 7/9 & -4/9 & -4/9 \end{bmatrix}.$$

□

Pszeudoinverz A szinguláris felbontás egy új lehetőséget ad a pszeudoinverz kiszámítására, sőt akár a komplexek fölött való definiálására is.

A 7.56. *e)* pontjának azonnali következménye, hogy ha $\mathbf{\Sigma}$ az $\mathbf{A}$ mátrix diagonális alakja a szinguláris felbontásában, akkor $\mathbf{\Sigma}^+$ főátlójának i-edik eleme $1/\sigma_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$), minden más elem 0.

10.9. tétel (A pszeudoinverz kiszámítása). *Legyen $\mathbf{A}$ egy valós mátrix és legyen a redukált szinguláris felbontása $\mathbf{A} = \mathbf{U}_1\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^\mathsf{T}$, a szinguláris felbontása $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T}$. Ekkor*

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}_1\mathbf{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{U}_1^\mathsf{T} = \mathbf{V\Sigma}^+\mathbf{U}^\mathsf{T}.$$

Bizonyítás. Az $\mathbf{A} = \mathbf{U}_1(\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^\mathsf{T})$ felbontásban $\mathbf{U}_1$ teljes oszloprangú, $\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^\mathsf{T}$ teljes sorrangú, így alkalmazható $\mathbf{A}$-ra a (7.12) képlet. Eszerint

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^+ &= (\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^\mathsf{T})^\mathsf{T}\left(\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^\mathsf{T}(\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^\mathsf{T})^\mathsf{T}\right)^{-1}\left(\mathbf{U}_1^\mathsf{T}\mathbf{U}_1\right)^{-1}\mathbf{U}_1^\mathsf{T} = \mathbf{V}_1\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{\Sigma}_1^{-2}\mathbf{U}_1^\mathsf{T} \\ &= \mathbf{V}_1\mathbf{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{U}_1^\mathsf{T}.\end{aligned}$$

Ebből következik a másik egyenlőség is, mivel

$$\mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^{+}\mathbf{U}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix}\mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{U}_1^{\mathsf{T}}\\ \mathbf{U}_2^{\mathsf{T}}\end{bmatrix} = \mathbf{V}_1\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{U}_1^{\mathsf{T}}. \qquad \square$$

► A pszeudoinverzet valós mátrixokra definiáltuk, e tétel képleteivel komplexekre is természetes módon kiterjeszthető. Ha $\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathsf{H}} = \mathbf{U}_1\boldsymbol{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^{\mathsf{H}}$ az $\mathbf{A}$ szinguláris és redukált szinguláris felbontása, akkor legyen $\mathbf{A}^{+} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^{+}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = \mathbf{V}_1\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{U}_1^{\mathsf{H}}$.

10.10. PÉLDA (A PSZEUDOINVERZ KISZÁMÍTÁSA SVD-BŐL). *Számítsuk ki a 10.4. példában is szereplő*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

mátrix pszeudoinverzét!

MEGOLDÁS. Ha ismerjük egy mátrix szinguláris felbontását, akkor annak felhasználásával csak képletbehelyettesítés dolga a pszeudoinverz kiszámítása. Persze, akkor már a redukált alakot is ismerjük, így felesleges a teljes szinguláris alakot használni, a redukált alak használatának kevesebb a számításigénye. A 10.4. példában meghatároztuk az $\mathbf{A}$ mátrix szinguláris alakját. Abból a redukált alak

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2}\\ 2/\sqrt{6} & 0\\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix},$$

amiből a pszeudoinverz

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{+} &= \begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{3} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}-1/3 & 1/3 & 2/3\\ 2/3 & 1/3 & -1/3\end{bmatrix} \qquad \square\end{aligned}$$

10.11. TÉTEL (KIS RANGÚ APPROXIMÁCIÓ TÉTELE – ECKART–YOUNG-TÉTEL).*Legyen* $\mathbf{A}$ *egy tetszőleges* r*-rangú mátrix. Jelölje a* k*-adik szinguláris értékét* σ_k*, a hozzá tartozó jobb és bal szinguláris vektort* $\mathbf{v}_k$*, illetve* $\mathbf{u}_k$*. Legyen*

$$\mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^{k}\sigma_i\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i^{\mathsf{T}}.$$

Ekkor $\mathbf{A}_k$ *az* $\mathbf{A}$ *mátrix legjobb legföljebb k-rangú közelítése, azaz*

$$\min_{\mathrm{r}(\mathbf{B})\leqslant k} \|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|_F = \|\mathbf{A}-\mathbf{A}_k\|_F = \sqrt{\sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i^2},$$

$$\min_{\mathrm{r}(\mathbf{B})\leqslant k} \|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|_2 = \|\mathbf{A}-\mathbf{A}_k\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

Információtömörítés

Feladatok

10.1. Szinguláris felbontások Az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ mátrixnak egyetlen szinguláris értéke van, $\sigma_1 = 2$. Igazoljuk, hogy az

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ \hline -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} [2] \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

felbontások az $\mathbf{A}$ mátrix szinguláris és redukált szinguláris felbontásai. (Segítségül a szinguláris felbontásban a blokkstruktúrát is jelöltük.)

10.2. Számítsuk ki a

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix szinguláris érték szerinti felbontását!

10.3. Mutassuk meg, hogy minden önadjungált pozitív szemidefinit mátrixnak van önadjungált pozitív szemidefinit négyzetgyöke, és az egyértelmű!

Vektor- és mátrixnorma

A vektorokhoz hasonlóan a mátrixok bizonyos tulajdonságainak – például sorozataik konvergenciájának – vizsgálatában is hasznosak az olyan mennyiségek, melyek a köztük lévő különbségeket a távolságra emlékeztető módon mérik. Ehhez az abszolút érték fogalmának általánosításán keresztül vezet út. A mátrixnormák intim kapcsolatban vannak a szinguláris értékekkel.

Vektornorma

Vektor abszolút értéke – az euklideszi norma A 2- és 3-dimenziós vektorok abszolút értékéről a vektor megadásáról szóló paragrafusban beszéltünk először, majd az n-dimenziós terekre is kiterjesztettük e fogalmat. Ennek segítségével két vektor távolságát is definiálni tudtuk. A következőkben olyan – az alkalmazásokban is fontos – függvényeket definiálunk, amelyek az abszolút érték „origótól való távolság” tulajdonságát általánosítják. E függvényeket *normának* nevezzük. Mindenekelőtt ilyen nevet adunk a vektor abszolút értékének is, és egyúttal valós vektorokról komplexekre is kiterjesztjük a definíciót.

10.12. definíció (Euklideszi norma). *Az* $\mathbf{x}$ *vektor* euklideszi normája *vagy más néven abszolút értéke*

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x}}, \qquad \text{ha } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{10.3}$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{\mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{x}}, \qquad \text{ha } \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n. \tag{10.4}$$

Például az $\mathbf{x} = (1+\mathrm{i}, 1-2\mathrm{i}, 3)$ vektor euklideszi normája

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) + (1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i}) + 3^2} = \sqrt{2+5+9} = 4.$$

► Vektor euklideszi normájára az $|.|$, $\|.\|$ és a $\|.\|_2$ jelölések egyaránt használatosak.

► A komplex vektorokra adott definíciónak a valós speciális esete, így akár ez az egy is megfelelne.

► Ha $\mathbf{x}$ egy tetszőleges nemzérus vektor, akkor $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|_2$ egységvektor. Egy vektorból az azonos irányú egységvektor ilyen módon való képzését *normálásnak* nevezzük, és azt mondjuk, hogy az $\mathbf{x}$ vektort *normáljuk*.

A p-norma Két pont közti távolság mérésére néha egészen szokatlan mértéket kell használnunk. Ha egy négyzethálós utcaszerkezetű város egy kereszteződésében állunk, akkor egy x háznyival keletre és y

háznyival északra fekvő ponthoz vezető legrövidebb út hossza gyalog vagy taxival $x+y$ háznyi. E „mérték” szerint az origóból az (x, y) koordinátájú kereszteződéshez vezető legrövidebb út hossza $|x|+|y|$. Mivel itt csak a koordinátarendszer rácsvonalain haladhatunk, szokás e normát *rácsnormának* nevezni (angolszász tankönyvekben *Manhattan norm* vagy *taxicab norm*).

Egy másik normához jutunk a következő számítógépes képméretező feladattal. Ki van jelölve egy kép közepe. Egy (x, y) képpont tőle való távolsága legyen az a legkisebb c szám, hogy e pont a $(-c,-c)$ és (c, c) pontok által meghatározott négyzetbe még épp beleférjen. Világos, hogy $c=\max\{|x|,|y|\}$. E normát *maximum normának* is nevezik.

Az euklideszi norma, a rácsnorma és a maximum norma is származtatható a következő általánosabb normából:

10.13. DEFINÍCIÓ (p-NORMA). *A $p \geq 1$ valósra az $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vektor p-normája $\|\mathbf{x}\|_p=\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$, míg ennek határértéke a ∞-norma, azaz $\|\mathbf{x}\|_\infty=\lim_{p \rightarrow \infty}\|\mathbf{x}\|_p$.*

Például $\|(3,4,5)\|_3=\sqrt[3]{27+64+125}=6$, $\|(1+\mathrm{i}, \mathrm{i}, 0)\|_1=1+\sqrt{2}$.

► Világos, hogy a 2-norma megegyezik az euklideszi-normával, az 1-norma a rácsnormával.

► A maximum norma megegyezik a ∞-normával, azaz

$$\|\mathbf{x}\|_\infty=\lim_{p \rightarrow \infty}\|\mathbf{x}\|_p=\lim_{p \rightarrow \infty}\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}=\max_i |x_i| .$$

Ennek bizonyításához jelöljük a legnagyobb abszolút értékű koordinátát $x_{\max}$-szal. Ekkor minden x_i koordinátára $|x_i| /|x_{\max}| \leq 1$, és így

$$1 \leq \sum_{i=1}^n |x_i / x_{\max}|^p \leq n .$$

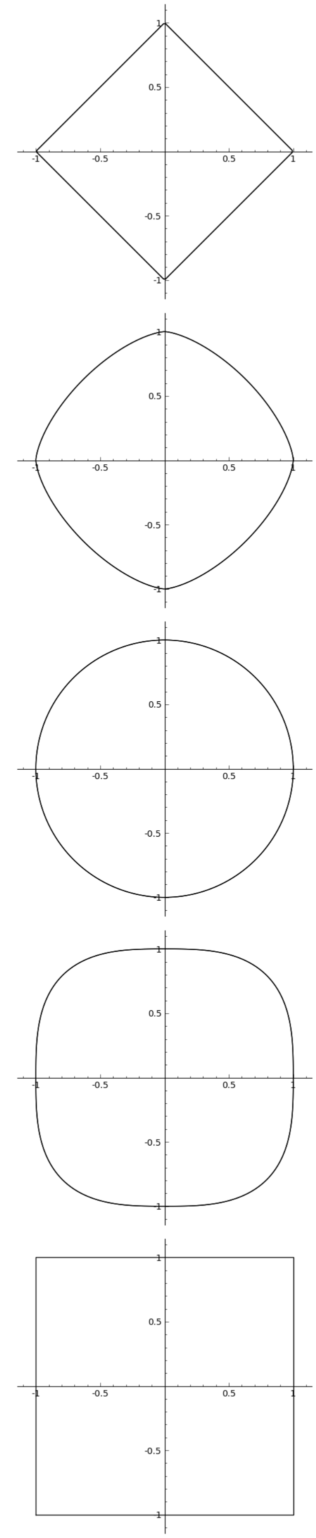
Mindegyik kifejezést $1/p$-edik hatványra emelve, majd $|x_{\max}|$-szal beszorozva kapjuk, hogy

$$|x_{\max}| \leq |x_{\max}|\left(\sum_{i=1}^n \left|\frac{x_i}{x_{\max}}\right|^p\right)^{1/p} \leq |x_{\max}| n^{1/p},$$

és $n^{1/p} \rightarrow 1$, ha $p \rightarrow \infty$, ami bizonyítja az állítást.

► Érdekes megtekinteni az origótól valamely normában egységnyi távolságra lévő pontok halmazát, vagyis az egységgömböt. A 10.3 ábra az 1-, $\frac{3}{2}$-, 2-, 3- és ∞-normához tartozó egységköröket (2-dimenziós egységgömböket) mutatja.

A norma általános fogalma Az előzőekben az abszolút értékhez – vagyis az origótól való távolsághoz – kerestünk hasonló függvényt. Kérdés



$p=1$

$p=\frac{3}{2}$

$p=2$

$p=3$

$p=\infty$

10.3. ábra: Az 1-normájú pontok mértani helye, azaz az egységkörök $p=1$, $p=3/2$, $p=2$, $p=3$ és $p=\infty$ esetén.

azonban, hogy milyen tulajdonságok fontosak a számunkra, melyeket akarunk megőrizni. Az abszolút értékkel definiált távolság használatakor a következő tulajdonságok tűnnek lényegesnek:

(a) $|\mathbf{x}| \geq 0$, azaz vektor abszolút értéke *nem negatív*.

(b) $|\mathbf{x}| = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ennek fontos tartalma, hogy a $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ képlettel definiált távolságfüggvény *szeparálja a pontokat*, azaz két különböző pont távolsága sosem 0.

(c) $|c\mathbf{x}| = |c||\mathbf{x}|$, ami a lineáris leképezéseknél megismert homogenitásra emlékeztető tulajdonság: szokás *pozitív homogenitásnak* nevezni.

(d) $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$, amit *háromszögegyenlőtlenség* néven ismerünk.

E tulajdonságok a következő definícióhoz vezetnek:

10.14. DEFINÍCIÓ (NORMA). *Egy $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, vagy $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ függvényt* normának *nevezünk, ha fennállnak a következők:*
1. *$f(\mathbf{x}) \geq 0$ minden $\mathbf{x}$ vektorra, és $f(\mathbf{x}) = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,*
2. *$f(c\mathbf{x}) = |c| f(\mathbf{x})$ minden $\mathbf{x}$ vektorra,*
3. *$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$.*

Az $f(\mathbf{x})$ értéket $\mathbf{x}$ normájának nevezzük.

► A normát általában az abszolút értékre emlékeztető $\|\ \|$ zárójellel jelöljük, azaz $\mathbf{x}$ normáját $\|\mathbf{x}\|$ jelöli. E jelöléssel tehát a norma egy $\|.\|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, vagy $\|.\|\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ függvény.

► $\|\mathbf{x}\| = \|-\mathbf{x}\|$ bármely $\|.\|$ normára igaz, hisz $\|-\mathbf{x}\| = |-1|\,\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$.

► Hasznos a háromszögegyenlőtlenség különbségre fölírt következő alakja:

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| \geq \Big|\, \|\mathbf{z}\| - \|\mathbf{x}\| \,\Big| \tag{10.5}$$

Ez a következőképp igazolható: legyen $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, ekkor a háromszögegyenlőtlenségből kapjuk, hogy $\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| \geq \|\mathbf{z}\| - \|\mathbf{x}\|$, de $\mathbf{x}$ és $\mathbf{z}$ szerepét fölcserélve $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| \geq \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{z}\|$ is igaz, így $\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|$ igazolja az egyenlőtlenséget.

► Axiomatikus felépítésben kevesebb is megkövetelhető a norma definíciójában, nevezetesen az első pont egyszerűbbre cserélhető:

1′ ha $f(\mathbf{x}) = 0$, akkor $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,

2′ $f(c\mathbf{x}) = |c| f(\mathbf{x})$ minden $\mathbf{x}$ vektorra,

3′ $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$.

A definíció utolsó két tulajdonságából adódik, hogy bármely $\mathbf{x}$ vektorra $f(\mathbf{x}) \geq 0$, és $f(\mathbf{0}) = 0$, így 1.–3. ekvivalens 1′–3′-vel (ld. a 10.5. feladat).

► A p-norma minden $1 \leq p \leq \infty$ esetben norma. Ennek bizonyítása meglehetősen technikai jellegű, ezért csak a feladatok közt közöljük (ld. 10.14.). A bizonyítás két nevezetes egyenlőtlenségre – a Hölder-

$p = 1$

$p = 2$

$p = \infty$

10.4. ábra: Az 1-normájú pontok mértani helye a térben, azaz az egységgömbök $p = 1$, $p = 2$ és $p = \infty$ esetén.

és a Minkowski-egyenlőtlenségre – épül, melyeket ugyancsak feladatként tűzünk ki (ld. 10.12., 10.13.). Valójában a *Minkowski-egyenlőtlenség* maga a háromszögegyenlőtlenség:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p\,. \tag{10.6}$$

A *Hölder-egyenlőtlenség* a CBS-egyenlőtlenség általánosítása:

$$|\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|_p \, \|\mathbf{y}\|_q\,, \text{ ahol } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{10.7}$$

▶ A legfontosabb esetekben, vagyis a $p=1$, $p=2$ és $p=\infty$ esetben annak bizonyítása, hogy a p-norma norma, eddigi ismereteinket felhasználva egyszerű, ezért annak meggondolását minden olvasónak ajánljuk (ld. 10.6., 10.7. feladatok).

▶ Normából további normák származtathatóak. Ha $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$ egy norma, és A egy egy-egy értelmű lineáris leképezés, akkor az $\mathbf{x} \mapsto \|A\mathbf{x}\|$ leképezés is norma (10.10. feladat), továbbá norma az

$$\mathbf{x} \mapsto \sup_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}$$

függvény is (ld. 10.11.).

▶ Azonnal látszik, hogy

$$\max_i\{|x_i|\} \leq \sqrt{|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2} \leq |x_1|+\cdots+|x_n|$$

azaz

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1\,. \tag{10.8}$$

Másrészt az is könnyen igazolható (ld. 10.8., hogy

$$\|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_2\,,\ \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_\infty \ \text{ és } \ \|\mathbf{x}\|_1 \leq n\,\|\mathbf{x}\|_\infty\,. \tag{10.9}$$

Ezek az egyenlőtlenségek vezetnek a normák ekvivalenciájának fogalmához, ami a következő paragrafus témája.

▶ Minden norma folytonos függvény. Ez például a a (10.5) egyenlőtlenségnek és a (10.9) első becslésének következménye (ld. 10.9. feladat).

Vektornormák ekvivalenciája A (10.8) és a (10.9) egyenlőtlenségek szerint

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1 \ \text{ és } \ \|\mathbf{x}\|_1 \leq n\,\|\mathbf{x}\|_\infty\,,$$

vagyis mindkét normának felső korlátját adja a másik egy megfelelő konstansszorosa. Ez azt jelenti, hogy például a konvergenciakérdések eldöntésében e két norma egyformán viselkedik, vagyis egy vektorsorozat pontosan akkor konvergens az egyik szerint, ha a másik szerint is.

10.15. definíció (Normák ekvivalenciája). *Azt mondjuk, hogy az $\|.\|_a$ és $\|.\|_b$ normák ekvivalensek, ha van olyan c és d pozitív valós szám, hogy $\|.\|_a \le c\,\|.\|_b$ és $\|.\|_b \le d\,\|.\|_a$.*

► Könnyen látható, hogy a normák ekvivalenciája valóban ekvivalencia reláció.

► A (10.8) és a (10.9) egyenlőtlenségek azt mutatják, hogy az 1-, 2- és ∞-normák mind ekvivalensek.

10.16. tétel (Minden vektornorma ekvivalens). *Legyen $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ vagy $\mathbb{R}$. A $\mathbb{K}^n$ téren értelmezett bármely két norma ekvivalens.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $\mathbb{K}^n$-en értelmezett $\|.\|$ norma ekvivalens az 1-normával. Ebből azonnal következik, hogy bármely két norma ekvivalens egymással.

A háromszögegyenlőtlenséget alkalmazva az $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$ felbontásra kapjuk, hogy

$$\|\mathbf{x}\| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,\|\mathbf{e}_i\| \le c\sum_{i=1}^{n} |x_i| = c\,\|\mathbf{x}\|_1\,,$$

ahol $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ a standrad bázis, és $c = \max_i \|\mathbf{e}_i\|$. Ezzel bizonyítottuk, hogy $\|\mathbf{x}\| \le c\,\|\mathbf{x}\|_1$.

Az $\|\mathbf{x}\|_1 \le d\,\|\mathbf{x}\|$ egyenlőtlenség bizonyításához meg kell mutatnunk, hogy $\|\mathbf{x}\|_1 / \|\mathbf{x}\|$ felülről korlátos a nemnulla vektorok halmazán. Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy van olyan $\{\mathbf{x}_k\}$ sorozat, hogy $\|\mathbf{x}_k\|_1 / \|\mathbf{x}_k\| \to \infty$, ha $k \to \infty$. Ekkor $\|\mathbf{x}_k\| / \|\mathbf{x}_k\|_1 \to 0$, azaz az $\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k / \|\mathbf{x}_k\|_1$ olyan sorozat, hogy $\|\mathbf{y}_k\| \to 0$, és $\|\mathbf{y}_k\|_1 = 1$. Mivel az 1-normájú egységgömb korlátos, ezért feltételezhető, hogy az $\mathbf{y}_k$ sorozat konvergens (egyébként vegyük egy konvergens részsorozatát), melynek $\mathbf{y}$-nal jelölt határértéke is az egységgömbön van, azaz $\|\mathbf{y}\|_1 = 1$, így $\mathbf{y} \ne \mathbf{0}$. Másrészt $\|.\|$ folytonos, így $\|\mathbf{y}_k\| \to \|\mathbf{y}\|$, tehát $\|\mathbf{y}\| = 0$, ami ellentmondás. □

► Fölvetődik a kérdés, hogy ha az összes norma ekvivalens, akkor mi értelme bevezetni normák ekvivalenciájának fogalmát. A válasz az, hogy az ekvivalenciát csak véges dimenziós terekre bizonyítottuk, és valóban, végtelen dimenziós terekben nem teljesül. Az viszont fontos következmény, hogy véges dimenziós terekben vektorok konvergenciakérdéseinek eldöntéséhez mindig olyan normát választhatunk, ami a legkényelmesebben használható, hisz az eredmény a normaválasztástól független.

Mátrixnorma

Vektornormák mátrixokon Egy $m \times n$-es mátrix tekinthető egy mn-dimenziós vektornak is, így a vektorokra definiált normák mátrixokra is alkalmazhatók. Ezek között legfontosabb a 2-norma mátrixokra való kiterjesztése, mely több ekvivalens alakban is felírható.

10.17. DEFINÍCIÓ (FROBENIUS-NORMA). *Az* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *mátrix* Frobenius-normája

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\|\mathbf{A}_{i*}\|_2^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\|\mathbf{A}_{*j}\|_2^2}.$$

Itt azért nem a 2-norma elnevezést használjuk, mert azt más normára tartogatjuk. A Frobenius-norma további módokon is számolható:

10.18. TÉTEL (FROBENIUS-NORMA EKVIVALENS ALAKJAI).

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\operatorname{trace}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i^2}. \tag{10.10}$$

BIZONYÍTÁS. Az első alak azonnal következik a nyom definíciójából, hisz $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$ átlójának j-edik eleme éppen $\|\mathbf{A}_{*j}\|_2^2$-tel egyezik meg. Egy mátrix nyoma megegyezik sajátértékeinek összegével, az $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$ sajátértékei pedig megegyeznek az $\mathbf{A}$ szinguláris értékeinek négyzeteivel, ami bizonyítja az állítás második egyenlőségét. □

Egy vektornorma akkor nyújthat igazán hasznos információt a mátrixokról is, ha valamilyen módon kapcsolatban van a mátrix olyan sajátosságaival, ami mn-dimenziós vektorként nehezen leírható. A mátrixszal való szorzás például ilyen. A vektorok 2-normája és a mátrixok Frobenius-normája közt például a következő összefüggés áll fenn:

10.19. ÁLLÍTÁS. *Bármely* $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ *vektorra és* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *mátrixra*

$$\|\mathbf{Ax}\|_2 \le \|\mathbf{A}\|_F \,\|\mathbf{x}\|_2\,. \tag{10.11}$$

BIZONYÍTÁS. Igazolására a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenséget alkalmazzuk:

$$\|\mathbf{Ax}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}|\mathbf{A}_{i*}\mathbf{x}|^2 \le \sum_{i=1}^{n}\|\mathbf{A}_{i*}\|_2^2\,\|\mathbf{x}\|_2^2 = \|\mathbf{A}\|_F^2\,\|\mathbf{x}\|_2^2\,.$$

□

► E tulajdonság általában nem igaz minden mátrixokra alkalmazott vektornormára. Tekintsük a maximum normát, melyet a következőképp vihetünk át mátrixokra:

$$\|\mathbf{A}\|_{\max} = \max_{i,j}\{|a_{ij}|\}.$$

Az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix maximum normája 2. E mátrix különböző vektorokkal vett szorzatának normája és a normák szorzata közt mindhárom reláció fennállhat. Például az

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

szorzatokban a normákra a $2 \cdot 1 > 1$, $2 \cdot 1 = 2$, $2 \cdot 1 < 3$ relációk teljesülnek.

► A (10.11) tulajdonság azonnali következménye, hogy

$$\|\mathbf{AB}\|_F \leq \|\mathbf{A}\|_F \|\mathbf{B}\|_F$$

igaz bármely $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ és $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times k}$ mátrixokra. E tulajdonság meg fog jelenni a mátrixnorma általános definíciójában.

A mátrixnorma általános fogalma A vektornormák alkalmazhatók mátrixokra is. Sok könyv azonban – és így teszünk mi is – egy normát csak akkor tekint mátrixnormának, ha a vektornorma axiómái mellett egy mátrixszorzásra vonatkozónak is eleget tesz.

10.20. definíció (Mátrixnorma). *Legyen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$. Egy $\mathbb{K}$ fölötti mátrixokon értelmezett valós értékű $\|.\|$ függvény* mátrixnorma, *ha tetszőleges azonos méretű $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixra és összeszorozható $\mathbf{A}$ és $\mathbf{C}$ mátrixra*

1. $\|\mathbf{A}\| \geq 0$, *és* $\|\mathbf{A}\| = 0$ *pontosan akkor áll fenn, ha* $\mathbf{A} = \mathbf{O}$,
2. $\|c\mathbf{A}\| = |c|\,\|\mathbf{A}\|$,
3. $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$,
4. $\|\mathbf{AC}\| \leq \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{C}\|$.

A korábbiak szerint tehát a Frobenius-norma mátrixnorma, míg a maximum normát nem tekintjük mátrixnormának.

10.21. definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\|.\|_M$ mátrixnorma valamint a $\|.\|_a$ vektornorma* illeszkedik *vagy* konzisztensek, *ha tetszőleges $\mathbf{A}$ mátrixra és megfelelő dimenziójú $\mathbf{x}$ vektorra*

$$\|\mathbf{Ax}\|_a \leq \|\mathbf{A}\|_M \|\mathbf{x}\|_a\,.$$

Például (10.11) szerint a Frobenius-norma illeszkedik a 2-normához.

Indukált norma E paragrafusban vektornormákból kiindulva újabb mátrixnormákhoz jutunk.

10.22. definíció (Indukált norma). *Legyen $\|.\|$ egy tetszőleges vektornorma. Ekkor az*

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{Ax}\| \tag{10.12}$$

egyenlőséggel definiált függvényt a vektornorma által indukált *mátrixnormának nevezzük.*

► Az indukált mátrixnormára a vektornorma jelölését szokás használni, így például a mátrix p-norma definíciója

$$\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p .$$

► Ha mátrix helyett lineáris leképezésre értelmezzük a fenti definíciót, *operátornormáról* beszélünk.

► A normák ekvivalenciájából következik, hogy bármely normában az egységgömb korlátos és zárt. Így a rajta értelmezett folytonos $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ függvénynek van maximuma és minimuma, tehát a definíció értelmes.

► Az előző megjegyzést is figyelembe véve könnyen igazolható, hogy a definíció a következő ekvivalens alakokba is átírható:

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\|\mathbf{x}\|\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}. \tag{10.13}$$

Ez abból következik, hogy az $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ jelöléssel

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{y}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{y}\| = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \left\|\mathbf{A}\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right)\right\| = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

► Azt még igazolnunk kell, hogy a mátrixnorma elnevezés e függvényre valóban jogos.

10.23. TÉTEL (INDUKÁLT NORMA TULAJDONSÁGAI). *Legyen* $\|.\|$ *egy tetszőleges vektornorma, ekkor a (10.12) képlettel definiált mátrixfüggvény*
a) mátrixnorma, azaz fennáll a 10.20. definíció mind a négy feltétele,
b) illeszkedik az indukáló vektornormához, azaz

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{x}\| .$$

BIZONYÍTÁS. Először az illeszkedést igazoljuk. Ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, akkor az egyenlőtlenség teljesül, hisz mindkét oldalán $\mathbf{0}$ áll. Ha $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, akkor a (10.13) szerint

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\mathbf{z}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{z}\|}{\|\mathbf{z}\|} \geq \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|},$$

azaz $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{x}\|$.

A mátrixnormát definiáló négy feltétel közül az első három nyilvánvalóan teljesül. A negyedik igazolásához legyen $\mathbf{y}$ egy olyan vektor, amelyben az $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{x}\|$ felveszi a maximumát az egységgömbön, azaz amelyre $\|\mathbf{y}\| = 1$, és

$$\|\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{y}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{B}\| .$$

Ekkor az illeszkedés kétszeri alkalmazásával

$$\|\mathbf{AB}\| = \|\mathbf{ABy}\| \le \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{By}\| \le \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|\,\|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|\,. \qquad \square$$

Az 1-, 2- és ∞-norma mátrixokra A fönt definiált p-normák közül mátrixokra is az 1-, 2- és a ∞-norma a legfontosabb. Kiszámításukra a definíciónál egyszerűbb módszer is adódik.

10.24. tétel (1-, 2- és ∞-norma kiszámítása). *Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, ekkor*

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \textit{legnagyobb abszolút oszlopösszeg}, \tag{10.14}$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| = \textit{legnagyobb abszolút sorösszeg}, \tag{10.15}$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \left\|\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\right\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1}\ \max_{\|\mathbf{y}\|_2=1} |\mathbf{y}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x}| = \sigma_1, \tag{10.16}$$

ahol σ_1 az $\mathbf{A}$ legnagyobb szinguláris értéke, azaz $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$ legnagyobb sajátértékének gyöke. Ha az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix invertálható, akkor

$$\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \frac{1}{\|\mathbf{Ax}\|_2} = \frac{1}{\min\limits_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|\mathbf{Ax}\|_2} = \frac{1}{\sigma_n}, \tag{10.17}$$

ahol σ_n az $\mathbf{A}$ legkisebb (pozitív) szinguláris értéke.

Bizonyítás. $p = 1$: Bármely $\mathbf{x}$ vektorra $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$ esetén a skalárokra vonatkozó háromszögegyenlőtlenség miatt

$$\begin{aligned}\|\mathbf{Ax}\|_1 &= \sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^{n}|x_j|\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\\ &\le \left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|\right)\max_j \sum_{i=1}^{m}|a_{ij}| = \max_j \sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\end{aligned}$$

Ez a maximum el is érhető, mert ha a k-adik oszlopban a legnagyobb az abszolút értékek összege, akkor $\|\mathbf{Ae}_k\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|$.

$p = \infty$: Bármely $\mathbf{x}$ vektorra $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$ esetén

$$\|\mathbf{Ax}\|_\infty = \max_i \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \le \max_i \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j| \le \max_i \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|.$$

Ez a maximum el is érhető, mert ha a k-adik sorban a legnagyobb az abszolút értékek összege, akkor az

$$\mathbf{x} = \left[\frac{\overline{a_{kj}}}{|a_{kj}|}\right]$$

vektorra $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$ és $\|\mathbf{Ax}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

$p = 2$: A CBS-egyenlőtlenség szerint $|\mathbf{y}^\mathsf{H}\mathbf{Ax}| \le \|\mathbf{y}\|_2 \|\mathbf{Ax}\|_2$, így

$$\max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \max_{\|\mathbf{y}\|_2=1} |\mathbf{y}^\mathsf{H}\mathbf{Ax}| \le \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|\mathbf{Ax}\|_2 = \|\mathbf{A}\|_2 .$$

Így csak azt kell megmutatni, hogy van olyan $\mathbf{x}_0$ és $\mathbf{y}_0$ egységvektor, melyre az előbbi egyenlőtlenségben egyenlőség áll. Legyen $\mathbf{x}_0$ az a vektor, melyben $\|\mathbf{Ax}\|_2$ a maximumot adja, és $\mathbf{y}$ ennek normált képe, azaz

$$\|\mathbf{Ax}_0\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|\mathbf{Ax}\|_2 = \|\mathbf{A}\|_2 , \quad \mathbf{y}_0 = \frac{\mathbf{Ax}_0}{\|\mathbf{Ax}_0\|_2} = \frac{\mathbf{Ax}_0}{\|\mathbf{A}\|_2}.$$

Ekkor

$$\mathbf{y}_0^\mathsf{H}\mathbf{Ax}_0 = \frac{\mathbf{x}_0^\mathsf{H}\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{Ax}_0}{\|\mathbf{A}\|_2} = \frac{\|\mathbf{Ax}_0\|_2^2}{\|\mathbf{A}\|_2} = \frac{\|\mathbf{A}\|_2^2}{\|\mathbf{A}\|_2} = \|\mathbf{A}\|_2 .$$

Az $\|\mathbf{A}\|_2 = \sigma_1$ igazolásához a következő maximumot keressük:

$$\|\mathbf{A}\|_2^2 = \max_{\mathbf{x}\ne\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_2^2}{\|\mathbf{x}\|_2^2} = \max_{\mathbf{x}\ne\mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{Ax}}{\mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{x}}.$$

Mivel $\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A}$ önadjungált, ezért létezik sajátvektoraiból álló ortonormált bázisa. Vektorai legyenek $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$, a hozzájuk tartozó sajátértékek $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, melyek közül λ_1 legyen a legnagyobb. Ekkor egyrészt

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{u}_1^\mathsf{H}\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{Au}_1}{\mathbf{u}_1^\mathsf{H}\mathbf{u}_1},$$

másrészt bármely $\mathbf{x} = \sum_j c_j \mathbf{u}_j \ne \mathbf{0}$ vektorra

$$\lambda_1 - \frac{\mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{Ax}}{\mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{x}} = \lambda_1 - \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j c_j^2}{\sum_{j=1}^n c_j^2} = \frac{\sum_{j=1}^n (\lambda_1 - \lambda_j) c_j^2}{\sum_{j=1}^n c_j^2} \ge 0,$$

tehát $\|\mathbf{A}\|_2^2 = \lambda_1$, azaz $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_1} = \sigma_1$.

$p = 2$ esetén $\mathbf{A}^{-1}$ normája is egyszerűen számolható:

$$\frac{1}{\min\limits_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|\mathbf{Ax}\|_2} = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \frac{1}{\|\mathbf{Ax}\|_2} = \max_{\mathbf{y}\ne\mathbf{0}} \frac{1}{\left\|\mathbf{A}\frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}}{\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}\|_2}\right\|_2} = \max_{\mathbf{y}\ne\mathbf{0}} \frac{\left\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}\right\|_2}{\|\mathbf{y}\|_2}$$
$$= \max_{\mathbf{y}\ne\mathbf{0}} \left\|\mathbf{A}^{-1}\left(\frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|_2}\right)\right\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \left\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}\right\| = \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_2 .$$

Mivel $\mathbf{A}^{-1}$ szinguláris értékei az $\mathbf{A}$ szinguláris értékeinek reciprokai, ezért $\mathbf{A}^{-1}$ legnagyobb szinguláris értéke az $\mathbf{A}$ legkisebb szinguláris értékének reciproka. □

► Az 1-, a ∞- és a 2-normára szokásos másik elnevezés: *oszlopnorma*, *sornorma* és *spektrálnorma*.

Feladatok

10.4. Számítsuk ki az alábbi vektorok megadott normáit!
1. $\mathbf{x} = (\sqrt{3} - \mathrm{i}, 6\mathrm{i}, 3)$, $\mathbf{y} = (0.1, -0.2, -0.2)$, $p = 1, 2, \infty$;
2. $(1,2,2)$, $(2,3,6)$, $(1,4,8)$, $(4,4,7)$, $p = 2$;
3. $(\mathrm{i}, 2, \sqrt{2} - \sqrt{2}\mathrm{i}, -4i)$, $p = 1, 2, \infty$;
4. $(3,4,5)$, $(11,12,13,14)$, $p = 3$;
5. $\|(95800, 217519, 414560)\|_4$, $\|(27, 84, 110, 133)\|_5$.

10.5. Mutassuk meg, hogy a 10.14. definíció 1.–3. pontja és az utána következő megjegyzés 1′–3′ pontja ekvivalensek.

10.6. Mutassuk meg, hogy az 1-norma norma.

10.7. Mutassuk meg, hogy az ∞-norma norma.

10.8. Mutassuk meg, hogy $\|\mathbf{x}\|_p \le c\,\|\mathbf{x}\|_q$, ahol c a következő táblázatból kiolvasható, ahol p értékei a sorok, q értékei az oszlopok fejlécében vannak.

	1	2	∞
1		$\sqrt{n}$	n
2	1		$\sqrt{n}$
∞	1	1	

10.9. Mutassuk meg, hogy minden norma folytonos függvény.

10.10. Mutassuk meg, hogy ha $\|.\|$ egy norma, és A egy egy-egy értelmű lineáris leképezés, akkor az $\mathbf{x} \mapsto \|A\mathbf{x}\|$ leképezés is norma.

10.11. Mutassuk meg, hogy ha $\|.\|$ egy norma, akkor az

$$\mathbf{x} \mapsto \sup_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}$$

függvény is az. E normát duálnormának is szokás nevezni.

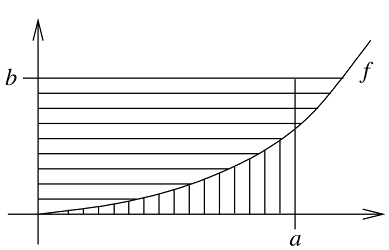
10.12. Hölder-egyenlőtlenség Igazoljuk, hogy bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ vektor és $p, q \ge 1$ valósok esetén

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \le \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q, \text{ ahol } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{10.18}$$

A következő lépéseket javasoljuk:
1. Igazoljuk, hogy $a, b > 0$, $p, q \ge 1$ és $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ esetén

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

   Ennek igazolására határozzuk meg az $f : x \mapsto x^{p-1}$ függvényhez tartozó két alábbi satírozott tartomány területét!



2. Az előző egyenlőtlenségben végezzük el az

$$a = \frac{|x_i|}{\|\mathbf{x}\|_p}, \quad b = \frac{|y_i|}{\|\mathbf{y}\|_q}$$

   helyettesítéseket, majd ezzel igazoljuk a Hölder-egyenlőtlenség (10.18) alakját.
3. Végül bizonyítsuk a Hölder-egyenlőtlenség (10.7) alakját is.

10.13. Minkowski-egyenlőtlenség Igazoljuk, hogy bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ vektor és $p \ge 1$ valós esetén

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p \le \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p. \tag{10.19}$$

A következő lépéseket javasoljuk:
1. Igazoljuk, majd alkalmazzuk az x_i, y_i számokra az

$$|a+b|^p = |a+b||a+b|^{p/q} \le |a||a+b|^{p/q} + |b||a+b|^{p/q}$$

   egyenlőtlenséget, ahol $1/p + 1/q = 1$.
2. Alkalmazzuk a Hölder-egyenlőtlenséget a $\sum_{i=1}^{n} |x_i||x_i + y_i|^{p/q}$ kifejezésre.

10.14. Mutassuk meg, hogy a p-norma norma.

10.15. Számítsuk ki az alábbi mátrixok Frobenius-, 1-, 2- és ∞-normáját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

10.16. Számítsuk ki az alábbi mátrixok Frobenius-, 1-, 2- és ∞-normáját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

10.17. Konstruáljunk olyan $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrixokat, hogy maximum normájukra $\|\mathbf{AB}\|_{\max} < \|\mathbf{A}\|_{\max} \|\mathbf{B}\|_{\max}$, $\|\mathbf{AC}\|_{\max} = \|\mathbf{A}\|_{\max} \|\mathbf{C}\|_{\max}$ és $\|\mathbf{BC}\|_{\max} > \|\mathbf{B}\|_{\max} \|\mathbf{C}\|_{\max}$ legyen.

10.18. Igazoljuk, hogy minden indukált $\|.\|$ mátrixnormára $\|\mathbf{I}\| = 1$, ugyanakkor $\|\mathbf{I}\|_F = \sqrt{n}$.

10.19. Igazoljuk, hogy tetszőleges mátrixnormára

$$\rho(\mathbf{A}) \le \|\mathbf{A}\|,$$

ahol $\rho(\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ spektrálsugara.

10.20. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{A}$ normális ($\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}$), akkor $\|\mathbf{A}\|_2 = \rho(\mathbf{A})$.

Megoldások

10.1. Ellenőriznünk kell, hogy

a) az egyenlőség fennáll,

b) az $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ ortogonális mátrixok, $\mathbf{\Sigma}$ diagonális,

c) az $\mathbf{u}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ és a $\mathbf{v}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ vektorokra $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{u}_1$.

Ezek mind nyilvánvalóak, vagyis az első felbontás szinguláris. Mivel $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 1$, ezért $\mathbf{U}$ első oszlopát és $\mathbf{V}^\mathsf{T}$ első sorát, valamint $\mathbf{\Sigma}$ bal felső elemét meghagyva valóban a második alakot kapjuk.

10.2. A $\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B}$ mátrix karakterisztikus polinomja $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda = -(\lambda-3)(\lambda-1)\lambda$, így sajátértékei 3, 1 és 0. A szinguláris értékek $\sqrt{3}$ és 1. A sajátvektorok számításához 3-dimenziós vektorokkal kell számolnunk. Talán jobban járunk, ha inkább a $\mathbf{B}\mathbf{B}^\mathsf{T}$ mátrixszal próbálkozunk. Mivel $\mathbf{B}\mathbf{B}^\mathsf{T} = \left[\begin{smallmatrix}2&1\\1&2\end{smallmatrix}\right]$, ezért a karakterisztikus polinom $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-3)(\lambda-1)$. A szinguláris értékek tehát $\sqrt{3}$ és 1, összhangban az előbbi számítással. A hozzájuk tartozó egységnyi hosszú sajátvektorok most nem a $\mathbf{V}_1$, hanem $\mathbf{U}_1$ oszlopait adják: $\mathbf{u}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $\mathbf{u}_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. A $\mathbf{v}_i = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u}_i/\sigma_i$ képletet használva a $\mathbf{V}$ mátrix is meghatározható. Tehát

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

a $\mathbf{B}$ mátrix szinguláris felbontása.

10.4.

a) $\|\mathbf{x}\|_1 = 11$, $\|\mathbf{x}\|_2 = 7$, $\|\mathbf{x}\|_\infty = 6$, $\|\mathbf{y}\|_1 = 0.5$, $\|\mathbf{y}\|_2 = 0.3$, $\|\mathbf{x}\|_\infty = 0.2$.

b) Ezek az úgynevezett Pitagoraszi számnégyesekből képzett vektorok, amelyekben a koordináták négyzetösszege négyzetszám, így a 2-normájuk egész. A normák 3, 7, 9, 9.

c) 9, 5, 4;

d) 6, 20;

e) e két példa a $p = 4$ és $p = 5$ értékre a legkisebb olyan $p-1$-dimenziós pozitív egész vektor, melynek p-normája egész: $\|(95800, 217519, 414560)\|_4 = 422481$, $\|.\|\,(27, 84, 110, 133)_5 = 144$. Euler még azt sejtette, hogy ilyen nincs.

10.15. $\|\mathbf{A}\|_F = 5$, $\|\mathbf{A}\|_1 = 6$, $\|\mathbf{A}\|_2 = 5$, $\|\mathbf{A}\|_\infty = 6$.
$\|\mathbf{B}\|_F = 5$, $\|\mathbf{B}\|_1 = 7$, $\|\mathbf{B}\|_2 = 5$, $\|\mathbf{B}\|_\infty = 4$.
$\|\mathbf{C}\|_F = \sqrt{13}$, $\|\mathbf{C}\|_1 = 4$, $\|\mathbf{C}\|_2 = 3$, $\|\mathbf{C}\|_\infty = 4$.

10.16. $\|\mathbf{A}\|_F = 9$, $\|\mathbf{A}\|_1 = 8$, $\|\mathbf{A}\|_2 = 8$, $\|\mathbf{A}\|_\infty = 8$.
$\|\mathbf{B}\|_F = 3\sqrt{3}$, $\|\mathbf{B}\|_1 = 5$, $\|\mathbf{B}\|_2 = 3$, $\|\mathbf{B}\|_\infty = 5$.
$\|\mathbf{C}\|_F = 3\sqrt{3}$, $\|\mathbf{C}\|_1 = 5$, $\|\mathbf{C}\|_2 = 5$, $\|\mathbf{C}\|_\infty = 5$.

10.17. Tekintsük például az alábbi három mátrixot:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ezek mindegyikében 2 az elemek maximuma, így bármely két mátrix maximum normájának szorzata 4. Szorzataik:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{BC} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ezek elemeinek maximuma rendre 2, 4, 6.

10.19. Ha λ egy tetszőleges sajátértéke $\mathbf{A}$-nak, és $\mathbf{x}$ a hozzá tartozó egyik sajátvektor, azaz $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, akkor

$$\mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{x}^\mathsf{H} = \lambda\mathbf{x}\mathbf{x}^\mathsf{H} \rightsquigarrow \|\mathbf{A}\|\left\|\mathbf{x}\mathbf{x}^\mathsf{H}\right\| \geq \left\|\mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{x}^\mathsf{H}\right\| = |\lambda|\left\|\mathbf{x}\mathbf{x}^\mathsf{H}\right\|,$$

és mivel $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, így $\mathbf{x}\mathbf{x}^\mathsf{H} \neq \mathbf{O}$, azaz $\left\|\mathbf{x}\mathbf{x}^\mathsf{H}\right\| \neq 0$, vagyis leosztva vele $|\lambda| \leq \|\mathbf{A}\|$ adódik. Ez minden sajátértékre, így a spektrálsugárra is igaz.

10.20. Ha $\mathbf{A}$ normális, akkor unitéren hasonló egy diagonális $\mathbf{D}$ mátrixhoz, azaz $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^\mathsf{H}$ valamely unitér $\mathbf{Q}$ mátrixszal. Ekkor $\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A} \sim \mathbf{D}^\mathsf{H}\mathbf{D}$ is fönnáll, ugyanis $\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A} = (\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^\mathsf{H})^\mathsf{H}(\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^\mathsf{H}) = \mathbf{Q}\mathbf{D}^\mathsf{H}\mathbf{D}\mathbf{Q}^\mathsf{H}$, tehát $\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}^\mathsf{H}\mathbf{D}$ sajátértékei megegyeznek. Másrészt $\mathbf{D}^\mathsf{H}\mathbf{D}$ minden sajátértéke $|\lambda|^2$ alakú, ahol λ az $\mathbf{A}$ valamely sajátértéke. Összegezve: mivel $\|\mathbf{A}\|_2 = \sigma_1$, azaz az $\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A}$ legnagyobb sajátértékének gyöke, ami viszont megegyezik $\mathbf{A}$ legnagyobb sajátértékével, azaz a $\rho(\mathbf{A})$ spektrálsugárral.

11

Jordan-féle normálalak

A négyzetes mátrixok Jordan-féle normálalakja azok egyfajta klasszifikációját adja, ami sok alapvető következménnyel jár az alkalmazásokban is. Numerikus instabilitása miatt viszont a numerikus algoritmusok ritkán használják.

Normálalak és invariáns altér

Minden mátrix hasonló egy „majdnem diagonális" alakú mátrixhoz, amelynek főátlójában a sajátértékek, fölötte nullák vagy egyesek, egyebütt nullák vannak.

Invariáns alterek Egy vektortér lineáris transzformációjának diagonalizálhatósága ekvivalens a tér sajátalterek direkt összegeként való előállíthatóságával. Ezt az állítást általánosítani fogjuk invariáns alterekre.

Láttuk, hogy a 3-dimenziós térnek egy síkjára való tükrözése olyan lineáris transzformáció, melynek sajátalterei a sík, és a rá merőleges egyenes (mint 2-, illetve 1-dimenziós alterek). Azt is láttuk, hogy a tér e két sajátaltér direkt összege. A tér egyenes körüli $60°$-os elforgatása esetén csak egy sajátaltér van, a forgástengely, viszont a tér itt is előáll e tengely és a rá merőleges sík direkt összegeként. E síkot az jellemzi, hogy a forgatás síkbeli vektort síkbelibe visz. Másként kifejezve e sík a forgatásra nézve invariáns altér.

Legyen a továbbiakban $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$ vagy $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ (vagy valamely $\mathbb{F}$ testre $\mathcal{V} = \mathbb{F}^n$).

11.1. DEFINÍCIÓ (INVARIÁNS ALTÉR). *Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ altér az $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformáció (az L valamely bázisbeli $\mathbf{L}$ mátrixának)* invariáns altere, *ha minden $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ vektorra $L\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ ($\mathbf{L}\mathbf{x} \in \mathcal{U}$).*

Egy altér invariáns voltának eldöntéséhez elég ismerni az altér egy bázisának képét:

11.2. TÉTEL (INVARIÁNS ALTÉR BÁZISA). *Az $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ altér pontosan akkor invariáns altér az L lineáris transzformációra nézve, ha $\mathcal{U}$ egy $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ bázisának minden vektorára $L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ $(i = 1, \ldots, k)$.*

BIZONYÍTÁS. Ha $\mathcal{U}$ invariáns altér, akkor definíció szerint $\mathcal{U}$ minden vektorának képe $\mathcal{U}$-ban van, így a bázisvektorok is, azaz $L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ $(i = 1, \ldots, k)$.

Fordítva, tegyük fel, hogy a bázis minden $\mathbf{u}_i$ elemére $L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$. Legyen $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ egy tetszőleges vektor. Ekkor vannak olyan x_1, x_2,..., x_k számok, hogy $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \ldots + x_k\mathbf{u}_k$. Így

$$L\mathbf{x} = x_1 L\mathbf{u}_1 + x_2 L\mathbf{u}_2 + \ldots + x_k L\mathbf{u}_k \in \mathcal{U},$$

mivel $\mathcal{U}$-beli vektorok lineáris kombinációja is $\mathcal{U}$-beli. □

11.3. PÉLDA (INVARIÁNS ALTÉR). *Tekintsük az $L : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{L}\mathbf{x}$ mátrixleképezést, ahol*

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Mutassuk meg, hogy az $\mathcal{U} = \operatorname{span}((1, -1, 2, -1), (1, 2, -1, 2))$ altér invariáns altere az L lineáris transzformációnak.

MEGOLDÁS. Könnyen látható, hogy

$$L \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$L \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

ami az előző tétel szerint azt jelenti, hogy $\mathcal{U}$ invariáns altér. □

Blokkdiagonális mátrixok Ha a $\mathcal{V}$ vektortér az L-re nézve invariáns alterek direkt összege, akkor L mátrixa megfelelő bázisban blokkdiagonális.

11.4. TÉTEL (BLOKKDIAGONÁLIS MÁTRIXOK ÉS AZ INVARIÁNS ALTEREK). *Legyen az $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformáció két invariáns altere $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$. Ha $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, akkor L mátrixa*

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{W} \end{bmatrix}$$

alakú a $\mathcal{V}$ minden olyan bázisában, mely az $\mathcal{U}$ és a $\mathcal{W}$ egy-egy bázisának uniója.

BIZONYÍTÁS. Legyen $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ és $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{n-r}\}$ az $\mathcal{U}$, illetve a $\mathcal{W}$ egy-egy bázisa. Mivel $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, ezért egyesítésük a $\mathcal{V}$ egy bázisát adja. L e bázisra vonatkozó mátrixa a bázisvektorok képvektoraiból alkotott mátrix. Mivel $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ invariáns alterek, ezért $L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ és $L\mathbf{w}_j \in \mathcal{W}$, így koordinátás alakjuk a következőképp írható föl:

$$\begin{aligned} L\mathbf{u}_i &= u_{i1}\mathbf{u}_1 + \cdots + u_{ir}\mathbf{u}_r + 0\mathbf{w}_1 + \cdots + 0\mathbf{w}_{n-r} \\ L\mathbf{w}_j &= 0\mathbf{u}_1 + \cdots + 0\mathbf{u}_r + w_{j,r+1}\mathbf{w}_1 + \cdots + w_{j,n}\mathbf{w}_{n-r} \end{aligned}$$

ahol $i = 1, \ldots, r$, $j = r+1, \ldots, n$. Így a mátrix alakja

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & \ldots & u_{r1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ u_{1r} & u_{2r} & \ldots & u_{rr} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & w_{r+1,r+1} & w_{r+2,r+1} & \ldots & w_{n,r+1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & w_{r+1,n} & w_{r+2,n} & \ldots & w_{n,n} \end{bmatrix},$$

ami bizonyítja az állítást. □

► Igaz a következő általánosítás: ha $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$,..., $\mathcal{U}_k$ a $\mathcal{V}$ vektortér invariáns alterei, és $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{V}_k$, akkor L mátrixa blokkdiagonális alakú minden olyan bázisban, mely az alterek bázisainak egyesítése.

► Evidens, hogy minden blokkdiagonális mátrixhoz találhatóak olyan invariáns alterek, amelyek direkt összege az egész tér. Például a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixra az $\mathcal{U}_1 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, $\mathcal{U}_2 = \{\mathbf{e}_4\}$, $\mathcal{U}_3 = \{\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6\}$ alterek invariánsak, és $\mathcal{V} = \mathbb{R}^6 = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \mathcal{U}_3$.

► Egy $\mathcal{V}$-n értelmezett L lineáris leképezés pontosan akkor diagonalizálható, ha $\mathcal{V}$ az L sajátaltereinek direkt összege. Ekkor a sajátalterek bázisainak egyesítése a tér bázisa lesz, és L mátrixa e bázisban olyan blokkdiagonális mátrixnak is tekinthető, ahol minden blokk $\lambda\mathbf{I}$ alakú valamely λ sajátértékre.

Általánosított sajátvektorok és a Jordan-blokk Nem minden lineáris leképezés diagonalizálható, azaz sajátaltereinek direkt összege nem feltétlenül egyenlő az egész térrel. A diagonalizálhatóság általánosításához jutunk, ha a sajátaltereket megfelelő invariáns alterekre cseréljük. Ezek az invariáns alterek az $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ hatványainak nullterei lesznek.

Tekintsük a 8.15. példában szereplő

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrix hatását a standard bázis vektorain:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{e}_1 &= 4\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{A}\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Átrendezés után kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_1 &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1 \\ (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Az $\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$ mátrix fenti hatását a következő diagrammal fogjuk szemléltetni:

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_1 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_2 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_3$$

Eszerint $\mathbf{e}_1$ sajátvektor, és mint a 8.15. példában láttuk, $\mathbf{A}$-nak más sajátvektora nincs. Viszont az előző egyenletekből a következő összefüggés adódik:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2\mathbf{e}_2 &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^3\mathbf{e}_3 &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Az ilyen vektorokra külön elnevezést fogunk alkalmazni:

11.5. DEFINÍCIÓ (ÁLTALÁNOSÍTOTT SAJÁTVEKTOR). *Az* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *vektort a négyzetes* $\mathbf{A}$ *mátrix* λ *sajátértékéhez tartozó* általánosított sajátvektorának *nevezzük, ha valamilyen* k *természetes számra* $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k\mathbf{x} = \mathbf{0}$. $k = 1$ *esetén* $\mathbf{x}$ *sajátvektor. Az általánosított sajátvektorokból álló* $\mathbf{x}_i$ *(*$i = 1, 2, \ldots, k$*) sorozatot* Jordan-láncnak *nevezzük, ha* $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1}$ *és* $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$. *Egy tér általánosított sajátvektorokból álló bázisát* Jordan-bázisnak *nevezzük.*

► A fent vizsgált $\mathbf{A}$ mátrix esetén a térnek sajátvektorokból álló bázisa nincs, hisz a sajátaltér csak 1-dimenziós, de általánosított sajátvektorokból álló bázisa – vagyis Jordan-bázisa – van, hisz a standard bázis vektorai épp ilyenek.

► A Jordan-lánc definíciója korrekt abban az értelemben, hogy ha $\mathbf{x}_k$ általánosított sajátvektor, melyre $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$, de $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-1}\mathbf{x}_k \neq$

$\mathbf{0}$, akkor minden $i < k$ esetén $\mathbf{x}_{k-i} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^i\mathbf{x}_k$ $(i = 1, \ldots, k-1)$ vektorok is általánosított sajátvektorok. Ez abból következik, hogy

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-i}\mathbf{x}_{k-i} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-i}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{i}\mathbf{x}_k = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k}\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$

11.6. PÉLDA (JORDAN-LÁNC ÉS JORDAN-BÁZIS KONSTRUKCIÓJA). *Az alábbi három mátrix mindegyikének $(4-x)^3$ a karakterisztikus polinomja. Keressünk mindegyikükhöz egy Jordan-bázist!*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 10 & -4 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

MEGOLDÁS. Mindhárom mátrixnak a $\lambda = 4$ háromszoros algebrai multiplicitású sajátértéke (ellenőrizzük!).

Az $\mathbf{A}$ mátrix esetén a sajátaltér 1-dimenziós, melyet az $\mathbf{x} = (1, -1, 1)$ vektor feszít ki.

Mivel $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^3 = \mathbf{O}$, de $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2 \neq \mathbf{O}$, ezért van olyan $\mathbf{x}_3$ vektor, melyre $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2\mathbf{x}_3 \neq \mathbf{0}$. Mivel

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

így $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2(x, y, z) = (-x + z, x - z, -x + z)$, ezért bármely $\mathbf{x}_3 = (x, y, z)$ vektor megfelel, ha $x \neq z$. Például legyen $x = 1$, $y = z = 0$, azaz az $\mathbf{x}_3 = (1, 0, 0)$. Mivel $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2\mathbf{x}_3 \neq \mathbf{0}$, ezért az $\mathbf{x}_2 = (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{x}_3$ szükségképpen olyan vektor, melyre $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$, de $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, azaz az $\mathbf{x}_1 = (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{x}_2$ vektor sajátvektor. A fenti $\mathbf{x}_3$ vektor esetén a következő láncot kapjuk:

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_1 = (-1, 1, -1) \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_2 = (2, -1, 2) \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_3 = (1, 0, 0)$$

A $\mathbf{B}$ mátrix esetén a sajátaltér 2-dimenziós, melyet az $\mathbf{x} = (1, 0, 1)$ és az $\mathbf{y} = (0, 1, 0)$ vektorok feszítenek ki, tehát két láncot keresünk. Mivel $(\mathbf{B} - 4\mathbf{I})^2 = \mathbf{O}$, ezért legföljebb kettő hosszú láncra számíthatunk. Olyan $\mathbf{x}_2$ vektort keresünk, melyre $(\mathbf{B} - 4\mathbf{I})\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$. Mivel

$$\mathbf{B} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ezért pl. az $x = 1$, $y = z = 0$, azaz az $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 0)$ választás megfelel. $(\mathbf{B} - 4\mathbf{I})\mathbf{x}_2 = (-1, 0, -1)$, ami épp az első sajátvektor -1-szeresébe. Így a másik sajátvektorból fog állni a másik lánc. Tehát a következő láncokat kaptuk:

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{B}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_1 = (-1,0,-1) \xleftarrow{\mathbf{B}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_2 = (1,0,0)$$
$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{B}-4\mathbf{I}} \mathbf{y}_1 = (0,1,0)$$

A sajátaltér a $\mathbf{C}$ mátrix esetén is 2-dimenziós, melyet az $(1,0,1)$ és $(0,2,3)$ vektorok feszítenek ki, tehát két láncot keresünk. Mivel $(\mathbf{C}-4\mathbf{I})^2 = \mathbf{O}$, ezért legföljebb kettő hosszú láncra számíthatunk. Olyan $\mathbf{x}_2$ vektort keresünk, melyre $(\mathbf{C}-4\mathbf{I})\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$. Mivel

$$\mathbf{C} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & -4 \\ 4 & 6 & -4 \end{bmatrix},$$

ezért pl. az $x = 1$, $y = z = 0$, azaz az $\mathbf{x}_2 = (1,0,0)$ választás megfelel. Ezt $\mathbf{C} - 4\mathbf{I}$ az $\mathbf{x}_1 = (-2,4,4)$ vektorba viszi, de ez nem egyezik meg a sajátalteret kifeszítő – fent megadott – vektorok egyikével sem. (Az viszont valóban igaz, hogy $\mathbf{x}_1$ a sajátaltérben van. Csak ellenőrzésképpen: $\mathbf{x}_1 = (-2,4,4) = -2(1,0,1) + 2(0,2,3)$.) A másik Jordan-lánc tehát egyetlen vektorból áll, mely a sajátaltér bármelyik $\mathbf{x}_1$-től független vektora lehet. Pl. a következő két lánc megfelel:

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{C}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_1 = (-2,4,4) \xleftarrow{\mathbf{C}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_2 = (1,0,0)$$
$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{C}-4\mathbf{I}} \mathbf{y}_1 = (1,0,1)$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a fenti mátrixokhoz konstruált általánosított sajátvektorok mindhárom esetben bázist alkotnak. □

► Az előző példabeli $\mathbf{A}$ mátrix alakja az $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ bázisban

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

ugyanis $\mathbf{A}\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2 + 4\mathbf{x}_3$, $\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + 4\mathbf{x}_2$, $\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = 4\mathbf{x}_1$, aminek mátrixszorzat alakja:

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}_1 \,|\, \mathbf{x}_2 \,|\, \mathbf{x}_3] = [\mathbf{x}_1 \,|\, \mathbf{x}_2 \,|\, \mathbf{x}_3] \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Így $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{J}$, ahol $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \,|\, \mathbf{x}_2 \,|\, \mathbf{x}_3]$, ami az általánosított sajátvektorok alkotta bázisról a standard bázisra való áttérés mátrixa, és ez bizonyítja az állítást. Az általánosított sajátvektorokkal konkrétan számolva is erre jutunk:

$$\mathbf{J} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

► A példabeli **B** és **C** mátrixok alakja az általánosított sajátvektorok alkotta bázisban hasonló számítások után

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Az itt kapott speciális alakú „majdnem diagonális” mátrixok fontos szerepet játszanak a továbbiakban.

11.7. DEFINÍCIÓ (JORDAN-BLOKK). *Azt a négyzetes mátrixot, melynek főátlójában azonos λ értékek, fölötte 1-esek, egyebütt 0-k állnak, azaz melynek alakja*

$$\mathbf{J}_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{11.1}$$

Jordan-blokknak *nevezzük.*

► Egy Jordan-blokknak a standard bázis minden vektora általánosított sajátvektora, és e vektorok egyetlen Jordan-láncot alkotnak, ugyanis ha

► Ennél is több igaz, ha egy mátrix Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrix, akkor a standard bázis Jordan-láncokból áll.

....

Jordan-normálalak Nem hozható minden mátrix diagonális alakra, de egy ahhoz közeli alakra – ahogy azt a **??** példa mutatja – igen. Ebben csak közvetlenül a főátló fölött lehetnek nemnulla elemek, és azok is csak 1-esek. Ráadásul az új bázis ismeretében ez az alak jól leírja a mátrixleképezés hatását is.

11.8. TÉTEL (JORDAN-NORMÁLALAK). *Bármely $\mathbb{C}^{n\times n}$-beli mátrix hasonló egy Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrixhoz. Részletesen megfogalmazva: minden $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixhoz létezik olyan $\mathbf{C}$ mátrix, hogy a $\mathbf{J} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$ mátrix alakja*

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{J}_k \end{bmatrix} \tag{11.2}$$

ahol k az $\mathbf{A}$ független sajátvektorainak maximális száma, és $\mathbf{J}_i$ az i-edik sajátvektorhoz tartozó Jordan-blokk.

► A tételbeli (11.2) alakú $\mathbf{J}$ mátrixot az $\mathbf{A}$ mátrix *Jordan-féle normálalakjának* nevezzük.
► A tétel más megfogalmazásban: minden komplex lineáris transzformációhoz van olyan bázis, melyben mátrixa Jordan-normálalakú. E bázis vektorai a $\mathbf{C}$ mátrix oszlopvektorai.
► A különböző Jordan-blokkok különböző sajátvektorokhoz tartoznak, de mivel több sajátvektor is tartozhat ugyanahhoz a sajátértékhez, ezért egy sajátérték több Jordan-blokkban is szerepelhet.
► Az $\mathbf{A} = \mathbf{CJC}^{-1}$ alakú felbontását az $\mathbf{A}$ *Jordan-felbontásának* nevezzük.
► A tétel komplex mátrixokról szól, de valós mátrixokra (vagy bármely más $\mathbb{F}$ test fölötti mátrixokra) is igaz, ha a mátrix összes sajátértéke valós (összes sajátértéke $\mathbb{F}$-beli).

BIZONYÍTÁS. Megmutatjuk, hogy ha a sajátalterek dimenzióinak összege k, azaz található k független sajátvektor, akkor található k Jordan-lánc is, melyek vektorai a tér bázisát adják, és ebben a bázisban a leképezés mátrixa a tételbeli Jordan-alakot ölti.

A mátrix méretére vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 1$ esetén az állítás nyilván igaz. Tegyük fel, hogy igaz az állítás minden n-nél kisebb méretű mátrixra.

Legyen λ az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix egy sajátértéke, és legyen $\mathbf{x}$ egy hozzá tartozó sajátvektor. Az $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ megoldásainak terét, vagyis a λ-hoz tartozó sajátalteret jelölje $\mathcal{N}_\lambda$. Ennek dimenzióját, vagyis $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ nullitását jelölje r.

Mivel $r > 0$, ezért a dimenziótétel miatt $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ oszlopterének dimenziója $n - r < n$. Jelölje az oszlopteret $\mathcal{O}_\lambda$. Az $\mathcal{O}_\lambda$ invariáns altere $\mathbf{A}$-nak, azaz $\mathbf{A}(\mathcal{O}_\lambda) \subseteq \mathcal{O}_\lambda$, ugyanis $\mathcal{O}_\lambda$ elemei $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}$ alakúak, ahol $\mathbf{v}$ tetszőleges, és $\mathbf{A}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = (\mathbf{A}^2 - \lambda\mathbf{A})\mathbf{v} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})(\mathbf{A}\mathbf{v})$ ugyancsak eleme $\mathcal{O}_\lambda$-nak. Az $\mathbf{A}$ mátrixleképezést szűkítsük le $\mathcal{O}_\lambda$-ra, jelölje ennek mátrixát $\hat{\mathbf{A}}$.

Az $\hat{\mathbf{A}}$ mátrix $n - r$-edrendű, ezért az indukciós feltevés szerint van Jordan-láncokból álló bázisa. A következő diagram e láncokat szemlélteti, és azt, hogy $\hat{\mathbf{A}} - \lambda\mathbf{I}$ hogy hat rajtuk. Mivel azonban e halmazon ez megegyezik $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ hatásával, a nyilak fölé is ezt írjuk:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^1 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_1}^1 \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^2 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_2}^2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_p\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^p & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_p\mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_p\mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_p}^p
\end{array}$$

Itt az $\mathbf{x}_k^j$ vektor felső indexe a lánc sorszámát jelöli.

Az $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ oszloptere és magtere metszetének dimenzióját jelölje q, azaz legyen $q = \dim(\mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{N}_\lambda)$. Ha $q = 0$, azaz $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{N}_\lambda = \{\mathbf{0}\}$, akkor kész vagyunk, mert így $\mathcal{O}_\lambda$ és $\mathcal{N}_\lambda$ kiegészítő alterek, tehát az $\mathcal{O}_\lambda$ indukció szerint létező Jordan-bázisához $\mathcal{N}_\lambda$ tetszőleges bázisát véve az egész tér egy Jordan-bázisát kapjuk.

Legyen $q > 0$. Mivel $\mathcal{N}_\lambda$ elemei az $\mathbf{A}$ sajátvektorai, ezért az indukciós feltevés szerint $\hat{\mathbf{A}}$ független sajátvektoraiból q darab a $\mathbf{Q}$ sajátaltér bázisa. Legyen e q sajátvektor az $\mathbf{x}_1^1$, $\mathbf{x}_1^2, \dots, \mathbf{x}_1^q$ vektor, vagyis sorszám szerint az első q láncbeli sajátvektor. Ezek tehát mind a λ sajátértékhez tartoznak. E láncok végén lévő $\mathbf{x}_{s_k}^k$ vektorok elemei $\mathcal{O}_\lambda$-nak, tehát mindegyikhez van olyan $\mathbf{y}_k$ vektor, hogy $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_{s_k}^k$ $(k = 1, 2, \dots, q)$.

Az $\mathcal{N}_\lambda$ altér r-dimenziós, annak q-dimenziós $\mathbf{Q}$ alteréhez találunk olyan $\mathcal{Z}$ alteret, mely $(r-q)$-dimenziós, és minden vektora sajátvektor, jelölje ezeket $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{r-q}$. Így a Jordan-láncok így alakulnak:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^1 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_1}^1 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{y}_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^q & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_q}^q & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{y}_q \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_{q+1}\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^{q+1} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_{q+1}\mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_{q+1}\mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_{q+1}}^{q+1} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_p\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^p & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_p\mathbf{I}} & \dots & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda_p\mathbf{I}} & \mathbf{x}_{s_p}^p & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{z}_1 & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & & & & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{z}_{r-q} & & & & & &
\end{array}
\tag{11.3}
$$

Az $\mathbf{x}$-vektorok száma $n - r$, az $\mathbf{y}$-vektorok száma q, a $\mathbf{z}$-vektorok száma $r - q$, ezek összege pedig $(n-r) + q + (r-q) = n$, tehát van elég vektor egy bázishoz. Már csak a függetlenségüket kell belátni. A konstrukció olyan volt, hogy az $\mathbf{x}$- és $\mathbf{z}$-vektorok mind függetlenek egymástól, csak az $\mathbf{y}$-vektorok tőlük való függetlenségét kell bizonyítani. Tegyük fel, hogy

$$\sum_{j,k} \xi_{j,k}\mathbf{x}_k^j + \sum_t \eta_t \mathbf{y}_t + \sum_r \zeta_r \mathbf{z}_r = \mathbf{0},$$

ahol nem minden η_t nulla. Szorozzuk meg az egyenlőséget (balról) az $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ mátrixszal. Mivel az első q lánc végén lévő $\mathbf{x}_{s_t}^t$-vektorok kisebb indexűekbe mennek, másrészt $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{y}_t = \mathbf{x}_{s_t}^t$, ezért olyan összefüggéshez jutunk, amelyben már csak $\mathbf{x}$-vektorok lesznek, de nem minden együttható nulla, hisz van nemnulla η együttható, és ez ellentmondás. □

11.9. PÉLDA (NORMÁLALAKOK). *Soroljuk fel az összes lehetséges Jordan-normálalakját annak a mátrixnak, melyről csak annyit tudunk, hogy* $(1 -$

$\lambda)^4$ a karakterisztikus polinomja. Ne tekintsünk különbözőnek két normálalkot, ha azok csak a Jordan-blokkok sorrendjében különböznek egymástól!

MEGOLDÁS. A karakterisztikus polinom negyedfokú, így a mátrix 4×4-es. Mivel minden sajátérték 1, ezért a Jordan-alak főátlójában csupa 1-es szerepel. A lehetséges öt alak elemi leszámlálással megkapható:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Nem tekintjük különbözőnek a blokkok cseréjével egymásból megkapható alakokat. Például az

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

mátrix a negyedik alakból a két blokk cseréjével megkapható. □

A Jordan-alak egyértelműsége A $\mathbb{C}^{n\times n}$-beli mátrixok a Jordan-normálalakjuk szerint osztályokba sorolhatók. Egy osztályba azok a mátrixok kerülnek, melyek normálalakja azonos. Egy ilyen osztályozás azonban csak akkor létezik, ha minden mátrixnak csak egyetlen normálalakja van, azaz a normálalak egyértelmű. Ezt biztosítja a következő tétel.

11.10. TÉTEL (A JORDAN-ALAK EGYÉRTELMŰSÉGE). *Egy komplex mátrix Jordan-normálalakja a Jordan-blokkok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.*

BIZONYÍTÁS. A felbontás egyértelműségének bizonyításához elég belátni, hogy bármely két hasonló mátrix Jordan-alakjának meghatárázó adatai a hasonlóságra nézve invariánsak.

A Jordan-blokkok, és így a Jordan-láncok száma megegyezik a független sajátvektorok maximális számával – ez invariáns.

Az egyszerűség kedvéért először tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ minden sajátértéke azonos, jelölje λ. A továbbiak könnyebb megértésére lássunk egy konkrét példát. Legyen az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja

$(\lambda - x)^{13}$, és tegyük fel, hogy Jordan-bázisa a következőképp néz ki:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^1 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_2^1 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_3^1 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_4^1 \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^2 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_2^2 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_3^2 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_4^2 \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^3 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_2^3 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_3^3 & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^4 & & & & & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} & \mathbf{x}_1^5 & & & & & &
\end{array}
\tag{11.4}
$$

A leghosszabb blokk mérete 4, ami $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ ismeretében úgy kapható meg, hogy 4 az a legkisebb s kitevő, melyre $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^s = \mathbf{O}$. Általában is igaz, a legnagyobb blokk mérete az a legkisebb s, melyre $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^s = \mathbf{O}$, ugyanis ha a leghosszabb lánc hossza s, akkor $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^s$ a Jordan-láncok minden vektorát a $\mathbf{0}$-vektorba viszik, míg az alacsonyabb kitevős hatványok a leghosszabb láncok utolsó elemeit nem. Egy mátrix hatványának zérus volta is invariáns, így hasonló mátrixokra a leghosszab lánc hossza is azonos. (Itt felhasználtuk, hogy ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ hasonlóak, akkor $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ és $\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}$ is.)

Legyen a λ sajátértékhez tartozó i-hosszú Jordan-láncok száma n_i. A 11.4 diagramon $n_1 = 2$, $n_2 = 0$, $n_3 = 1$, $n_4 = 2$. Látható, hogy $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ hatványainak rangjából megmondható, hogy hány bázisvektor nem futott még a nullvektorba, innen pedig az n_i értékek is kiszámolhatók. Esetünkben

$$
\begin{aligned}
n_4 &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^3\right) = 2 \\
n_3 + 2n_4 &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2\right) = 5 \\
n_2 + 2n_3 + 3n_4 &= \mathrm{r}\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right) = 8 \\
n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^0\right) = n = 13,
\end{aligned}
$$

és ez az egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Általában

$$
\begin{aligned}
n_s &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{s-1}\right) \\
n_{s-1} + 2n_s &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{s-2}\right) \\
n_{s-2} + 2n_{s-1} + 3n_s &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{s-3}\right) \\
&\vdots \\
n_2 + 2n_3 + \dots + (s-1)n_s &= \mathrm{r}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \\
n_1 + 2n_2 + \dots + (s-1)n_{s-1} + sn_s &= n.
\end{aligned}
$$

Ennek az egyenletrendszernek a jobb oldalán a hasonlóságra nézve invariáns értékek vannak, az együtthatómátrix háromszög alakú, így egyszerű visszahelyettesítéssel megoldható, mellékátlójában csupa egyes van, melynek következtében egyrészt a megoldás egyértelmű, másrészt a megoldások mindegyike egész szám.

Ha a mátrixnak több különböző sajátértéke van, akkor sajátértékenként egy ilyen egyenletrendszert kapunk, mely annyiban változik az előzőhöz képest, hogy ha λ algebrai multiplicitása $m(\lambda)$, akkor $A - \lambda\mathbf{I}$ hatványainak rangjához az összes λ-tól különböző sor eggyel hozzájárul, így az egyenletrendszerek jobb oldalából $(n - m(\lambda))$-t ki kell vonni. A legnagyobb blokk mérete ekkor $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$-nek az a legkisebb s hatványa, melynek rangja először éri el $n - m(\lambda)$-t. Így az összes esetre általánosan érvényes egyenletrendszer:

$$
\begin{aligned}
n_s &= m(\lambda) - n + \mathrm{r}\left((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{s-1}\right)\\
n_{s-1} + 2n_s &= m(\lambda) - n + \mathrm{r}\left((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{s-2}\right)\\
n_{s-2} + 2n_{s-1} + 3n_s &= m(\lambda) - n + \mathrm{r}\left((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{s-3}\right)\\
&\vdots\\
n_2 + 2n_3 + \cdots + (s-1)n_s &= m(\lambda) - n + \mathrm{r}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\\
n_1 + 2n_2 + \cdots + (s-1)n_{s-1} + sn_s &= m(\lambda)
\end{aligned}
$$

Ennek egyértelmű megoldhatósága bizonyítja állításunkat. □

11.11. PÉLDA (JORDAN-BLOKKOK MÉRETE). *Egy 10×10-es $\mathbf{A}$ mátrixnak λ 10-szeres algebrai multiplicitású sajátértéke. $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 5, 2, 1, 0. Írjuk fel a Jordan-normálalakját!*

MEGOLDÁS. A blokkok száma, ami megegyezik a Jordan-láncok számával 5, mivel $n - \mathrm{r}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 10 - 5 = 5$. A leghosszabb lánc hossza 4, mivel $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ legkisebb zérusmátrixot adó hatványa a 4-dik. Az egyenletrendszer és megoldása, valamint a $\mathbf{J}$ Jordan-mátrix:

$$
\begin{aligned}
n_4 &= 1\\
n_3 + 2n_4 &= 2\\
n_2 + 2n_3 + 3n_4 &= 5\\
n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 &= 10
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
n_4 &= 1\\
n_3 &= 0\\
n_2 &= 2\\
n_1 &= 2
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\mathbf{J} = \left[\begin{array}{cccc|cc|cc|c|c}
\lambda & 1 & & & & & & & & \\
 & \lambda & 1 & & & & & & & \\
 & & \lambda & 1 & & & & & & \\
 & & & \lambda & & & & & & \\
\hline
 & & & & \lambda & 1 & & & & \\
 & & & & & \lambda & & & & \\
\hline
 & & & & & & \lambda & 1 & & \\
 & & & & & & & \lambda & & \\
\hline
 & & & & & & & & \lambda & \\
\hline
 & & & & & & & & & \lambda
\end{array}\right]
$$

□

11.12. PÉLDA (JORDAN-BLOKKOK MÉRETE). *Egy 14×14-es $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja $(3 - \lambda)^5(2 - \lambda)^5(1 - \lambda)^4$.*

$\mathbf{A} - 3\mathbf{I}$ *hatványainak rangja rendre:*	*12, 11, 10, 9;*
$\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ *hatványainak rangja rendre:*	*12, 10, 9;*
$\mathbf{A} - \mathbf{I}$ *hatványainak rangja rendre:*	*11, 10.*

Írjuk fel a Jordan-normálalakját!

MEGOLDÁS. Most $n = 14$, $m(3) = 5$, $m(2) = 5$, $m(1) = 4$.

$\lambda = 3$ esetén a blokkok (Jordan-láncok) száma $n - \mathrm{r}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = 14 - 12 = 2$. A leghosszabb lánc hossza $s = 4$, ugyanis ez a legkisebb s, melyre $\mathrm{r}((\mathbf{A}-3\mathbf{I})^s) = 14-5 = 9$. Az egyenletrendszer és megoldása

$$\left.\begin{aligned} n_4 &= 5-14+10 = 1 \\ n_3+2n_4 &= 5-14+11 = 2 \\ n_2+2n_3+3n_4 &= 5-14+12 = 3 \\ n_1+2n_2+3n_3+4n_4 &= 5 \end{aligned}\right. \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} n_4 &= 1 \\ n_3 &= 0 \\ n_2 &= 0 \\ n_1 &= 1 \end{aligned}$$

Hasonlóan járunk el a többi sajátérték esetén is (gondoljuk végig):

$$\left.\begin{aligned} n_3 &= 5-14+10 = 1 \\ n_2+2n_3 &= 5-14+12 = 3 \\ n_1+2n_2+3n_3 &= 5 \end{aligned}\right. \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} n_3 &= 1 \\ n_2 &= 1 \\ n_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} n_2 &= 4-14+11 = 1 \\ n_1+2n_2 &= 4 \end{aligned}\right. \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} n_2 &= 1 \\ n_1 &= 2 \end{aligned}$$

Összefoglalva:

$$\mathbf{J} = \left[\begin{array}{cccc|c|ccc|cc|cc|c|c}
3 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
 & 3 & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & & 3 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & 3 & & & & & & & & & & \\ \hline
 & & & & 3 & & & & & & & & & \\ \hline
 & & & & & 2 & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 2 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & & 2 & & & & & & \\ \hline
 & & & & & & & & 2 & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & & 2 & & & & \\ \hline
 & & & & & & & & & & 1 & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & & 1 & & \\ \hline
 & & & & & & & & & & & & 1 & \\ \hline
 & & & & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right]$$

az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-normálalakja. □

*Minimálpolinom** A Jordan normálalakból a mátrix sok tulajdonsága leolvasható, így az is, hogy mely polinomokba helyettesítve kapunk zérusmátrixot.

11.13. DEFINÍCIÓ (MINIMÁLPOLINOM). *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy tetszőleges* $\mathbb{F}$ *test fölötti négyzetes mátrix.* Minimálpolinomnak *nevezünk egy olyan minimális fokszámú* $\mu_{\mathbf{A}}$ *főpolinomot (azaz* 1 *főegyütthatójú polinomot), melyre* $\mu_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$. *Hasonlóan definálható egy* $A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ *lineáris transzformáció minimálpolinomja, ahol* $\mathcal{V}$ *egy* $\mathbb{F}$ *test fölötti véges dimenziós vektortér.*

► Azt mondjuk, hogy a p polinom az $\mathbf{A}$ mátrix (A lineáris transzformáció) *annullátora*, vagy hogy *annullálja* azt, ha $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ ($p(A) = 0$). A minimálpolinom tehát egy legkisebb fokú annullátor főpolinom.
► A nullpolinom nem lehet minimálpolinom, mert nem 1 a főegyütthatója.
► Az $\mathbf{I}$ mátrixnak, illetve az identikus transzformációnak a $\mu(x) = x-1$ polinom minimálpolinomja, mert $\mu(\mathbf{I}) = \mathbf{I}-\mathbf{I} = \mathbf{O}$, és ennél

alacsonyabb fokú főpolinom már csak egy van, az 1 polinom, ami nem annullálja az $\mathbf{I}$-t.

▶ Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ hasonló mátrixok, azaz valamely $\mathbf{C}$ mátrixra $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$, akkor minimálpolinomjaik is egyenlőek, ugyanis $p(\mathbf{B}) = \mathbf{C}^{-1}p(\mathbf{A})\mathbf{C}$ minden p polinomra fönnáll, így minden p polinomra $p(\mathbf{A})$ és $p(\mathbf{B})$ egyszerre $\mathbf{O}$, illetve egyszerre nem, tehát minimálpolinomjaik is azonosak.

▶ Az előző megjegyzés következménye, hogy a minimálpolinom invariáns a mátrixok hasonlóságára, így egy lineáris transzformáció minimálpolinomja megegyezik bármely bázisban fölírt mátrixának minimálpolinomjával.

11.14. ÁLLÍTÁS (A MINIMÁLPOLINOM TULAJDONSÁGAI). *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy tetszőleges test fölötti négyzetes mátrix. Ekkor*

a) $\mathbf{A}$*-nak pontosan egy* $\mu_{\mathbf{A}}$ *minimálpolinomja van.*

b) Bármely p *polinomra* $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ *pontosan akkor áll fenn, ha* p *maradék nélkül osztható a* $\mu_{\mathbf{A}}$ *polinommal.*

c) A $\chi_{\mathbf{A}}$ *karakterisztikus polinom osztható a* $\mu_{\mathbf{A}}$ *minimálpolinommal.*

d) $\mathbf{A}$ *minden sajátértéke gyöke* $\mu_{\mathbf{A}}$*-nak.*

BIZONYÍTÁS. *a)* A Cayley–Hamilton-tétel szerint minden $\mathbf{A}$ mátrixra $\chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$. Eszerint van legalább egy olyan polinom, mely annullálja $\mathbf{A}$-t. Az ilyen polinomokat elosztva főegyütthatójukkal csupa főpolinomot kapunk. Megmutatjuk, hogy csak egyetlen minimális fokszámú van köztük. Indirekt módon tegyük fel, hogy p és q két különböző minimális fokszámú főpolinom, melyekre $p(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$. Mivel mindkettő főegyütthatója 1, ezért különbségük kisbb fokú, másrészt $(p-q)(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A}) - q(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, ami ellentmond annak, hogy p és q minimális fokszámú annullátorok.

b) Ha p osztható $\mu_{\mathbf{A}}$-val, azaz $p = \mu_{\mathbf{A}}q$ valamilyen q polinomra, akkor $p(\mathbf{A}) = \mu_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})q(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

Fordítva: legyen p egy tetszőleges polinom, melyre $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$. Megmutatjuk, hogy $\mu_{\mathbf{A}}$ osztója p-nek. Maradékosan osztva p-t $\mu_{\mathbf{A}}$-val kapjuk, hogy $p = \mu_{\mathbf{A}}q + r$, ahol r foka kisebb, mint $\mu_{\mathbf{A}}$ foka, másrészt $\mathbf{O} = p(\mathbf{A}) = \mu_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})q(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A})$. Innen $r(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, ami csak úgy lehet, ha $r = 0$, hisz $\mu_{\mathbf{A}}$-nál kisebb fokú polinom nem lehet annullátor, kivéve a zéruspolinomot.

c) Mivel a Cayley–Hamilton-tétel szerint $\chi_{\mathbf{A}}$ annullátor, ezért az előző pont szerint osztható a minimálpolinommal.

d) Ha $(\lambda, \mathbf{x})$ sajátpár, akkor bármely pozitív egészre $\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}$, így bármely p polinomra $p(\mathbf{A})\mathbf{x} = p(\lambda)\mathbf{x}$. Így $\mu_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})\mathbf{x} = \mu_{\mathbf{A}}(\lambda)\mathbf{x}$. De $\mu_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, és $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, ezért $\mu_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$. □

▶ Ha $\chi_{\mathbf{A}}(x) = \prod_i (x - \lambda_i)^{a_i}$, akkor a *c)*-beli oszthatóság miatt $\mu_{\mathbf{A}}(x) = \prod_i (x - \lambda_i)^{m_i}$, ahol $1 \leqslant m_i \leqslant a_i$, és ahol a_i jelöli λ_i algebrai multiplicitását.

► Legyen $\mathbf{A}$ nilpotens, ahol $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, de $\mathbf{A}^{k-1} \neq \mathbf{O}$. Ekkor $\mu_{\mathbf{A}}(x) = x^k$, ugyanis x^k annullátor, így a minimálpolinom csak valamely osztója lehet. Az osztói viszont mind x^m alakúak, ahol $m \leqslant k$, de azok $m < k$ esetén nem annullátorok.

Az $\mathbf{A}$ Jordan-alakja segítségével jól jellemezhető az összes olyan p polinom, melyre $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

11.15. TÉTEL (JORDAN NORMÁLALAK ÉS MINIMÁLPOLINOM). *Legyen az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ komplex mátrix spektruma $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$, a λ_i sajátérték algbrai multiplicitása legyen a_i, és $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakjában a λ_i-hez tartozó legnagyonn Jordan-blokk mérete legyen m_i. Ekkor*

$$\mu_{\mathbf{A}}(x) = \prod_{i=1}^{s} (x - lambda_i)^{m_i}.$$

BIZONYÍTÁS. Mivel hasonló mátrixok minimálpolinomja azonos, elég csak a Jordan normálalakú mátrixokra szorítkozni. Ha a_i jelöli a λ_i algebrai multiplicitását, akkor karakterisztikus polinomja

$$\chi_{\mathbf{A}}(x) = \prod_{i=1}^{s} (x - lambda_i)^{a_i}.$$

A minimálpolinom ennek osztója, másrészt minden λ_i sajátérték esetén $x - \lambda_i$ osztója a minimálpolinomnak, tehát

$$\mu_{\mathbf{A}}(x) = \prod_{i=1}^{s} (x - lambda_i)^{k_i}$$

alakú, ahol $1 \leqslant k_i \leqslant a_i$. Világos, hogy

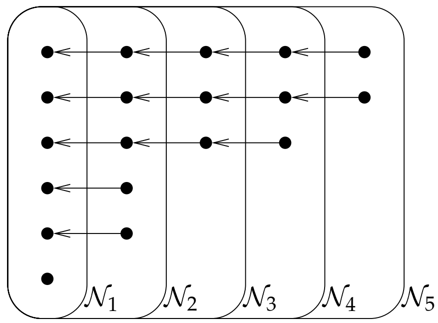
$$\mu_{\mathbf{A}}(x) = \prod_{i=1}^{s} (x - lambda_i)^{m_i}$$

annullálja $\mathbf{A}$-t, hisz $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{m_i}$ annullálja az összes λ_i-hez tartozó Jordan-blokkot, így az $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{m_i}$ alakú mátrixok szorzata a zérusmátrix. Másrészt ha valamelyik $x - \lambda_i$ tényező m_i-nél alacsonyabb hatványon szerepelne, akkor nem annullálná a λ_i-hez tartozó legnagyobb Jordan-blokkot, így e blokk nem lenne zérus $\mu(\mathbf{A})$-ban sem, mivel $\prod_{j \neq i} (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})$ főátlójában nemnulla értékek állnak (ellenőrizzük). □

*A Jordan-bázis konstrukciója** A Jordan-tétel bizonyításában megkonstruált bázist kis mátrixokra kézzel is ki lehet számolni. Az itt ismertetendő egyszerű naív algoritmus nem számítógépes megvalósításra való, ennél hatékonyabb is létezik.

Példaként tekintsünk egy 19-edrendű $\mathbf{A}$ mátrixot, melynek λ 19-szeres sajátértéke, és amelyre a Jordan-láncok hossza rendre $n_5 = 2$,

$n_4 = 1$, $n_3 = 0$, $n_2 = 2$, $n_1 = 1$. Ennek alapján az $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ hatása a Jordan-bázison meghatározható, amit a 11.1 ábra szemlélt. Jelölje $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k$ nullterét $\mathcal{N}_k$. $\mathcal{N}_5$ a λ-hoz tartozó teljes általánosított sajátaltér – e példában $\mathbb{C}^{19}$. A nulltér meghatározása egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldását jelenti, ami nem okoz nehézséget, de az már nem teljesen mindegy, hogy a bázist hogy választjuk benne.



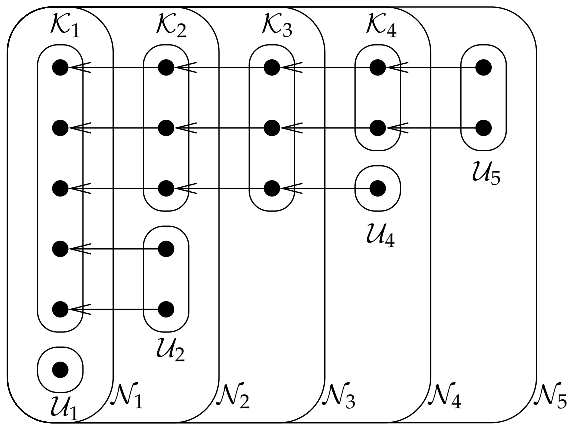
11.1. ábra: Az $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ hatványainak nullterei, és hatása az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-bázisán

Az algoritmus – melyet a 11.2 ábra is szemléltet – lényege, hogy a nagyobb indexű terek felől indulva minden lépésben kiterjesztjük $\mathcal{N}_{i-1}$ bázisát $\mathcal{N}_i$ bázisává, majd a kiterjesztésnek vesszük az $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ általi képét, ami már $\mathcal{N}_{i-1}$-be esik, és ezt $\mathcal{N}_{i-2}$ bázisához adva azt kiterjesztjük $\mathcal{N}_{i-1}$ új bázisává. . . . A konvenció az lesz, hogy a vektortér egy generátorának vektorait egyetlen mátrixba tesszük, és azt azonos, de félkövér betűvel jelöljük, tehát pl. $\mathcal{N}$ generátormátrixát $\mathbf{N}$ jelöli. Részletezve:

- Meghatározzuk $\mathcal{N}_i$ egy tetszőleges $\mathbf{N}_i$ bázismátrixát ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).
- Kiegészítjük $\mathbf{N}_4$-et $\mathcal{N}_5$ bázisává, az új báziselemek mátrixát jelölje $\mathbf{U}_5$, tehát $\mathcal{N}_5$ bázisa most $[\mathbf{N}_4|\mathbf{U}_5]$.
- Legyen $\mathbf{K}_4$ az új elemek $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ általi képe, azaz $\mathbf{K}_4 = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{U}_5$. Mivel $\mathcal{K}_4 \subset \mathcal{N}_4$, de független az $\mathcal{N}_3$ altértől, ezért alkalmas arra, hogy bázisvektorait a Jordan-bázis $\mathcal{N}_4 \setminus \mathcal{N}_3$-ba eső elemei közé vegyük.
- Ha szükséges, egészítsük ki a $[\mathbf{N}_3|\mathbf{K}_4]$-et $\mathcal{N}_4$ bázisává új elemek hozzávételével, így $\mathcal{N}_4$ bázisa most $[\mathbf{N}_3|\mathbf{K}_4|\mathbf{U}_4]$.
- Vegyük a $[\mathbf{K}_4|\mathbf{U}_4]$ mátrix képét, azaz legyen $\mathbf{K}_3 = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})[\mathbf{K}_4|\mathbf{U}_4]$, és ha szükséges, egészítsük ki $[\mathbf{N}_2|\mathbf{K}_3]$-at $\mathcal{N}_3$ bázisává új elemek hozzávételével (azaz $\mathcal{N}_3$ bázisa most $[\mathbf{N}_2|\mathbf{K}_3|\mathbf{U}_3]$ – most $\mathcal{U}_3 = \emptyset$). Hasonlóan folytatjuk $\mathcal{N}_i$ indexét csökkentve: $\mathbf{K}_2 = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})[\mathbf{K}_3|\mathbf{U}_3]$, új elemek hozzávételével előállítjuk $\mathcal{N}_2$ bázisát: $[\mathbf{N}_1|\mathbf{K}_2|\mathbf{U}_2]$.
- Végül legyen $\mathbf{K}_1 = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})[\mathbf{K}_2|\mathbf{U}_2]$, amit $\mathbf{U}_1$-gyel kibővítünk $\mathcal{N}_1$ bázisává. A tér Jordan-bázisa a kép- és az új elemek egyesítése:

$$[\mathbf{K}_1|\mathbf{K}_2|\mathbf{K}_3|\mathbf{K}_4|\mathbf{U}_1|\mathbf{U}_2|\mathbf{U}_3|\mathbf{U}_4|\mathbf{U}_5]\,.$$

- Végül a Jordan-bázis elemeit úgy rendezzük, hogy a láncokat egymás után, minden láncot a sajátvektorból indulva felsoroljuk.



11.2. ábra: A Jordan-bázist megkonstruáló algoritmus

Ezek után lássunk egy konkrét példát, majd az algoritmust általánosan. A számolás kivitelezéséhez két megjegyzés:

► Ha $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ két altér, és $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$, illetve $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ $(m < n)$ a bázisuk, akkor elemi sorműveletekkel konstruálhatunk $\mathcal{V}$-nek egy olyan $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ bázist, hogy $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ az $\mathcal{U}$ bázisa legyen. Ehhez írjuk $\mathcal{U}$, majd $\mathcal{V}$ bázisvektorait egyetlen

$$[\mathbf{u}_1 \ \ldots \ \mathbf{u}_m \mid \mathbf{v}_1 \ \ldots \ \mathbf{v}_n]$$

mátrixba. Ennek lépcsős alakjában vezéregyesek lesznek az első m oszlopban, és $n - m$ további oszlopban. A nekik megfelelő vektorok az eredeti bázisokban (tehát $\mathcal{V}$ összes vektora és $\mathcal{U}$-nak $n - m$ vektora) adják az új bázist.

► Emlékeztetünk rá, hogy ha egy mátrix redukált lépcsős alakja $[\mathbf{I}|\mathbf{S}]$ alakú, akkor $\left[\begin{smallmatrix}-\mathbf{S}\\ \mathbf{I}\end{smallmatrix}\right]$ vagy $\left[\begin{smallmatrix}\mathbf{S}\\ -\mathbf{I}\end{smallmatrix}\right]$ oszlopvektorai a mátrix nulltere bázisát adják. Vigyázzunk, ha $\mathbf{I}$ nem az első oszlopokban van, akkor $\left[\begin{smallmatrix}-\mathbf{S}\\ \mathbf{I}\end{smallmatrix}\right]$ sorait megfelelően permutálni kell.

11.16. PÉLDA (JORDAN-BÁZIS ELŐÁLLÍTÁSA). *Határozzuk meg az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 6 & -2 & 4 \\ 4 & -5 & 9 & -3 & 5 \\ 4 & -5 & 8 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix Jordan-normálalakját és Jordan-bázisát!

MEGOLDÁS. A karakterisztikus polinom

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = -\lambda^5 + 4\lambda^4 - 6\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda = -\lambda(1 - \lambda)^4.$$

A 0-hoz tartozó sajátvektor a redukált lépcsős alakból kiszámítva:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mivel itt az algebrai és geometriai multiplicitás egyaránt 1, ez a Jordan-lánc egyelemű. A $\lambda = 1$ esetén a geometriai multiplicitás 2, ugyanis $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ redukált lépcsős alakja és abból a nulltér bázisa:

$$\operatorname{rref}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{I})^2$ nullterét gyorsabb úgy számolni, ha nem $\mathbf{A} - \mathbf{I}$-t szorozzuk önmagával, hanem lépcsős alakját jobbról, és annak a szorzatnak vesszük a lépcsős alakját. A lépcsős alak kiszámolása ugyanis csak elemi mátrixokkal való balról szorzást jelent, így

$$(\operatorname{rref}(\mathbf{A} - \mathbf{I}))(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \mathbf{E}(\mathbf{A} - \mathbf{I})(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \mathbf{E}(\mathbf{A} - \mathbf{I})^2$$

vagyis a szorzat az $(\mathbf{A} - \mathbf{I})^2$-en végrehajtott elemi sorműveletek eredménye. Sokkal kevesebb viszont a számolnivaló, mivel a 0-sorok elhagyhatók:

$$\left\{ \begin{matrix} (\operatorname{rref}(\mathbf{A} - \mathbf{I}))\,(\mathbf{A} - \mathbf{I}) \\ \text{a 0-sorok nélkül} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ahonnan a bázis vektorai:

$$\mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hasonlóan határozzuk meg $(\mathbf{A} - \mathbf{I})^3$ bázisát!

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ami már lépcsős alakú, és ahonnan a bázismátrix

$$\mathbf{N}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ezután határozzuk meg $\mathbf{U}_3$ vektorait, vagyis azokat, amelyek $\mathcal{N}_2$ bázisát ($\mathbf{N}_2$-t) $\mathcal{N}_3$ bázisává egészítik ki. Ehhez az $[\mathbf{N}_2|\mathbf{N}_3]$ mátrixot kell redukált lépcsős alakra hozni, $\mathcal{U}_3$ elemei a $\mathbf{N}_3$ azon oszlopai lesznek, melyek függetlenek $\mathbf{N}_2$-től, azaz melyek redukált lépcsős alakjában vezéregyes van.

$$[\mathbf{N}_2|\mathbf{N}_3] = \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & -1 & -1 & 1 & -\mathbf{1} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tehát $\mathbf{U}_3 = [-1\ 0\ 1\ 0\ 0]^T$, és ebből $\mathbf{K}_2 = (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{U}_3 = [-1\ 3\ 4\ 4\ 0]^T$. Mivel $\mathbf{K}_2$ egyetlen vektorból áll, és $\mathcal{N}_3$ és $\mathcal{N}_2$ dimenzióinak különbsége is 1, ezért itt nem kell számolnunk semmit, $\mathcal{U}_2 = \{\mathbf{0}\}$, azaz $\mathbf{U}_2$ üres. $\mathbf{K}_1 = (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{K}_2 = [0\ 1\ 1\ 1\ 0]^T$, és mivel e vektor benn van $\mathcal{N}_1$ bázisában, $\mathbf{U}_1 = [0\ 1\ 0\ 0\ 1]^T$ teret a másik bázisvektor generálja. A Jordan-normálalak felírásához a Jordan-láncok vektorait egymás után fel kell sorolni, a belőlük képzett $\mathbf{P}$ mátrixszal lesz $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$. E két mátrix

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{r|rrr|r} 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \mathbf{J} = \left[\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \square$$

Az algoritmus általánosan:

- Input: $\mathbf{A}$, $\chi(x)$ karakterisztikus polinom lineáris tényezőkre bontva,
- Minden λ sajátértékre
  - Határozzuk meg a leghosszabb lánc s hosszát, és $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^i$ nullterét ($\mathcal{N}_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$). Legyen $\mathcal{U}_{s+1} = \mathcal{K}_{s+1} = \mathcal{N}_0 = \{\mathbf{0}\}$, azaz e terek bázisa az üreshalmaz.
  - Minden i-re s-től 1-ig haladva:
    * Legyen $\mathbf{K}_i = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})[\mathbf{K}_{i+1}|\mathbf{U}_{i+1}]$.
    * Határozzuk meg $\mathbf{U}_i$-t úgy, hogy $[\mathbf{N}_{i-1}|\mathbf{K}_i|\mathbf{U}_i]$ bázisa legyen $\mathcal{N}_i$-nek. Ehhez az $[\mathbf{N}_{i-1}|\mathbf{K}_i|\mathbf{N}_i]$ mátrix redukált lépcsős alakja alapján válasszuk a bázisoszlopokat $\mathbf{N}_i$-ből az $\mathbf{U}_i$-be.
- Tegyük a Jordan-láncok vektorait balról jobbra egymás mellé minden láncot a sajátvektorral kezdve, az így kapott $\mathbf{P}$ mátrixszal $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$.

Feladatok

11.1. Jordan-láncok és Jordan-blokkok kapcsolata

Tudjuk, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixnak két különböző sajátértéke van, $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 4$, valamint hogy a $\mathbf{C}$ mátrix oszlopvektorai az $\mathbf{A}$ egy Jordan-bázisát alkotják, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rajzoljuk fel a Jordan-láncok diagrammját, és határozzuk meg a $\mathbf{J} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ mátrixot a $\mathbf{C}^{-1}$ kiszámítása nélkül!

Mátrixfüggvények

A Jordan-normálalak segítségével értelmet adhatunk mátrixok függvényeinek. Ez fontos szerepet kap például a lineáris differenciálegyenletek elméletében.

Diagonalizálható mátrixok függvényei Ha egy folyamat egy $\mathbf{x}_k$ állapotát a következővel egy lineáris $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k$ kapcsolat fűzi össze, akkor az $\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0$ összefüggés miatt a folyamatot az $\mathbf{A}$ mátrix hatványai jellemzik. Kérdés lehet például a mátrixhatványok aszimptotikus viselkedése, vagy a nagy kitevőjű hatványok gyors kiszámításának módja.

Diagonális mátrix hatványai könnyen számolhatók: csak a főátló elemeit kell hatványozni. Másrészt $(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{C})^k = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{M}^k\mathbf{C}$, ezért a diagonalizálható mátrixok is könnyen hatványozhatók.

11.17. PÉLDA (MÁTRIXOK HATVÁNYAI). *Tekintsük az alábbi két „majdnem egyenlő” mátrixot:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.3 & 1.8 \\ -0.6 & 1.8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0.3 & 1.8 \\ -0.5 & 1.8 \end{bmatrix}$$

Vizsgáljuk meg hatványaik határértékét, ha a kitevő tart a végtelenhez!

MEGOLDÁS. Mindkét mátrixot diagonalizáljuk:

$$\mathbf{\Lambda}_1 = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad \text{ahol } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

valamint

$$\mathbf{\Lambda}_2 = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad \text{ahol } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{D}^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Így a k-adik hatvány könnyen számolható:

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{C}\begin{bmatrix} 0.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.9 \end{bmatrix}^k \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\begin{bmatrix} 0.6^k & 0.0 \\ 0.0 & 0.9^k \end{bmatrix}\mathbf{C}^{-1}$$

Mivel mindkét sajátérték abszolút értéke kisebb 1-nél, ezért $\mathbf{\Lambda}_1^k \to \mathbf{O}$ és így $\mathbf{A}^k \to \mathbf{O}$, ha $k \to \infty$. A $\mathbf{B}$ mátrix esetén

$$\mathbf{B}^k = \mathbf{D}\begin{bmatrix} 1.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.3 \end{bmatrix}^k \mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}\begin{bmatrix} 1.2^k & 0.0 \\ 0.0 & 0.3^k \end{bmatrix}\mathbf{D}^{-1},$$

ami arra vezet, hogy $\mathbf{\Lambda}_2^k \to \left[\begin{smallmatrix} \infty & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ és a $\mathbf{D}$ és a $\mathbf{D}^{-1}$ elemeinek előjelét is figyelembe véve így $\mathbf{B}^k \to \left[\begin{smallmatrix} -\infty & \infty \\ -\infty & \infty \end{smallmatrix}\right]$, ha $k \to \infty$. □

Tudjuk, hogy a $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ diagonális mátrix hatványai a diagonális elemek azonos hatványaival számolhatók, azaz

$$\mathbf{D}^k = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)^k = \operatorname{diag}(d_1^k, d_2^k, \ldots, d_n^k).$$

Első gondolatunk az, hogy erre építve diagonális mátrixok olyan függvényei is természetes módon definiálhatók, amelyek hatványsorba fejthetők. Ha $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ és $\mathbf{D}$ diagonális, továbbá $\mathbf{D}$ főátlóbeli elemei benne vannak a hatványsor konvergenciatartományában, akkor

$$\begin{aligned} f(\mathbf{D}) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbf{D}^k = \operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k d_1^k, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} a_k d_1^k\right) \\ &= \operatorname{diag}(f(d_1), \ldots, f(d_n)). \end{aligned}$$

Eszerint például bármely diagonalizálható $\mathbf{A}$ mátrixra értelmezhető az $\mathrm{e}^{\mathbf{A}}$ hatvány, nevezetesen

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^n}{n!} + \ldots$$

Hasonlóképp definiálható az $\ln(\mathbf{I} + \mathbf{A})$ mátrixfüggvény is. Fölhasználva a

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \qquad |x| < 1$$

hatványsort kapjuk, hogy

$$\ln(\mathbf{I} + \mathbf{A}) = \mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}^2}{2} + \frac{\mathbf{A}^3}{3} - \frac{\mathbf{A}^4}{4} + \ldots,$$

ahol $\varrho(\mathbf{A}) < 1$.

A fentieknek két fontos következménye van:

- Miután $a_k = f^{(k)}(0)/k!$, ezért egy hatványsorba fejthető függvénynek egy diagonális mátrixban – és így bármely diagonalizálható mátrixban – fölvett értékét a függvénynek csak a sajátértékekben való viselkedése befolyásolja (deriváltjainak ott fölvett értéke).
- Minden mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét, így egy n-edrendű mátrix minden hatványa legföljebb $n-1$-edik hatványok lineáris kombinációjával helyettesíthető, azaz a függvény értéke egy polinomba való helyettesítéssel is kiszámolható.

Mátrixfüggvény kiszámítása a Jordan-alakból A Jordan-féle normálalakba írt mátrix hatványai is kifejezhetők a sajátértékek függvényeként. Ez lehetővé teszi tetszőleges négyzetes mátrix függvényének definiálását!

Tegyük fel, hogy az f függvény λ körül Taylor-sorba fejthető, azaz

$$f(x) = f(\lambda) + f'(\lambda)(x - \lambda) + \ldots + \frac{f^{(m)}(\lambda)}{m!}(x - \lambda)^m + \ldots$$

és legyen $\mathbf{J} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ egy Jordan-blokk, azaz

$$\mathbf{J} = \lambda\mathbf{I} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Mivel $\mathbf{N}^n = \mathbf{O}$, fenn kell álljon az

$$f(\mathbf{J}) = f(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{N}) = f(\lambda)\mathbf{I} + f'(\lambda)\mathbf{N} + \dots + \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!}\mathbf{N}^{n-1}$$

összefüggés – ha egyáltalán van értelme az $f(\mathbf{J})$ kifejezésnek. Tehát az f függvénynek csak a Jordan-mátrix rendjénél kisebb rendű deriváltjai játszanak szerepet a függvényértékben. Ez a következő két definícióhoz vezet.

11.18. DEFINÍCIÓ (SPEKTRUMON DEFINIÁLT FÜGGVÉNY). *Legyen az* $\mathbf{A}$ *mátrix spektruma* $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, *a* λ_i *sajátértékhez tartozó legnagyobb Jordan-blokk rendjét jelölje* n_i. *Azt mondjuk, hogy* f *definiálva van az* $\mathbf{A}$ *spektrumán, ha az*

$$f^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 1, \dots, n_i - 1,\ i = 1, \dots, k$$

értékek léteznek. Azt mondjuk, hogy ezek az értékek az f értékei az $\mathbf{A}$ spektrumán.

11.19. DEFINÍCIÓ (MÁTRIXFÜGGVÉNY A JORDAN-ALAKBÓL). *Legyen* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *Jordan-felbontása* $\mathbf{A} = \mathbf{CJC}^{-1}$, *ahol* $\mathbf{J} = \operatorname{diag}(\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_k)$ *a Jordan-féle normálalakja, és* n_i *jelöli a* $\mathbf{J}_i$ *blokk rendjét. Ekkor*

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{C}f(\mathbf{J})\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\operatorname{diag}(f(\mathbf{J}_1), \dots, f(\mathbf{J}_k))\mathbf{C}^{-1},$$

ahol

$$f(\mathbf{J}_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} & \dots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda_i)}{(n-2)!} & \frac{f^{(n-1)}(\lambda_i)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \dots & \dots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda_i)}{(n-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f'(\lambda_i) & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f(\lambda_i) \end{bmatrix} \tag{11.5}$$

► Egyszerű képletbehelyettesítéssel $f(x) = x^3$ esetén

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} f(2) & f'(2) \\ 0 & f(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

- Az $f(x) = \mathrm{e}^x$ függvény esetén, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{akkor} \quad \mathrm{e}^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 & \frac{e^2}{2} \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix} = e^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Általában a λ-hoz tartozó Jordan-blokkra

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \text{ esetén } e^{\mathbf{J}} = e^{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \frac{1}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{1}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

11.20. PÉLDA (MÁTRIX EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNYE). *Legyen*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg az $e^{\mathbf{A}}$ mátrixot!

MEGOLDÁS. **A** karakterisztikus polinomja

$$x^3 + 10x^2 + 32x + 32 = (x+2)(x+4)^2,$$

így

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{P}e^{\mathbf{J}}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{e^2+1}{e^4} & \frac{e^2-1}{e^4} & \frac{1}{2}\frac{e^2-1}{e^4} \\ \frac{1}{2}\frac{e^2-1}{e^4} & \frac{1}{e^2} & \frac{1}{2}\frac{e^2-1}{e^4} \\ -\frac{1}{2}\frac{e^2-1}{e^4} & -\frac{e^2-1}{e^4} & -\frac{1}{2}\frac{e^2-3}{e^4} \end{bmatrix}$$ □

Mátrixfüggvény kiszámítása polinominterpolációval Az, hogy az előzőekben egy mátrix függvényének kiszámításához valójában csak a mátrix egy polinomjának kiszámítása kellett, azt sejteti, hogy mátrix függvényét polinominterpolációval is számolhatjuk.

Az alapgondolat az, hogy ha f az **A** mátrix spektrumán definiált függvény, akkor elég megkeresni azt a polinomot (vagy egy olyan polinomot), amely azonos helyettesítési értékeket ad a függvény és deriváltjai helyettesítési értékeivel.

11.21. definíció (Mátrixfüggvény interpolációs polinommal). *Legyen* **A** *minimálpolinomja* $\mu_{\mathbf{A}}$*, és tegyük fel, hogy az* f *függvény definiálva van* **A** *spektrumán. Ekkor* $f(\mathbf{A}) := p(\mathbf{A})$*, ahol* p *az a polinom, melynek foka kisebb* $\mu_{\mathbf{A}}$ *fokánál, és amely eleget tesz a*

$$p^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 1, \ldots, n_i - 1,\ i = 1, \ldots, k$$

feltételeknek (a jelölések követik a 11.18. definíció jelöléseit).

► A definícióban megadott polinom egyértelműen létezik, ezt nevezzük *Hermite-polinomnak*, mely explicit módon is megadható:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{s} \left(\left(\sum_{j=0}^{m_i - 1} g_i^{(j)} \frac{(x-\lambda_i)^j}{j!} \right) \prod_{j \neq i} (x - \lambda_j)^{m_j} \right), \quad g_i = \frac{f(x)}{\prod_{k \neq i} (x - \lambda_k)}$$

Ha **A**-nak minden sajátértéke egyszeres algebrai multiplicitású, azaz $s = n$ és $m_i = 1$ minden i-re, akkor az előző formula az ismert Lagrange-féle interpolációs polinomot adja:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(\lambda_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right).$$

Ha pedig **A**-nak csak egyetlen sajátértéke λ, melynek n az algebrai multiplicitása, azaz $s = 1$, $m_1 = n$, akkor f Taylor-polinomját kapjuk:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(\lambda) \frac{(x-\lambda)^j}{j!}.$$

►

►

►

Megoldások

11.1. A **C** oszlopai Jordan-bázist alkotnak, azaz minden oszlopvektor egy Jordan-lánc eleme. Mivel az **A** mátrixnak csak két különböző sajátértéke van, ez azt jelenti, hogy minden oszlopvektort vagy az $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ vagy az $\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$ mátrix vagy a zérusvektorba, vagy egy másik oszlopvektorba visz (előbbi esetben az oszlopvektor sajátvektor, utóbbi esetben csak általánosított sajátvektor). E hatást az $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{C}$ és az $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{C}$ szorzatok kiszámításával megkaphatjuk:

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az első szorzatból látszik, hogy $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})[\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \mathbf{c}_3] = [\mathbf{0}\ \mathbf{c}_1\ \mathbf{0}]$, míg a másodikból, hogy $(\mathbf{A}-4\mathbf{I})[\mathbf{c}_4\ \mathbf{c}_5\ \mathbf{c}_6\ \mathbf{c}_7] = [\mathbf{0}\ \mathbf{c}_4\ \mathbf{c}_5\ \mathbf{0}]$ (a második szorzatban már nem is kellett volna a $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$ vektorokkal szorozni látva az előző szorzás eredményét). Ebből fölrajzolható a diagram:

$$\begin{array}{llllll}
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-2\mathbf{I}} & \mathbf{c}_1 & \xleftarrow{\mathbf{A}-2\mathbf{I}} & \mathbf{c}_2 & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-2\mathbf{I}} & \mathbf{c}_3 & & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} & \mathbf{c}_4 & \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} & \mathbf{c}_5 & \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \quad \mathbf{c}_6 \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} & \mathbf{c}_7 & & &
\end{array}$$

A diagramból kiolvasható az $\mathbf{A}$ hatása a $\mathbf{c}_i$ vektorokra: $\mathbf{A}\mathbf{c}_1 = 2\mathbf{c}_1$, $\mathbf{A}\mathbf{c}_2 = 2\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_1$, $\mathbf{A}\mathbf{c}_3 = 2\mathbf{c}_3$, $\mathbf{A}\mathbf{c}_4 = 4\mathbf{c}_4$, $\mathbf{A}\mathbf{c}_5 = 4\mathbf{c}_5 + \mathbf{c}_4$, $\mathbf{A}\mathbf{c}_6 = 4\mathbf{c}_6 + \mathbf{c}_5$, $\mathbf{A}\mathbf{c}_7 = 4\mathbf{c}_7$. Ebből felírható e leképezés mátrixa:

$$\mathbf{J} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \left[\begin{array}{cc|c|ccc|c}
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4
\end{array}\right]$$

12

Nemnegatív mátrixok

Különösen sok alkalmazása van azoknak a mátrixoknak, melyek elemei nem negatív számok. Ilyen mátrixok például azok, melyek elemei mérési eredmények, gazdasági adatok, valószínűségek,...

A Perron–Frobenius-elmélet

Mátrixok összehasonlítása Mátrixok elemenkénti összehasonlítására a szokásos relációjeleket fogjuk használni. $\mathbf{A} > \mathbf{B}$ azt jelenti, hogy mindkét mátrix azonos méretű, és $a_{ij} > b_{ij}$ minden lehetséges i és j indexre. Hasonlóan $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{B}$, ha $a_{ij} \geqslant b_{ij}$. Egy $\mathbf{A}$ mátrixot *pozitívnak* (*nemnegatívnak*) nevezünk, ha $\mathbf{A} > \mathbf{O}$ ($\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$), azaz ha $a_{ij} > 0$ ($a_{ij} \geqslant 0$). Itt $\mathbf{O}$ a nullmátrixot jelöli. E fogalmakat és jelöléseket vektorokra is használjuk: az $\mathbf{x}$ vektor pozitív, azaz $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, ha $\mathbf{x}$ minden koordinátája pozitív.

Néhány könnyen igazolható észrevétel:

$$\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0} \text{ minden } \mathbf{x} \geqslant 0 \text{ vektorra,} \tag{12.1}$$

$$\mathbf{A} > \mathbf{O} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} > \mathbf{0} \text{ minden } \mathbf{x} \geqslant 0,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ vektorra,} \tag{12.2}$$

$$\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}, \text{ és } \mathbf{x} \geqslant \mathbf{y} \geqslant \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} \geqslant \mathbf{A}\mathbf{y}. \tag{12.3}$$

A nemnegatív mátrixokat négy osztályba fogjuk sorolni aszerint, hogy ha a mátrix nem is, de legalább valamely hatványa mennyiben pozitív. Az $\mathbf{A}$ mátrix hatványainak elemeire az $\mathbf{A}^k = [a_{ij}^{(k)}]$ jelölést fogjuk használni.

12.1. DEFINÍCIÓ (PRIMITÍV, IREDUCIBILIS ÉS REDUCIBILIS MÁTRIXOK). *Azt mondjuk, hogy a nemnegatív négyzetes* $\mathbf{A}$ *mátrix* primitív, *ha valamely pozitív egészkitevős hatványa pozitív.* $\mathbf{A}$ irreducibilis, *ha minden* (i, j) *indexpárhoz van olyan k kitevő, hogy* $a_{ij}^{(k)} > 0$ *és* reducibilis, *ha van olyan* (i, j) *indexpár, hogy minden k kitevőre* $a_{ij}^{(k)} = 0$.

► Például a $\left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix pozitív, így primitív is, hisz első hatványa pozitív, az $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] \geqslant \mathbf{O}$ mátrix primitív, mert $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]^2 = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right] > \mathbf{O}$

► Az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix nem primitív, hisz $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]^2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, így $\mathbf{A}^{2k+1} = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{2k} = \mathbf{I}$, és ezek nem pozitív mátrixok. Másrészt a főátlóbeli elemek a páros, a mellékátlóbeliek a páratlan hatványokban pozitívak, így e mátrix irreducibilis. Ez a példa is mutatja, hogy ha egy mátrix irreducibilis, abból nem következik, hogy primitív is. Vagyis abból, hogy „minden elemhez létezik egy k kitevő”, nem következik, hogy létezik egy közös k kitevő is.

► Végül az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix reducibilis, mivel $\mathbf{A}^k = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{smallmatrix}\right]$, amelyben $a_{12}^{(k)} = 0$ minden k kitevőre.

A 12.1 táblázatban tömören összefoglaljuk a pozitivitás e négy fokozatának definícióját.

$\mathbf{A}$ pozitív:	$\forall i, j$	$a_{ij} > 0$
$\mathbf{A}$ primitív:	$\exists k\ \forall i, j$	$a_{ij}^{(k)} > 0$
$\mathbf{A}$ irreducibilis:	$\forall i, j\ \exists k$	$a_{ij}^{(k)} > 0$
$\mathbf{A}$ reducibilis:	$\exists i, j\ \forall k$	$a_{ij}^{(k)} = 0$

12.1. táblázat: $\mathbf{A} = [a_{ij}] \geqslant \mathbf{O}$. Pozitív, primitív, irreducibilis, reducibilis mátrixok definíciója.

A valós vagy komplex elemű $\mathbf{A}$ mátrix $\varrho(\mathbf{A})$ *spektrálsugarán* a legnagyobb abszolút értékű sajátértékének abszolút értékét értjük. Másként fogalmazva a spektrálsugár a komplex számsík legkisebb olyan origó középű körének a sugara, amely tartalmazza az összes sajátértéket.

Pozitív mátrixok E szakaszban csak pozitív mátrixokat vizsgálunk. Az itt ismertetendő elmélet Perrontól származik, melyet két tételben foglalunk össze.

12.2. TÉTEL (PERRON-TÉTEL: POZITÍV SAJÁTÉRTÉK ÉS SAJÁTVEKTOR). *Ha $\mathbf{A}$ pozitív mátrix, és $r = \varrho(\mathbf{A})$ jelöli a spektrálsugarát, akkor*

1. *$r > 0$,*
2. *r sajátérték egy pozitív sajátvektorral,*
3. *$\mathbf{A}$-nak e pozitív sajátvektor skalárszorosain kívül nincs más nemnegatív sajátvektora.*

BIZONYÍTÁS. 1. Ha $r = 0$, akkor $\mathbf{A}$ minden sajátértéke 0, azaz $\mathbf{A}$ nilpotens a 8.19. tétel szerint. Ez viszont pozitív mátrixra lehetetlen, hisz annak minden hatványa pozitív, tehát semelyik sem $\mathbf{O}$.

2. Legyen $\lambda \in \mathbb{C}$ egyike a legnagyobb abszolút értékű sajátértékeknek, azaz $|\lambda| = r$, és legyen az $\mathbf{x}$ sajátvektorral $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Legyen $\mathbf{p}$ az $\mathbf{x}$ koordinátáinak abszolút értékéből álló vektor, azaz $\mathbf{p} = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$. Írjuk fel az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ mindkét oldalának i-edik koordinátáját, majd vegyük annak abszolút értékét:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| = |\lambda||x_i|.$$

Ebből, a háromszög-egyenlőtlenséget fölhasználva kapjuk, hogy

$$rp_i = |\lambda||x_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_j, \quad \text{azaz } r\mathbf{p} \leqslant \mathbf{Ap}.$$

Ha itt egyenlőség áll, kész vagyunk, hisz $r\mathbf{p} = \mathbf{Ap}$ esetén r valóban sajátérték. Ha nem, akkor az $\mathbf{u} = \mathbf{Ap} - r\mathbf{p}$ vektorra $\mathbf{u} \geqslant \mathbf{0}$ és $\mathbf{u}$ legalább egyik koordinátája határozottan pozitív. A (12.2) szerint ekkor $\mathbf{Au} > \mathbf{0}$, azaz $\mathbf{A}(\mathbf{Ap}) - r\mathbf{Ap} > \mathbf{0}$. A $\mathbf{v} = \mathbf{Ap}$ jelöléssel eszerint $\mathbf{Av} > r\mathbf{v}$, ahol $\mathbf{v} > \mathbf{0}$. Megmutatjuk, hogy ez ellentmondásra vezet, azaz megmutatjuk, hogy nincs olyan $\mathbf{v}$ vektor, hogy $\mathbf{Av} > r\mathbf{v}$. Legyen $\varepsilon > 0$ egy olyan szám, melyre még fennáll az $\mathbf{Av} \geqslant (r+\varepsilon)\mathbf{v}$ egyenlőtlenség. A $\mathbf{B} = \frac{1}{r+\varepsilon}\mathbf{A}$ mátrixra tehát egyrészt $\mathbf{Bv} \geqslant \mathbf{v}$, másrészt $\varrho(\mathbf{B}) = \varrho(\frac{1}{r+\varepsilon}\mathbf{A}) = \frac{r}{r+\varepsilon} < 1$, azaz $\mathbf{B}$ spektrálsugara 1-nél kisebb. Ez azt jelenti, hogy $\lim_{k\to\infty} \mathbf{B}^k = \mathbf{O}$. Így a $\mathbf{v} < \mathbf{Bv} < \mathbf{B}^2\mathbf{v} < \cdots < \mathbf{B}^k\mathbf{v}$ vektorsorozat a $\mathbf{0}$ vektorhoz tart, vagyis $\mathbf{v} < \mathbf{0}$, ami ellentmond korábbi feltevésünknek. Ezzel bizonyítottuk, hogy $\mathbf{Ap} = r\mathbf{p}$.
Még meg kell mutatnunk, hogy $\mathbf{p} > \mathbf{0}$. Tudjuk, hogy $\mathbf{p} \geqslant \mathbf{0}$, így a (12.2) összefüggés miatt $\mathbf{Ap} > \mathbf{0}$, de $\mathbf{Ap} = r\mathbf{p}$, tehát $r\mathbf{p} > 0$, azaz $\mathbf{p} > \mathbf{0}$.

3. Legyen $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ a λ sajátértékhez tartozó sajátvektor. Legyen továbbá $\mathbf{q} > \mathbf{0}$ az ugyancsak pozitív, és azonos spektrumú $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ mátrix r-hez tartozó pozitív sajátvektora, azaz $\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{A} = r\mathbf{q}^\mathsf{T}$. Ekkor

$$r\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{x} = (\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{q}^\mathsf{T}(\mathbf{Ax}) = \lambda\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{x},$$

amiből $\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{x} > 0$ miatt $r = \lambda$ adódik.
Végül megmutatjuk, hogy $\mathbf{p}$ skalárszorosain kívül r-hez nem tartozik más sajátvektor. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\mathbf{s}$ egy $\mathbf{p}$-től független sajátvektor. Ekkor megfelelő c konstanssal elérhető, hogy a $\mathbf{p} + c\mathbf{s} \geqslant \mathbf{0}$ vektornak legyen 0 koordinátája. A (12.2) összefüggés szerint $r(\mathbf{p} + c\mathbf{s}) = \mathbf{A}(\mathbf{p} + c\mathbf{s}) > \mathbf{0}$, ami lehetetlen, hisz van 0-koordinátája. Beláttuk tehát, hogy r geometriai multiplicitása 1, és semmilyen más sajátértékhez nem tartozik nemnegatív sajátvektor. □

Valószínűségeloszlások leírásában való szerepe indokolja a következő kitüntető elnevezést. Pozitív mátrix spektrálsugarához, mint sajátértékhez tartozó pozitív $\mathbf{p}$ sajátvektorát *Perron-vektornak* nevezzük, ha koordinátáinak összege 1. A hasonló módon definiált bal sajátvektort *bal Perron-vektornak* nevezzük. Ez megegyezik az $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ Perron-vektorával. Összefoglalva: a $\mathbf{p}$ Perron-vektort és a $\mathbf{q}$ bal Perron-vektort az

$$\mathbf{Ap} = r\mathbf{p}, \ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \qquad \mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{A} = r\mathbf{q}^\mathsf{T}, \ \sum_{i=1}^{n} q_i = 1$$

képletek definiálják.

12.3. TÉTEL (PERRON-TÉTEL: EGYSZERES ÉS DOMINÁNS SAJÁTÉRTÉK). *Ha* $\mathbf{A}$ *pozitív mátrix, és* $r = \varrho(\mathbf{A})$, *akkor*

1. *az* r *sajátérték algebrai multiplicitása* 1,
2. r *domináns, azaz minden további* λ *sajátértékre* $|\lambda| < r$.

BIZONYÍTÁS. 1. Az előző tételben bizonyítottuk, hogy r geometriai multiplicitása 1. Tegyük fel, hogy van olyan $\mathbf{v} > \mathbf{0}$ általánosított sajátvektor, melyre $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{p}$, azaz $\mathbf{Av} = r\mathbf{v} + \mathbf{p}$. Könnyen elérhető a $\mathbf{p}$ egy megfelelően nagy d konstansszorosának hozzáadásával, hogy pozitív általánosított sajátvektort találjunk, ugyanis $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})(\mathbf{v} + d\mathbf{p}) = \mathbf{p} + d(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\mathbf{p} = \mathbf{p}$, így ha $\mathbf{v}$ egy Jordan-lánc $\mathbf{p}$ előtti eleme, akkor $\mathbf{v} + d\mathbf{p}$ is. Legyen tehát $\mathbf{v} > \mathbf{0}$. Ekkor $\mathbf{Av} = r\mathbf{v} + \mathbf{p} > r\mathbf{v}$, ami a 12.2. tétel második részének bizonyítása szerint ellentmondásra vezet. $\mathbf{A}$-nak tehát nincs r-hez tartozó általánosított sajátvektora, így algebrai multiplicitása 1.

2. Belátjuk, hogy ha λ az $\mathbf{A}$ egy sajátértéke, akkor $|\lambda| < r$. Indirekt módon bizonyítunk. Legyen $|\lambda| = r$, $\mathbf{x}$ pedig egy λ-hoz tartozó sajátvektor. Az előző tétel bizonyításának 2. pontjában leírtakat ismételve a komplex számok összegére vonatkozó háromszögegyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_j| \leqslant \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| = |\lambda||x_i|. \tag{12.4}$$

Mint azt beláttuk, ekkor $(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$ sajátvektor, a hozzá tartozó sajátérték $r = |\lambda|$, és a (12.4) egyenlőtlenségben egyenlőségnek kell állnia. A komplex számokra vonatkozó $|z_1 + \dots + z_k| = |z_1| + \dots + |z_k|$ egyenlőség csak akkor áll fenn, ha mindegyik komplex szám azonos argumentumú. Ez esetünkben azt jelenti, hogy van olyan φ szög, hogy minden i-re $x_i = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}|x_i|$. Eszerint $\mathbf{x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathbf{p}$, tehát $\lambda = r$. □

Tipográfiai különbség van az imaginárius egység álló i-je és a változó index dőlt *i*-je között!

Nemnegatív mátrixok A pozitív mátrixok Perron tételeiben kimondott tulajdonságai közül változtatás nélkül egyik sem marad érvényben nemnegatív mátrixokra. Például

- a $\left[\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right]$ mátrix nemnegatív, de mivel mindkét sajátértéke 0, ezért spektrálsugara is 0,
- az $\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]$ mátrix spektrálsugara 1, de az 1 kétszeres sajátérték, és több lineárisan független pozitív sajátvektor is tartozik hozzá,
- a $\left[\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right]$ mátrix sajátértékei 1 és -1, így spektrálsugara ugyancsak 1, de a spektrálkörön több különböző sajátértéke is van,
- az $\left[\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right]$ mátrixnak nincs pozitív sajátvektora.

Ugyanakkor az sem mondható, hogy ha egy nemnegatív mátrixnak vannak 0 elemei, akkor nem teljesülnek a Perron-tételek állításai. Például

- az $\left[\begin{smallmatrix}1&1\\2&0\end{smallmatrix}\right]$ mátrix nemnegatív, sajátértékei 2, -1, spektrálsugara tehát 2, ami egyszeres sajátérték, és a spektrálkörön az egyetlen sajátérték, a hozzá tartozó $(1,1)$ sajátvektor pozitív, és ennek konstansszorosait kivéve más pozitív sajátvektor nincs, mert a -1-hez tartozó sajátvektor $(1,-2)$.

A Perron-tételek állításaiból némi gyengítés után, de még az összes nemnegatív mátrixra érvényes marad a következő állítás:

12.4. TÉTEL (PERRON–FROBENIUS-TÉTEL – GYENGE VÁLTOZAT). *Ha* $\mathbf{A}$ *nemnegatív mátrix, akkor az* $r = \varrho(\mathbf{A})$ *spektrálsugár sajátértéke* $\mathbf{A}$*-nak, melyhez tartozik nemnegatív sajátvektor.*

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás alapötlete, hogy az $\mathbf{A}$ nemnegatív mátrixot pozitív mátrixokkal közelítjük, melyekre használhatók Perron-tételei. Legyen

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A} + \frac{1}{k}\begin{bmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1 & \dots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \dots & 1\end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Jelölje $\mathbf{A}_k$ spektrálsugarát r_k, Perron-vektorát $\mathbf{p}_k$, az $\mathbf{A}$ mátrix spektrálsugarát r. A $\mathbf{p}_k$ vektorok korlátos halmazt alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben, mivel mindegyik koordinátájuk 0 és 1 közé esik, így benne vannak az egységkockában. A Bolzano–Weierstrass-tétel szerint kiválasztható közülük egy konvergens $\mathbf{p}_{k_m}$ részsorozat. A határértéket jelölje $\mathbf{p}$. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{p}$ az $\mathbf{A}$-nak r-hez tartozó sajátvektora, és hogy $\mathbf{p} \geqslant \mathbf{0}$, de $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$. Mivel $\mathbf{p}_k > \mathbf{0}$, ezért a határértékéről azt tudjuk, hogy $\mathbf{p} \geqslant \mathbf{0}$. Tekintsük a folytonos $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$ függvényt. Mivel $f(\mathbf{p}_{k_m}) = 1$, ezért $f(\mathbf{p}) = 1$ is fennáll, így $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$.

Tekintsük ezután az r_k sorozatot. A ?? tétel szerint, $\mathbf{A}_1 > \mathbf{A}_2 > \dots \mathbf{A}_k > \dots > \mathbf{A}$, így $r_1 \geqslant r_2 \geqslant \dots \geqslant r_k \geqslant r$, azaz az r_k sorozat monoton csökkenő, és alulról korlátos, tehát konvergens. Határértékét jelölje $\hat{r}$. Ez egyúttal az r_{k_m} részsorozatnak is határértéke. A fentiek szerint $\hat{r} \geqslant r$. Másrészt

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{A}(\lim_{m\to\infty} \mathbf{p}_{k_m}) = \lim_{m\to\infty} \mathbf{A}\mathbf{p}_{k_m} = \lim_{m\to\infty} r_{k_m}\mathbf{p}_{k_m} = \hat{r}\mathbf{p}.$$

Tehát $\hat{r}$ sajátérték, akkor viszont $\hat{r} \leqslant r$. Így $\hat{r} = r$ és $\mathbf{A}\mathbf{p} = r\mathbf{p}$. □

A következőkben két olyan tételt mondunk ki, melyek a nemnegatív – és így a pozitív – mátrixokra korlátozás nélkül érvényesek.

12.5. TÉTEL (COLLATZ–WIELANDT-TÉTEL). *Az* $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$ *mátrix* r *spektrálsugarára*

$$r = \max_{\substack{\mathbf{x}\\ \mathbf{0}\neq\mathbf{x}\geqslant\mathbf{0}}} \min_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ x_i\neq 0}} \frac{[\mathbf{A}\mathbf{x}]_i}{x_i}. \tag{12.5}$$

Másként megfogalmazva:

$$r = \max_{\substack{\mathbf{x} \\ \mathbf{0}\neq\mathbf{x}\geqslant\mathbf{0}}} \max_{c\mathbf{x}\leqslant\mathbf{A}\mathbf{x}} c \tag{12.6}$$

A képletek úgy értendők, hogy minden $\mathbf{x}$ vektorra kiszámítjuk az $[\mathbf{A}\mathbf{x}]_i/x_i$ törtek minimumát, és ezen értékek maximumát vesszük, ha $\mathbf{x}$ végigfut a nemnegatív, de nullvektortól különböző vektorokon. Az $x_i = 0$ esetet a keresésből kizártuk, de mondhattuk volna azt is, hogy a tört ekkor legyen ∞, így nem változna a minimum. A második képletben minden $\mathbf{x}$ vektorra meghatározzuk azt a legnagyobb c számot, melyre $c\mathbf{x} \leqslant \mathbf{A}\mathbf{x}$, majd vesszük az így kapott c értékek maximumát.

Bizonyítás. A két megfogalmazás nyilván ekvivalens, hisz ha egy adott $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ vektorra c az $\frac{[\mathbf{A}\mathbf{x}]_i}{x_i}$ törtek minimuma, akkor c egyúttal a legnagyobb olyan szám, melyre $c\mathbf{x} \leqslant \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Először pozitív $\mathbf{A}$ mátrixra bizonyítunk. Legyen $\mathbf{q}$ a bal Perron-vektor, r a spektrálsugár. Ekkor a $\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{x} > 0$ számmal való osztás lehetőségét is használva

$$c\mathbf{x} \leqslant \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \rightsquigarrow \quad c\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = r\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{x} \quad \rightsquigarrow \quad c \leqslant r.$$

Másrészt az $\mathbf{x} = \mathbf{p}$ vektorra $r\mathbf{p} = \mathbf{A}\mathbf{p}$, tehát a lehetséges c értékek maximuma r.

Ezután marad az $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$ eset. Az előző tétel bizonyításában használt ötletet alkalmazzuk. Jelöljük $\mathbf{q}_k$-val az ott definiált $\mathbf{A}_k$ mátrix bal Perron-vektorát. Ekkor egy rögzített $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra

$$0 \leqslant c\mathbf{x} \leqslant \mathbf{A}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{A}_k\mathbf{x} \quad \rightsquigarrow \quad c\mathbf{q}_k^\mathsf{T}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{q}_k^\mathsf{T}\mathbf{A}_k\mathbf{x} = r_k\mathbf{q}_k^\mathsf{T}\mathbf{x} \quad \rightsquigarrow \quad c \leqslant r_k.$$

Így $c \leqslant \lim_k r_k = r$, amiből az előzőekhez hasonlóan az $\mathbf{x} = \mathbf{p}$ vektorra $r\mathbf{p} = \mathbf{A}\mathbf{p}$ adódik, tehát a lehetséges c értékek maximuma r. □

12.6. tétel (Nemnegatív mátrixok spektrálsugarának becslése). *Ha* $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$, *akkor a spektrálsugár a sorösszegek minimuma és maximuma, illetve az oszlopösszegek minimuma és maximuma közé esik, azaz*

$$\min_i \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\} \leqslant \varrho(\mathbf{A}) \leqslant \max_i \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\}$$

$$\min_j \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ij} \right\} \leqslant \varrho(\mathbf{A}) \leqslant \max_j \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ij} \right\}$$

Bizonyítás. Az első egyenlőtlenség felső korlátját bizonyítja, hogy minden Gerschgorin kör benne van a 0 középű $\sum_{j=1}^n a_{ij}$ sugarú körben.

A bal oldali egyenlőtlenség a Collatz–Wielandt-tételből következik, ha ugyanis $\mathbf{x} = \mathbf{1}$, akkor akkor az $[\mathbf{A}\mathbf{x}]_i/x_i$ hányados épp a sorösszeg, tehát annak minimuma kisebb vagy egyenlő $\rho(\mathbf{A})$-nál.

A második egyenlőtlenségeket megkapjuk, ha az elsőt $\mathbf{A}^\mathsf{T}$-ra alkalmazzuk, melynek spektruma és így spektrálsugara is azonos $\mathbf{A}$-éval.□

Irreducibilis mátrixok Az előző szakaszban láttuk, hogy Perron tételei nem maradnak érvényben általában, de vannak mátrixok, amelyekre igen. Frobenius talált rá arra a könnyen ellenőrizhető feltételre, mely alapján eldönthető, hogy egy nemnegatív mátrix melyik csoportba tartozik: e feltétel az irreducibilitás.

12.7. ÁLLÍTÁS (REDUCIBILIS ÉS IRREDUCIBILIS MÁTRIXOK). *Az* $\mathbf{A}$ *mátrix pontosan akkor* reducibilis, *ha a sorok és oszlopok azonos permutációjával*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Z} \end{bmatrix}$$

alakra hozható, ahol $\mathbf{X}$ *és* $\mathbf{Z}$ *négyzetes mátrixok. Azaz létezik olyan* $\mathbf{P}$ *permutációmátrix, hogy* $\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^\mathsf{T}$ *a fenti alakú. Pontosan azok a mátrixok irreducibilisek, amelyek nem hozhatók ilyen alakra.*

BIZONYÍTÁS. Ha nemnegatív mátrix hatványait vizsgáljuk, és csak az a kérdés, hogy a mátrix egy adott helyén hányadik hatványban lesz az érték pozitív, akkor a számok nagysága nem számít, csak pozitív vagy zérus volta. Ez a következő ötlethez vezet. Tekintsük azt az gráfot, amelyben az i-edik csúcsból a j-edikbe pontosan akkor fut irányított él, ha $a_{ij} > 0$. E gráf $\mathbf{G}$ szomszédsági mátrixa úgy kapható meg az $\mathbf{A}$-ból, hogy a pozitív számokat 1-re cseréljük. Könnyen látható, hogy $\mathbf{G}^2$ mátrix $[\mathbf{G}^2]_{ij}$ eleme pontosan akkor pozitív, ha az i-edik csúcsból vezet 2-hosszú irányított út a j-edikbe. Sőt, általában $[\mathbf{G}^k]_{ij}$ eleme pontosan akkor pozitív, ha az i-edik csúcsból vezet k-hosszú irányított út a j-edik csúcsba. Így $\mathbf{A}$ pontosan akkor irreducibilis, ha a fent hozzárendelt gráfjában bármely két csúcs között vezet irányított út, azaz ha a gráf *erősen összefüggő*. Eszerint a mátrix pontosan akkor reducibilis, ha gráfjában a csúcsoknak van egy olyan nem üres valódi részhalmaza, amelybe nem vezet kívülről (a komplementer csúcshalmazból) él. A szomszédsági mátrix sorainak és oszlopainak azonos permutációja a gráf csúcsai átszámozásának felel meg. A tételbeli $\left[\begin{smallmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Z} \end{smallmatrix}\right]$ mátrixhoz egy olyan gráf tartozik, melynek első k csúcsába nem vezet él, ha $\mathbf{X}$ egy $k \times k$-as mátrix. Ez bizonyítja állításunkat. □

12.8. PÉLDA. *Döntsük el, hogy az alábbi mátrixok közül melyik reducibilis, melyik irreducibilis! (Segítségül a nemnulla mátrixelemekről leolvasható a* *sor- és oszlopindex.)*

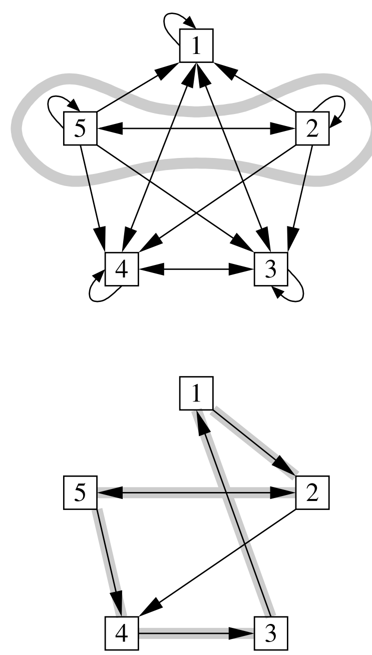
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}11&0&13&14&0\\21&22&23&24&25\\31&0&33&34&0\\41&0&43&44&0\\51&52&53&54&55\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&12&0&0&0\\0&0&0&24&25\\31&0&0&0&0\\0&0&43&0&0\\0&52&0&54&0\end{bmatrix}.$$

Megoldás. Az **A** mátrixon könnyű észrevenni, hogy reducibilis, mert az első és utolsó sorok és oszlopok cseréjével, vagyis a következő **P** permutációmátrixszal a kívánt alakra hozható:

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{PAP}^\mathsf{T}=\left[\begin{array}{cc|ccc}55&52&53&54&51\\25&22&23&24&21\\\hline 0&0&33&34&31\\0&0&43&44&41\\0&0&13&14&11\end{array}\right].$$

Nem ez az egyetlen permutáció, pl. az $1\to3\to4\to5\to2\to1$ csere is megteszi:

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{PAP}^\mathsf{T}=\left[\begin{array}{cc|ccc}22&25&21&23&24\\52&55&51&53&54\\\hline 0&0&11&13&14\\0&0&31&33&34\\0&0&41&43&44\end{array}\right].$$



12.1. ábra: Az **A** és **B** mátrixokhoz rendelt két gráf.

Az **A** mátrixhoz rendelt gráf a 12.1. ábrán látható első gráf. Vegyük észre, hogy a $\{2,5\}$ ponthalmazba nem fut él az $\{1,3,4\}$ halmazból. Ez azt jelenti, hogy ha a csúcsokat átszámozzuk az 5-ös és 1-es sorszám fölcserélésével, akkor az $\{1,2\}$ halmazba nem fut él a $\{3,4,5\}$ halmazból. Ez épp azt jelenti, hogy bármely mátrixban, melynek ez a gráfja, a bal alsó 3×2-es részmátrixa zérusmátrix. Tehát a mátrix reducibilis.

A **B** mátrixban több 0 van, azt hinnénk, ez inkább lesz reducibilis, mégsem találunk megfelelő **P** permutációmátrixot. Gráfja erősen összefüggő, például az 1-2-5-4-3-1 útvonalon bármely pontból bármely másik elérhető. Tehát **B** irreducibilis. □

► Fontos megjegyezni, hogy a 12.7. állítás a *sorok és oszlopok azonos permutációjáról* szól, tehát nem elég a mátrixot elemi sorműveletekkel $\begin{bmatrix}\mathbf{X}&\mathbf{Y}\\\mathbf{O}&\mathbf{Z}\end{bmatrix}$ alakra hozni. Ugyanazokat a műveleteket az oszlopokra is alkalmazni kell. Például a

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

mátrix irreducibilis, hisz egy 3-hosszú irányított kör szomszédsági mátrixa, de az első két sor cseréje a kívánt alakra hozza. Az első két oszlopot is kicserélve viszont már nem az $\left[\begin{smallmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{Y}\\ \mathbf{O} & \mathbf{Z}\end{smallmatrix}\right]$ alakot kapjuk!

► A 12.1 táblázat kiegészíthető a gráfelméleti megfogalmazásokkal:

A	algebrai feltétel		gráfelméleti feltétel
pozitív:	$\forall i,j$	$a_{ij} > 0$	irányított teljes gráf
primitív:	$\exists k\ \forall i,j$	$a_{ij}^{(k)} > 0$	bármely két csúcs között fut k-hosszú út
irreducibilis:	$\forall i,j\ \exists k$	$a_{ij}^{(k)} > 0$	erősen összefüggő
reducibilis:	$\exists i,j\ \forall k$	$a_{ij}^{(k)} = 0$	nem erősen összefüggő

Frobenius vette észre és bizonyította, hogy az irreducibilitás az a feltétel, melynek fennállása esetén a nemnegatív mátrixokra is kiterjeszthetők a 12.2. tétel állításai.

12.9. TÉTEL (PERRON–FROBENIUS-TÉTEL – ERŐS VÁLTOZAT). *Ha az* $\mathbf{A}$ *nemnegatív mátrix irreducibilis, és* $r = \varrho(\mathbf{A})$ *jelöli a spektrálsugarát, akkor*

1. $r > 0$,
2. r *sajátértéke* $\mathbf{A}$*-nak, melyhez tartozik pozitív sajátvektor,*
3. $\mathbf{A}$*-nak e pozitív sajátvektor skalárszorosain kívül nincs más nemnegatív sajátvektora,*
4. r *egyszeres sajátérték.*

Primitív és imprimitív mátrixok A Perron-tétel állításai közül nem maradt igaz az irreducibilis nemnegatív mátrixokra az, hogy a spektrálkörön csak egyetlen sajátérték van. Ez a tulajdonság is megmarad azonban a primitív mátrixokra.

12.10. TÉTEL (FELTÉTEL MÁTRIX PRIMITIVITÁSÁRA). *Ha* $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$ *irreducibilis és főátlójában van pozitív elem, akkor primitív.*

BIZONYÍTÁS. Legyen a főátló i-edik eleme pozitív. Ha $\mathbf{A}$ irreducibilis, akkor bármely csúcsból vezet irányított út az i-edik csúcsba. Közülük a leghosszabb út hosszát jelölje k_1. Ugyanígy bármely csúcsba vezet út az i-edik csúcsból. Ezek leghosszabbikának hosszát jelölje k_2. Ezután bármely csúcsból bármely csúcsba eljuthatunk $k = k_1 + k_2$ hosszú irányított úton az i-edik csúcs érintésével, és az ott lévő hurokélen megfelelő szmú kört téve. □

12.11. PÉLDA (PRIMITÍV MÁTRIXOK). *Döntsük el, hogy az*

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},$$
$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{E}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&1&0\\0&1&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{F}=\begin{bmatrix}0&0&6\\7&0&8\\0&9&0\end{bmatrix}$$

mátrixok közül melyik primitív! Egyúttal vizsgáljuk irreducibilitásukat is!

MEGOLDÁS. A mátrixok gráfját fölrajzolva látjuk, hogy csak $\mathbf{A}$ reducibilis, így az nem primitív. A $\mathbf{B}$ mátrix pozitív, így irreducibilis és primitív is. $\mathbf{C}^3=\mathbf{I}$, így $\mathbf{C}^{3m}=\mathbf{I}$, tehát $\mathbf{C}$ egyik hatványa sem lesz pozitív, tehát $\mathbf{C}$ imprimitív. A $\mathbf{D}$ mátrix ugyan irreducibilis, de négyzete

$$\mathbf{D}^2=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

már nem, így a $\mathbf{D}^{2m}$ hatványok sem, tehát $\mathbf{D}$ egyik hatványa sem lesz pozitív, így $\mathbf{D}$ is imprimitív. Az $\mathbf{E}$ mátrix irreducibilis és a főátlóján van pozitív elem, ezért primitív. Az $\mathbf{F}$ mátrixra

$$\mathbf{F}^5=\begin{bmatrix}27216&20412&31104\\36288&54432&57348\\23814&46656&54432\end{bmatrix}>\mathbf{O},$$

tehát $\mathbf{F}$ primitív, de e számolás egyszerűbbel is helyettesíthető. Elég ugyanis csak azt nézni, hogy egy hatványban egy elem 0 vagy nem, azaz az $\mathbf{F}$ helyett csak azzal a logikai értékeket tartalmazó $\hat{\mathbf{F}}$ mátrixszal kell számolni, melyet $\mathbf{F}$-ből úgy kapunk, hogy a pozitív elemeket 1-re cseréljük (1, ha az elem pozitív, 0, ha nem). Így a mátrixszorzásokban végzett szorzások helyett az és (AND), az összeadások helyett a vagy (OR) logikai műveletet elég elvégezni. E számolással az $\mathbf{F}$-hatványok elemeinek pozitivitása leolvasható a következő sorozatból:

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

Tehát innen is látható, hogy $\mathbf{F}^5>\mathbf{O}$, vagyis $\mathbf{F}$ primitív. Még e számoláson is sokat gyorsíthatunk, ha mindig az előző eredményt emeljük négyzetre. Ekkor persze nem tudjuk meg, hogy melyik az a legkisebb hatvány, amely már pozitív. Az $\mathbf{F}$ mátrix esetén a következő sorozatot kapjuk:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Eszerint $\mathbf{F}^8 > \mathbf{O}$, tehát $\mathbf{F}$ primitív. □

► E példa tanulságait összefoglalandó elsőként kiemeljük, hogy a primitivitás eldöntésében gyakran elég az adott mátrix helyett az annak megfelelő 0-1-mátrixot vizsgálni, és szükség esetén a mátrixszorzásban a szorzást az OR, az összeadást az AND műveletre cserélve számolni.
► A **C** mátrixhoz hasonlóan megmutatható, hogy minden permutációmátrix imprimitív.
► Nyilvánvaló, hogy ha egy nemnegatív mátrix k-adik hatványa pozitív, akkor minden k-nál nagyobb hatványa is pozitív. A **C** és **D** mátrixoknál ezt kihasználtuk azzal, hogy mutattunk végtelen sok nem pozitív hatványt, mellyel bizonyítottuk, hogy nem primitív.
► A **D** mátrix azt mutatja, hogy irreducibilis mátrix hatványa lehet reducibilis, kizárva ezzel annak lehetőségét, hogy primitív legyen.

12.12. TÉTEL (PERRON–FROBENIUS-TÉTEL – SAJÁTÉRTÉKEK A SPEKTRÁLKÖRÖN). *Ha az* $\mathbf{A}$ *nemnegatív mátrix irreducibilis, és* $r = \varrho(\mathbf{A})$, *akkor*

1. *az* $\mathbf{A}$ *mátrixnak a spektrálkör határára eső sajátértékei* 1 *multiplicitásúak, és felírhatók* $\{r, r\varepsilon, \dots, r\varepsilon^{k-1}\}$ *alakba, ahol* $\varepsilon = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/k}$, *továbbá*
2. $\mathbf{A}$ *pontosan akkor primitív, ha a spektrálkörén csak egy sajátérték van, azaz minden* $\lambda \neq r$ *sajátértékére* $|\lambda| < r$.
3. $\mathbf{A}$ *pontosan akkor primitív, ha létezik a* $\lim_{k\to\infty}(\mathbf{A}/r)^k$ *határérték. Ekkor e határérték megegyezik az* $\mathbf{A}$ *spektrálfelbontásában szereplő, az* r *sajátértékhez tartozó vetítő mátrixszal, azaz*

$$\lim_{k\to\infty}(\mathbf{A}/r)^k = \frac{\mathbf{p}\mathbf{q}^\mathsf{T}}{\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{p}},$$

ahol $\mathbf{p}$ *a Perron-vektor,* $\mathbf{q}$ *a bal Perron vektor.*

Feladatok

12.1. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Számítsuk ki a két Perron-vektort, és ellenőrizzük Perron tételét.

12.2. Egy pozitív elemű 4-edrendű mátrix három sajátértéke 1, $2i$, $-2i$. A -3, 2, 3, $4i$, 4 számok közül válasszuk ki mindegyik olyat, amelyik a negyedik sajátérték lehet!

12.3. Mutassuk meg, hogy ha az $\mathbf{A} > \mathbf{O}$ mátrix minden oszlopában vagy minden sorában c az elemek összege, akkor c a spektrálsugár.

Nemnegatív mátrixok

12.4. Egy nemnegatív mátrix az $(4, 6, 5)$ vektort az $(5, 6, 7)$ vektorba viszi. Mutassuk meg, hogy spektrálsugara legalább 1.

12.5. Legyen $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ tetszőleges, és $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségeket!

$$\min_i \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{x_j}{x_i} \right\} \leqslant \varrho(\mathbf{A}) \leqslant \max_i \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{x_j}{x_i} \right\}$$

$$\min_j \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{x_i}{x_j} \right\} \leqslant \varrho(\mathbf{A}) \leqslant \max_j \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{x_i}{x_j} \right\}$$

(Ötlet: ha $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(x_1, \dots, x_n)$, akkor $\mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{AD}$ hasonló $\mathbf{A}$-hoz, így $\varrho(\mathbf{B}) = \varrho(\mathbf{A})$. Alkalmazzuk a 12.6. tételt.)

12.6. Az előző feladat eredményét használva becsüljük meg az

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{és a} \quad \begin{bmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 6 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix spektrumát a $\mathbf{x} = (2, 1, 2)$ vektorral. Az eredmény alapján mit mondhatunk $\mathbf{x}$-ről?

Irreducibilis mátrixok

12.7. Melyik irreducibilis az alábbi mátrixok közül? Amelyik nem, azt melyik permutációs mátrix viszi $\left[\begin{smallmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{C} \end{smallmatrix}\right]$ alakba? Amelyik irreducibilis, annak mennyi a spektrálsugara és Perron-vektora?

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

12.8. Keressünk egy-egy permutációs mátrixot az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixok mindegyikéhez, mely bizonyítja reducibilitásukat!

Sztochasztikus mátrixok

A nemnegatív mátrixok legfontosabb példái a sztochasztikus mátrixok, melyek minden sora vagy minden oszlopa valószínűségeloszlás.

Markov-láncok, sztochasztikus mátrixok A nemnegatív vektort *sztochasztikusnak* nevezzük, ha koordinátáinak összege 1 (azaz 1-normája 1). A nemnegatív $\mathbf{A}$ mátrix *sztochasztikus*, ha minden oszlopvektora sztochasztikus.

► A sztochasztikus $\mathbf{A}$ mátrixot bármely sztochasztikus $\mathbf{v}$ vektorral szorozva sztochasztikus vektort kapunk, ugyanis ha $\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{v}$, akkor

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j = \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} v_j = 1.$$

► Az előző megjegyzés azonnali következménye, hogy sztochasztikus mátrixok szorzata sztochasztikus mátrix.
► Az $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor sztochasztikus, ha $\mathbf{A}^\mathsf{T}$-nak az $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$ vektor a sajátvektora 1 sajátértékkel.
► Másként fogalmazva az $\mathbf{A}$ pontosan akkor sztochasztikus mátrix, ha az $\mathbf{1}^\mathsf{T}$ vektor bal sajátvektora az 1 sajátértékkel.
► Mivel az 1 sajátértékhez pozitív sajátvektor tartozik, ezért 1 a spektrálsugár, azaz $\rho(\mathbf{A}) = 1$.

12.13. TÉTEL (SZTOCHASZTIKUS MÁTRIX SAJÁTÉRTÉKEI). *Ha* $\mathbf{S}$ *sztochasztikus mátrix, akkor*
1. $\lambda = 1$ *egy sajátérték,*
2. *a spektrálsugara* 1, *és*
3. *ha* $\mathbf{S}$ *primitív, akkor* $\lambda \neq 1$ *esetén* $|\lambda| < 1$.

Duplán sztochasztikus mátrixok Az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nemnegatív mátrixot duplán sztochasztikusnak nevezzük, ha minden oszlop- és sorösszege 1.

► Mivel a duplán sztochasztikus mátrixok sztochasztikusak, ezért a sztochasztikusokra kimondott állítások rájuk is teljesülnek.
► Duplán sztochasztikus mátrixok szorzata is duplán sztochasztikus. (Ennek egyik felét beláttuk a sztochasztikus mátrixoknál, a másik fele transzponálással bizonyítható.)
► Minden permutációmátrix duplán sztochasztikus.
► Ha $\mathbf{U} = [u_{ij}]$ unitér, akkor az $\mathbf{A} = \left[|u_{ij}|^2\right]$ mátrix duplán sztochasztikus, ugyanis $\sum_{i=1}^{n} |u_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^{n} |u_{ij}|^2 = 1$.

► Duplán sztochasztikus mátrixok konvex lineáris kombinációja is duplán sztochasztikus, azaz ha $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2, \dots$, $\mathbf{S}_k$ duplán sztochasztikusak, a c_1, $c_2, \dots$, c_k számok nemnegatívak és $c_1 + c_2 + \dots + c_k = 1$, akkor $\sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{S}_i$ is duplán sztochasztikus. Például permutációmátrixok konvex lineáris kombinációi duplán sztochasztikusak.

12.14. TÉTEL (FROBENIUS–KŐNIG-TÉTEL). *Az n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrixban pontosan akkor eleme minden kígyónak a 0, ha $\mathbf{A}$ részmátrixai közt van olyan $s \times t$ méretű zérusmátrix, hogy $s + t = n + 1$.*

12.15. KÖVETKEZMÉNY (POZITÍV KÍGYÓ). *Minden duplán sztochasztikus mátrixban van legalább egy kígyó, melynek minden eleme pozitív.*

BIZONYÍTÁS. Ha a mátrixban nem volna pozitív elemű kígyó, akkor volna benne olyan $s \times t$ méretű zérus részmátrix, amelyre $s + t = n + 1$. E sorokban és oszlopokban szereplő elemek összege $n + 1$ volna, pedig a mátrixban szereplő összes elem összege n. Ez az ellentmondás igazolja állításunkat. □

12.16. TÉTEL (BIRKHOFF-TÉTEL). *Minden n-edrendű duplán sztochasztikus mátrix előáll permutációmátrixok konvex lineáris kombinációjaként.*

► A tétel elegánsabban úgy is megfogalmazható, hogy a duplán sztochasztikus mátrixok az $\mathbb{R}^{n \times n}$ térben olyan konvex poliédert alkotnak, melynek csúcsai a permutációmátrixok.

BIZONYÍTÁS. Bebizonyítjuk, hogy ha $\mathbf{S}$ duplán sztochasztikus, akkor léteznek olyan $c_i \in \mathbb{R}^+$ számok és olyan $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ permutációmátrixok ($i = 1, 2, \dots, k$), hogy $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{P}_i$. Az $\mathbf{S}$ mátrix pozitív elemeinek m számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk.

Az állítás $m = n$ esetén igaz, hisz ekkor $\mathbf{S}$ szükségképpen permutációmátrix. Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden m pozitív elemet tartalmazó mátrixra, és legyen $\mathbf{S}$-nek $m + 1$ pozitív eleme. Mivel $\mathbf{S}$ duplán sztochasztikus, kiválasztható belőle egy pozitív kígyó. A kígyó legkisebb elemét jelölje a, a kígyó elemeinek helyére 1-es írásával kapott permutációmátrixot pedig $\mathbf{P}$. Ekkor $a\mathbf{P} \leqslant \mathbf{S}$, így $\mathbf{S} - a\mathbf{P}$ nemnegatív. Mivel $a < 1$, ezért értelmes a következő felbontás:

$$\mathbf{S} = a\mathbf{P} + (1 - a) \left[\frac{1}{1 - a} (\mathbf{S} - a\mathbf{P}) \right].$$

Az $\frac{1}{1-a}(\mathbf{S} - a\mathbf{P})$ mátrix duplán sztochasztikus és legalább eggyel kevesebb pozitív eleme van, mint $\mathbf{S}$-nek, ezért az indukciós feltevés szerint felírható $c'_2 \mathbf{P}_2 + \dots + c'_m \mathbf{P}_m$ alakban, ahol $c'_2 + \dots + c'_m = 1$. Ekkor viszont $a + (1 - a)(c'_2 + \dots + c'_m) = 1$, tehát az így kapott felbontás valóban konvex lineáris kombináció. □

A Leontief-modell A Leontief-modell egy többszektoros gazdaság szektorok közti termék és jövedelemáramlási adatait elemzi egyszerű statisztikai adatok alapján. Tömören összefoglaljuk a modell statikus változatának lényegét. Osszuk a gazdaságot n szektorra (pl. ipar, mezőgazdaság, háztartás). Jelölje r_{ij} – az ún. *ráfordítási együttható* – azt, hogy a j-edik szektor egy (pénz)egységnyi kibocsátásához mennyi szükséges az i szektortól. A ráfordítási együtthatók $\mathbf{R}$ mátrixáról feltehető, hogy nem szinguláris, különben valamely ágazat kibocsátása helyettesíthető lenne más ágazatok kibocsátásainak valamely lineáris kombinációjával. Egy gazdaságot zártnak nevezünk, ha kielégíti saját szükségleteit, és fel is használja minden kibocsátását, más szóval termék se ki, se be nem megy a rendszerbe. Jelölje k_j az j-edik szektor kibocsátását. Ekkor $r_{ij}k_j$ az i-edik szektor által a j-edik számára kibocsátott egységek számát, ezek $r_{i1}k_1 + r_{i2}k_2 + \ldots + r_{in}k_n$ összege pedig az i-edik szektor teljes kibocsát adja, ami feltételeink szerint megegyezik k_i-vel. Tehát a $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ jelöléssel az összes ágazat kibocsátására igaz az

$$\mathbf{Rk} = \mathbf{k} \tag{12.7}$$

összefüggés. Ebből az is azonnal látszik, hogy $\mathbf{k}$ az $\mathbf{R}$ mátrix 1 sajátértékhez tartozó sajátvektora.

12.17. PÉLDA (LEONTIEF ZÁRT MODELL). *Egy távoli sziget gazdaságában három nagy ágazat van, áramszolgáltatás (A), élelmiszeripar (B) és szolgáltatóipar (C). A sziget gazdasága zártnak tekinthető. Mit állapíthatunk meg az ágazatok kibocsátásáról, ha az alábbi táblázat oszlopai azt mutatják, hogy egy egységnyi kibocsátáshoz hány egységre van szükség a szektoroktól.*

	A	*B*	*C*
A	*0.1*	*0.6*	*0.1*
B	*0.8*	*0.1*	*0.4*
C	*0.1*	*0.3*	*0.5*

MEGOLDÁS. A kibocsátás meghatározása egyszerű sajátértékfeladat, hisz $\mathbf{Rk} = \mathbf{k}$. Az

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0.8 & 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

mátrix 1 sajátértékhez tartozó sajátvektora $(3, 4, 3)t$, ahol $t \in \mathbb{R}$. Eszerint a sziget gazdaságának teljes kibocsájtásából az áramszolgáltatás 30%-kal, az élelmiszeripar 40%-kal, a szolgáltatóipar 30%-kal részesedik. □

A zárt modellel ellentétben a valóságban minden ágazatnak számolnia kell olyan külső kívánság (kereslet vagy követelés) jelenlétével, amit a gazdaságnak teljesítenie kell. Ennek értékét az i-edik ágazatra jelölje d_i, ezek vektorát $\mathbf{d}$. E vektor tehát tekinthető a nettó kibocsátás vektorának, hisz

$$d_i = k_i - (r_{i1}k_1 + r_{i2}k_2 + \ldots r_{in}k_n),$$

ami az összes ágazatra mátrix alakban $\mathbf{d} = \mathbf{k} - \mathbf{Rk} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{k}$. Kérdés, mi biztosítja azt, hogy $\mathbf{I} - \mathbf{R}$ invertálható, és $(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}\mathbf{d} > \mathbf{0}$ legyen. Két természetesnek tekinthető feltevéssel élünk:

- az ágazatok mendegyike, ha más ágazatokon keresztül is, de hat a többire,
- van olyan ágazat, mely egy (pénz)egységnyi kibocsátásához egy egységnél kevesebbet használ föl, azaz van $\mathbf{R}$-nek olyan oszlopösszege, mely 1-nél kisebb.

Az első feltevés azt jelenti, hogy bármely i és j ágazatpárra valamely m kitevőre $[\mathbf{R}^m]_{ij} > 0$, azaz $\mathbf{R}$ irreducibilis. (Sőt, mivel mindig akadnak ágazatok, melyek saját magukra is visszahatnak, ezért az is feltehető, hogy $\mathbf{R}$ primitív.)

A második feltevés következménye, hogy van olyan nem zésrus $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$ mátrix, hogy $\mathbf{R} + \mathbf{A}$ sztochasztikus, vagyis minden oszlopösszege 1, azaz $\mathbf{1}^\mathsf{T}(\mathbf{R} + \mathbf{A}) = \mathbf{1}^\mathsf{T}$. Ebből következik, hogy $\rho(\mathbf{R}) < 1$. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\rho(\mathbf{R}) = 1$ és legyen $\mathbf{R}$ Perron-vektora $\mathbf{p}$. $\mathbf{p} > \mathbf{0}$, mivel $\mathbf{R}$ nemnegatív és irreducibilis. $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$ és $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ miatt $\mathbf{Ap} > \mathbf{0}$, így

$$1 = \mathbf{1}^\mathsf{T}\mathbf{p} = (\mathbf{1}^\mathsf{T}(\mathbf{R} + \mathbf{A}))\mathbf{p} = 1 + \mathbf{1}^\mathsf{T}\mathbf{Ap} > 1,$$

és ez az ellentmondás igazolja, hogy $\rho(\mathbf{R}) < 1$. Ebből a ??? tételt fölhasználva kapjuk, hogy

$$(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{R} + \mathbf{R}^2 + \mathbf{R}^3 + \ldots > \mathbf{O}.$$

Így minden $\mathbf{d}$ kívánságvektorhoz egyértelműen létezik egy pozitív $\mathbf{k}$ kibocsátás, nevezetesen $\mathbf{k} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}\mathbf{d} > \mathbf{0}$. E modellben ez azt jelenti, hogy bármely szektort érintő külső kívánság növekedése az összes ágazat kibocsájtását megnöveli.

12.18. példa (Leontief nyílt modell). *Az előző feladatbeli szigeten a három szektor ráfordítási együtthatóinak mátrixa legyen*

	A	*B*	*C*
A	*0.1*	*0.6*	*0.1*
B	*0.7*	*0.1*	*0.3*
C	*0.1*	*0.2*	*0.5*

Mekkora a kibocsátás, ha a külső kereslet vektora $\mathbf{d} = (26, 31, 22)$, *és hogyan változik a kibocsátás, ha a B szektorban a külső kereslet* 31*-ről* 36*-ra növekszik?*

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{R}$ spektrálsugara 0.9 (ez azonnal adódik abból, hogy minden oszlopösszeg 0.9).

$$\mathbf{k} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3.9 & 3.2 & 2.7 \\ 3.8 & 4.4 & 3.4 \\ 2.3 & 2.4 & 3.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26 \\ 31 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 260 \\ 310 \\ 220 \end{bmatrix}.$$

A B szektor növekvő külső kereslete minden szektorban a kibocsátás növekedését eredményezi:

$$\mathbf{k} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3.9 & 3.2 & 2.7 \\ 3.8 & 4.4 & 3.4 \\ 2.3 & 2.4 & 3.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26 \\ 36 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 276 \\ 332 \\ 232 \end{bmatrix}.$$ □

Megoldások

12.1. Sajátértékek: 10, 3, 3, jobb sajátvektor: $\mathbf{u} = (5, 9, 11)$, bal sajátvektor: $\mathbf{v} = (4, 2, 1)$, a két Perron-vektor: $\mathbf{p} = \frac{1}{25}(5, 9, 11)$, bal sajátvektor: $\mathbf{v} = \frac{1}{7}(4, 2, 1)$.

12.2. A spektrálsugár még nincs a sajátértékek közt, így Perron tétele miatt csak a 3 és a 4 lehet sajátérték.

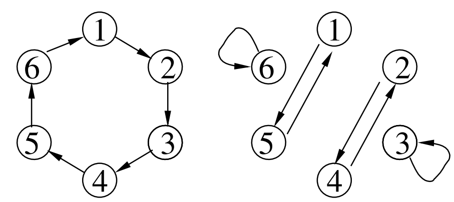
12.3. Ha $\mathbf{A}$ minden sorösszege c, akkor az $\mathbf{1}$ vektor sajátvektor, c sajátértékkel. Mivel $\mathbf{1} > \mathbf{0}$, ezért ez csak a Perron-vektor n-szerese lehet, és akkor c a hozzá tartozó sajátérték, így c a spektrálsugár. Hasonlóképp a bal Perron-vektor a másik állítást is igazolja.

12.4. Mivel a $\min\{5/4, 6/6, 7/5\} = 1$, ezért a Collatz–Wielandt-tétel szerint spektrálsugara is legalább ennyi. (Vagy a tételbeli másik képlettel: mivel a $c(4, 6, 5) \leqslant \mathbf{A} \cdot (4, 6, 5) = (5, 6, 7)$ egyenlőtlenségben c lehetséges maximuma 1, ezért a spektrálsugár legalább 1.)

12.5. Mivel $\mathbf{D}^{-1} = \operatorname{diag}(1/x_1, \dots, 1/x_n)$, ezért követve az ötletben leírtakat, a 12.6. tétel első képlete a feladat első képletét adja. A $\mathbf{DAD}^{-1}$ mátrixból a második képletet kapjuk.

12.6. A 12.5. feladat első képlete az első, a második képlete a második mátrixról azt adja, hogy a minimum és a maximum is 10, így a spektrálsugár 10, tehát 10 a domináns sajátérték mindkét esetben, és $\mathbf{x}$ a hozzá tartozó sajátvektor – az első esetben a jobb, a másodikban a bal. (Gondoljuk meg!)

12.7. Az irreducibilitás eldönthető a mátrixokhoz rendelt szomszédsági gráfokkal:



$\mathbf{R}_1$ irreducibilis, mert a gráf erősen összefüggő, azaz bármely csúcsból bármely másikba el lehet jutni irányított úton. $\mathbf{R}_2$ reducibilis, hisz például nem indul irányított él a következő halmazokból a komplementerükbe: $\{6\}$, $\{3\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 4\}$, $\{1, 5, 6\}$, $\{2, 3, 4\}, \dots$. Így igen sok olyan $\mathbf{P}$ permutációs mátrix van, amelyik $\mathbf{R}_2$-t a kívánt alakba viszi. Közülük legegyszerűbb az identikus mátrix, hisz $\mathbf{R}_2$ már a kívánt alakú:

$$\mathbf{I}\mathbf{R}_2\mathbf{I}^\mathsf{T} = \mathbf{R}_2 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

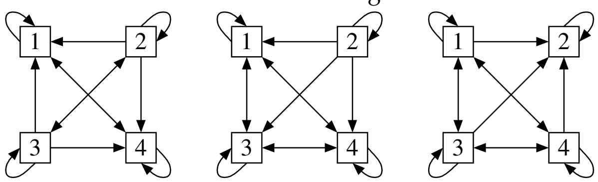
Az $\mathbf{R}_1$ mátrixnak nyilvánvalóan sajátvektora a $\mathbf{p} = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$ vektor az 1 sajátértékkel. Mivel $\mathbf{R}_1$ nemnegatív és irreducibilis, ezért a Frobenius–Perron-tétel szerint a spektrálsugárhoz, mint sajátértékhez tartozó sajátvektor az egyetlen sajátvektor, mely pozitív elemű. Ebből következik, hogy a spektrálsugár 1.

Másik megoldás a feladat második részére:

$$\det(\mathbf{R}_1 - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^6 - 1$$

A karakterisztikus polinom gyökei a hatodik egységgyökök, melyek az 1-sugarú körön vannak, tehát 1 a spektrálsugár. A spektrálsugár valóban sajátérték, és a $\lambda = 1$-hez tartozó sajátvektor $\mathbf{p} = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

12.8. A három mátrixhoz az alábbi gráfok tartoznak:



Ennek alapján az első gráfban az $\{1, 4\}$, a másodikban az $\{1, 3, 4\}$, a harmadikban a $\{2\}$ halmazból nem érhető el a többi pont. A pontoknak egy olyan átsorszámozását keressük, melyben e pontok a többi után következnek, ugyanis általában, ha az $\{1, 2, \ldots, k, k+1, \ldots, n\}$ csúcshalmazban az első k pontba nem fut él a $\{k+1, \ldots, n\}$ halmazból, akkor a szomszédsági mátrix $\left[\begin{smallmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Z} \end{smallmatrix}\right]$ alakú lesz. Az első gráfban például a 3-2-1-4 sorrend jó, hisz az $\{1, 4\}$ halmaz elemei vannak hátul, amit a $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ permutáció megvalósít:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

A második esetben például jó a 2-1-3-4 sorrend, hisz az $\{1, 3, 4\}$ halmaz elemei vannak hátul, amit a $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ permutáció megvalósít:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Végül a harmadik mátrixnál jó az 1-4-3-2 sorrend, így a 2 elem van hátul, amit az $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ permutáció megvalósít:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

A balról szorzó permutációmátrix az egységmátrixból a megadott permutáció sorokra való alkalmazásával, míg a jobbról szorzó mátrix az oszlopokra való alkalmazásával lett meghatározva.

IV. rész

Kitekintő

A geometriai vagy fizikai motivációjú 2- és 3-dimenziós vektoroktól indulva az $\mathbb{R}^n$ és $\mathbb{C}^n$ vektoraival való számoláson keresztül az absztrakció magasabb szintjére jutottunk, a vektortér általános fogalmához. Az absztrakció e szintje kaput nyit a matematika egyéb területei felé. E kitekintő rész további fejezetei a lineáris algebrai alapú alkalmazások közül nyújt egy széles spektrumú válogatást.

Leaf Points (CC) on flickr by Steve Jurvetson

13
Terek

A vektorok összeadása és skalárral szorzása olyan algebrai tulajdonságokkal rendelekezik, melyekkel nem csak a vektoroknál találkozunk, hanem a matematika más területein is.

Testek, gyűrűk

Számolunk, mint a valós számokkal, vagy mint az egészekkel.

Test Az algebrai absztrakció lényege, hogy ha egy állítás igazolásához csak bizonyos műveleti tulajdonságokat használunk, akkor az állítás minden olyan struktúrában is igaz lesz, amely rendelkezik e műveleti tulajdonságokkal. Így született a racionális, valós, és komplex számok, valamint a prímmel való osztás maradékaival való számolás közös tulajdonságaiból az algebrai test fogalma.

13.1. DEFINÍCIÓ (TEST). *Egy legalább kételemű* $\mathbb{F}$ *halmazt* testnek *vagy* algebrai testnek *nevezünk, ha*

1. *értelmezve van* $\mathbb{F}$ *elempárjain egy összeadás és egy szorzás nevű* bináris művelet*,*
2. *az* összeadás *kommutatív, asszociatív, létezik nullelem és minden elemnek létezik ellentettje (additív inverze),*
3. *a* szorzás *kommutatív, asszociatív, létezik egységelem és a nullelemen kívül minden elemnek létezik multiplikatív inverze (reciproka),*
4. *az összeadás a szorzásra nézve disztributív.*

Formalizálva a fenti definíciót, egy test a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

a) Bármely $a, b \in \mathbb{F}$ elemre $a + b \in \mathbb{F}$ ($\mathbb{F}$ zárt az összeadásra).
b) Bármely $a, b \in \mathbb{F}$ elemre $a + b = b + a$ (kommutatív).
c) Bármely $a, b, c \in \mathbb{F}$ elemre $(a + b) + c = a + (b + c)$ (asszociatív).
d) Van olyan $\mathbb{F}$-beli elem, jelölje 0, hogy bármely $a \in \mathbb{F}$-re $0 + a = a$ (zéruselem).

e) Bármely $a \in \mathbb{F}$ elemhez van olyan $b \in \mathbb{F}$, hogy $a + b = 0$ (additív inverz).
f) Bármely $a, b \in \mathbb{F}$ elemre $ab \in \mathbb{F}$ ($\mathbb{F}$ zárt az szorzásra).
g) Bármely $a, b \in \mathbb{F}$ elemre $ab = ba$ (kommutatív).
h) Bármely $a, b, c \in \mathbb{F}$ elemre $(ab)c = a(bc)$ (asszociatív).
i) Van olyan $\mathbb{F}$-beli elem, jelölje 1, hogy bármely $a \in \mathbb{F}$ elemre $1a = a$ (egységelem).
j) Bármely $a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ (tehát bármely nem nulla) elemhez van olyan $b \in \mathbb{F}$, hogy $ab = 1$ (multiplikatív inverz).
k) Bármely $a, b, c \in \mathbb{F}$ elemre $(a + b)c = ac + bc$ (disztributivitás).

Az összeadás tulajdonságai az *a)-e)*, a szorzáséi az *f)-j)* pontban vannak, *k)* a két művelet közös tulajdonsága.

Néhány megjegyzés és néhány példa:

► Meg lehet mutatni, hogy a nullelem és az egységelem szükségképpen különböző, tehát jogosan jelöltük őket különböző jellel.
► Minden test tetszőleges a elemére igaz, hogy $0a = a0 = 0$.
► Testre példa a valós számok $\mathbb{R}$, a racionális számok $\mathbb{Q}$, a komplex számok $\mathbb{C}$, a prím modulusú maradékosztályok $\mathbb{Z}_p$ struktúrája, ami egy véges, p-elemű test (szokásos jelölései még: $\mathbb{F}_p$, $\mathrm{GF}(p)$).

Bár leggyakrabban test elemeiből képzett determinánsokkal számolunk, de láttuk, hogy a determináns kiszámolásához nincs szükség osztásra, azaz nem szükséges, hogy a determináns elemei egy testből valók legyenek, gyengébb struktúra is megteszi.

Gyűrű A test axiómái közül néhány elhagyásával gyakran használt és fontos struktúrákhoz jutunk. Ha a szorzás csak asszociatív, *gyűrűről* beszélünk, ha kommutatív is, *kommutatív gyűrűről*, ha az asszociativitás mellett van egységeleme is, *egységelemes gyűrűről* beszélünk.

Ha a testet definiáló kikötések közül elhagyjuk a *j)*-t, egységelemes kommutatív gyűrűt kapunk, ha az *i)*-t is, kommutatív gyűrűt, ha a *g)*-t is, gyűrűt.

► Definíció szerint minden test gyűrű, sőt egységelemes kommutatív gyűrű.
► Ha egy gyűrűben $0 = 1$, akkor a gyűrűnek csak egyetlen eleme van. E gyűrűt *zérógyűrűnek* nevezzük.
► A nullelem, az egységelem és minden elem additív inverze egyértelmű.
► Bármely a elemre $0a = a0 = 0$ és $(-1)a = -a$.
► A természetes számok $\mathbb{N}$ halmaza nem gyűrű a szokásos műveletekkel, mert nincs minden elemnek ellentettje (a -1 nem természetes szám).
► A páros számok kommutatív gyűrűt alkotnak, de ez a gyűrű nem egységelemes.

► A $\mathbb{Z}$ egységelemes kommutatív gyűrű, de nem test, mert nincs minden nemnulla elemnek multiplikatív inverze (az $1/5$ nem egész).

► A $\mathbb{Z}_m$ egységelemes kommutatív gyűrű, és pontosan akkor test, ha m prím.

► A valós együtthatós polinomok egységelemes kommutatív gyűrűt alkotnak. Általában, ha R egy gyűrű, akkor az R-együtthatós polinomok gyűrűt alkotnak, amit $R[x]$ jelöl.

► Az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények egységelemes kommutatív gyűrűt alkotnak, ha a két művelet a függvények szokásos összeadása és szorzása. Ugyanígy egységelemes kommutatív gyűrűt alkotnak pl. a $[0,1]$ intervallumon értelmezett függvények, valamint a $[0,1]$ intervallumon értelmezett folytonos függvények.

► A végtelen sorozatok az elemenkénti összeadás és szorzás műveletére nézve egységelemes kommutatív gyűrűt alkotnak.

*Egyműveletes struktúrák** A test és gyűrű definícióijában két művelet szerepel. Így e definíciók megadhatók két egyműveletes struktúra segítségével is.

Egy nem üres S halmaz egy minden elempárjára értelmezett bináris művelettel *félcsoport*, ha e művelet asszociatív. Ha az elemek közt van egy semleges elem (multiplikatív írásmód esetén egységelem, additív esetben zéruselem), melyre nézve minden elemnek van inverze, akkor *csoportról* beszélünk. Ha pedig e művelet még kommutatív is, *kommutatív csoportról*, *ábel csoportról* vagy *Abel-csoportól* beszélünk. Félcsoport és csoport esetén a műveletet gyakran a szorzásjellel, ábel csoport esetén összeadásjellel jelöljük.

Egy tetszőleges halmaz önmagába való leképezései félcsoportot, míg önmagára való bijekciói csoportot alkotnak. Előbbit transzformációfélcsoportnak, utóbbit transzformációcsoportnak nevezzük. Ha a halmaz véges, e bijekciók a halmaz permutációi, ekkor permutációcsoportról beszélünk.

13.1. táblázat: Algebrai struktúrák

	félcsoport	csoport	ábel-csoport	gyűrű	egységelemes gyűrű	kommutatív gyűrű	egységelemes komm. gyűrű	test
összeadás								
• kommutatívás			✓	✓	✓	✓	✓	✓
• asszociatívás			✓	✓	✓	✓	✓	✓
• nullelem			✓	✓	✓	✓	✓	✓
• additív inverz			✓	✓	✓	✓	✓	✓
szorzás								
• kommutatívás						✓	✓	✓
• asszociatívás	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓
• egységelem		✓			✓		✓	✓
• multiplikatív inverz		✓						✓
összeadás és szorzás								
• disztributivitás				✓	✓	✓	✓	✓

Feladatok

Testek, gyűrűk

13.1. a elemre $0a = a0 = 0$ és $(-1)a = -a$

Mutassuk meg, hogy bármely gyűrűben (és így bármely testben is) a nullelem és az egységelem különböző!

13.2. Mutassuk meg, hogy ha egy gyűrűben $0 = 1$, akkor a gyűrűnek csak egyetlen elem van.

13.3. PÉLDA EGY TESTRE Jelölje $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ az összes $a + b\sqrt{2}$ alakú számok halmazát, ahol a és b racionális számok, azaz $a, b \in \mathbb{Q}$. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ a szokásos összeadás és szorzás műveletekkel testet alkot.

13.4.* NÉGYZETES MÁTRIXOK GYŰRŰJE Mutassuk meg, hogy ha $\mathbb{F}$ test, akkor $\mathbb{F}^{n\times n}$ elemei, azaz az $\mathbb{F}$ fölötti $n \times n$-es mátrixok a szokásos mátrixműveletekkel egységelemes gyűrűt alkotnak.

Vektortér

A valós számokhoz hasonlóan egy $\mathbb{F}$ test elemeiből képzett rendezett n-esek halmazán, azaz a $\mathbb{F}$ test feletti n-dimenziós vektorok $\mathbb{F}^n$ halmazán bevezethetünk két műveletet, a vektorösszeadás és az $\mathbb{F}$ elemeivel való szorzás műveletét. Az így kapott struktúrára, mint az $\mathbb{F}^n$ vektortérre fogunk hivatkozni.

Amikor valamilyen objektumokat össze tudunk adni, és valamely test elemeivel szorozni, algebrailag az $\mathbb{F}^n$-hez hasonló struktúrájához juthatunk. Ezt fogalmazzuk meg pontosabban a következőkben.

13.2. DEFINÍCIÓ (). *Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{V}$ halmaz az $\mathbb{F}$ test fölötti* vektortér, *ha értelmezve van rajta két művelet, egy (vektor)összeadásnak nevezett*

$$\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}; (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{y},$$

és egy skalárral való szorzásnak nevezett

$$\mathbb{F} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}; (c, \mathbf{x}) \mapsto c\mathbf{x}$$

művelet, melyek kielégítik a következő feltételeket:

a) *Bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ vektorra $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (kommutatív).*
b) *Bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{V}$ vektorra $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ (asszociatív).*
c) *Van olyan $\mathcal{V}$-beli elem, jelölje $\mathbf{0}$, hogy bármely $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$-re $\mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ (zéruselem).*
d) *Bármely $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ elemhez van olyan $\mathbf{y} \in \mathcal{V}$, hogy $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$ (additív inverz).*
e) *Bármely $c, d \in \mathbb{F}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ esetén $(cd)\mathbf{x} = c(d\mathbf{x})$ (szorzások kompatibilitása).*
f) *Bármely $\mathbf{x}\mathcal{V}$ esetén $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ (egységelemmel szorzás).*
g) *Bármely $c, d \in \mathbb{F}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ esetén $(c + d)\mathbf{x} = c\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ (disztributivitás).*
h) *Bármely $c \in \mathbb{F}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ esetén $x(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = c\mathbf{x} + c\mathbf{y}$ (disztributivitás).*

13.3. ÁLLÍTÁS (VEKTORTÉR ALAPTULAJDONSÁGAI).

a) *Minden vektortérnek egyetlen zéruseleme van.*
b) *Minden $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ vekornak egyetlen additív inverze van. Ezt $-\mathbf{x}$ jelöli, és $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x}$.*
c) *Ha $c \in \mathbb{F}$ és $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$, akkor $c\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pontosan akkor áll fenn, ha $c = 0$ vagy $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*
d) *Ha valamely $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{V}$ vektorokra $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z}$, akkor $\mathbf{y} = \mathbf{z}$.*

▶ Az $\mathbb{F}^n$ a szokásos összeadással és skaláris szorzással $\mathbb{F}$ fölötti vektortér.

▶ Az $\mathbb{F}$ elemeiből képzett végtelen $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ sorozatok halmaza vektortér.

▶ Ha $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, akkor valós, ha $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, akkor komplex vektortérről beszélünk.

- Az $\mathbb{F}$ test fölötti ($\mathbb{F}$-beli együtthatós) egyváltozós polinomok $\mathbb{F}[x]$ halmaza vektortér. E vektortérben az azonosan zéruspolinom a nullelem, és minden $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ polinom additív inverze (ellentettje) a $-p(x)$ polinom.
- Ugyancsak vektortér az n-nél kisebb fokú polinomok $\mathbb{F}[x]_n$ halmaza.
- Ha X egy tetszőleges halmaz, és $\mathbb{F}$ egy test, akkor az összes $X \to \mathbb{F}$ függvények $\mathbb{F}^X$-szel jelölt halmaza $\mathbb{F}$ fölötti vektortér. A vektorműveletek a szokásos függvények közti műveletekkel egyeznek meg, azaz $f, g \in \mathbb{F}^X$, $c \in \mathbb{F}$ esetén az $f + g$ és cf függvényeket az $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(cf)(x) = cf(x)$ egyenlőségek definiálják, ahol x végigfut X összes elemén.
- Ha X egy $\mathbb{R}$-beli nem üres halmaz, akkor az X-en értelmezett folytonos függvények $\mathcal{C}(X)$, illetve az X-en differenciálható függvények $\mathcal{D}(X)$ halmaza vektortér. Ugyancsak vektorteret kapunk, ha $X \subseteq R^n$, vagy ha valós helyett komplex függvényeket tekintünk a nem üres $X \subseteq \mathbb{C}^n$ halmazon.
- Egy vektortér bármely altere vektortér.
- Az $\mathbb{R}$ ugyan részteste $\mathbb{C}$-nek, de $\mathbb{R}^n$ nem altere a $\mathbb{C}^n$ vektortérnek.
-
-
-

Modulus

A $\mathbb{Z}$ gyűrű elemeiből képzett n-dimenziós vektorok $\mathbb{Z}^n$ halmazából a vektorok összeadásának és $\mathbb{Z}$-beli skalárral való szorzásának művelete nem vezet ki. E struktúra neve *modulus*.

14
Mátrixegyenletek és -egyenlőtlenségek

Lineáris mátrixegyenletek

14.1. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS MÁTRIXEGYENLET). *Lineáris mátrixegyenletnek nevezzük a*

$$\sum_{i=1}^{k} \mathbf{A}_i \mathbf{X} \mathbf{B}_i = \mathbf{C}, \tag{14.1}$$

ahol $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{p\times q}$, $\mathbf{A}_i \in \mathbb{C}^{p\times m}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathbf{B}_i \in \mathbb{C}^{n\times q}$.

E mátrixegyenletek egyes speciális típusainak fontosságuk okán külön nevük van:

a) *Sylvester-egyenlet*:

$$\mathbf{AX} + \mathbf{XB} = \mathbf{C}, \tag{14.2}$$

ahol $\mathbf{C}, \mathbf{X} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

b) *Általánosított Sylvester-egyenlet*Sylvester-egyenlet!általánosított

$$\mathbf{A}_1\mathbf{X}\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{X}\mathbf{B}_2 = \mathbf{C}, \tag{14.3}$$

a (14.1) speciális esete $k = 2$ esetére.

c) *Ljapunov-egyenlet* a Sylvester-egyenlet speciális esete akkor, ha $m = n$, $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathsf{H}}$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}^{\mathsf{H}}$, azaz

$$\mathbf{AX} + \mathbf{XA}^{\mathsf{H}} = \mathbf{C}. \tag{14.4}$$

14.2. ÁLLÍTÁS (A LINEÁRIS MÁTRIXEGYENLET MEGOLDÁSA). *A 14.1 lineáris mátrixegyenlet megoldható az*

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \mathbf{B}_i^{\mathsf{T}} \otimes \mathbf{A}_i\right) \mathbf{x} = \operatorname{vec}(\mathbf{C}) \tag{14.5}$$

lineáris egyenletrendszer segítségével, ahol az együtthatómátrix $(pq) \times (mn)$*-es méretű és* $\mathbf{x} = \operatorname{vec}(\mathbf{X})$.

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás a $\operatorname{vec}(\mathbf{AXB}) = (\mathbf{B}^{\mathsf{T}} \otimes \mathbf{A}) \operatorname{vec}(\mathbf{X})$ egyenlőségre épül, melyet a 4.14. tételben bizonyítottunk. □

► A gyakorlatban ennél gyorsabb algoritmusok is léteznek, melyek az $\mathbf{A}_i$ és $\mathbf{B}_i$ mátrixokat háromszögalakra vagy Hessenberg-alakra hozzák, és abból egy gyorsan megoldható egyenletrendszert kapnak (Bartels–Stewart-, Golub–Nash–Van Loan-algoritmusok).

14.3. PÉLDA (LINEÁRIS MÁTRIXEGYENLET MEGOLDÁSA). *Oldjuk meg az* $\mathbf{AX}+\mathbf{XB}=\mathbf{C}$ *és az* $\mathbf{AX}+\mathbf{XB}=\mathbf{D}$ *Sylvester-egyenleteket, ahol*

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix}3&7\\3&5\end{bmatrix},\ \mathbf{D}=\begin{bmatrix}1&0\\2&0\end{bmatrix}.$$

MEGOLDÁS. Mindkét egyenlet bal oldala $\mathbf{AXI}+\mathbf{IXB}$ alakú, így a megoldást nyújtó (14.5) egyenlet együtthatómátrixa

$$\mathbf{I}\otimes\mathbf{A}+\mathbf{B}^\mathsf{T}\otimes\mathbf{I}=\left[\begin{array}{cc|cc}0&1&0&0\\1&0&0&0\\\hline 0&0&0&1\\0&0&1&0\end{array}\right]+\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\hline 1&0&2&0\\0&1&0&2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|cc}1&1&0&0\\1&1&0&0\\\hline 1&0&2&1\\0&1&1&2\end{array}\right].$$

Így az $\mathbf{AX}+\mathbf{BX}=\mathbf{C}$ egyenletnek megfelelő bővített mátrix és annak redukált lépcsős alakja:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&3\\1&1&0&0&3\\1&0&2&1&7\\0&1&1&2&5\end{array}\right]\xrightarrow{\text{rref}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&3\\0&1&1&2&5\\0&0&1&1&3\end{array}\right].$$

Innen az egyenletrendszer megoldása

$$\mathbf{x}=\operatorname{vec}(\mathbf{X})=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix},\quad\text{azaz}\quad\mathbf{X}=\begin{bmatrix}1&3\\2&0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1&-2\\-2&1\end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{AX}+\mathbf{BX}=\mathbf{D}$ egyenletnek megfelelő bővített mátrix

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&1\\1&1&0&0&2\\1&0&2&1&0\\0&1&1&2&0\end{array}\right],$$

amelynek már az első két sorából látszik, hogy ez az egyenletrendszer ellentmondásos, így nincs megoldása. □

14.4. TÉTEL (A SYLVESTER-EGYENLET EGYÉRTELMŰ MEGOLDHATÓSÁGA). *A* 14.2 *Sylvester-egyenlet megoldását nyújtó*

$$\left(\mathbf{I}_n\otimes\mathbf{A}+\mathbf{B}^\mathsf{T}\otimes\mathbf{I}_m\right)\operatorname{vec}(\mathbf{X})=\operatorname{vec}(\mathbf{C})$$

egyenletrendszer $(mn) \times (mn)$-es együtthatómátrixa pontosan akkor invertálható, ha $\mathbf{A}$-nak és $-\mathbf{B}$-nek nincs közös sajátértéke.

Bizonyítás. A bizonyításhoz elég megmutatni, hogy ha

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}, \quad \sigma(\mathbf{B}) = \{\mu_1, \dots, \mu_n\},$$

akkor

$$\sigma\left(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} + \mathbf{B}^\mathsf{T} \otimes \mathbf{I}_m\right) = \{\lambda_i + \mu_j \mid i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n\}.$$

Ekkor ugyanis az $\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} + \mathbf{B}^\mathsf{T} \otimes \mathbf{I}_m$ mátrixnak a 0 nem lesz sajátértéke, azaz invertálható lesz, ha $\mathbf{A}$ és $-\mathbf{B}$ spektrumának metszete üres.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}^\mathsf{T}$ Jordan-felbontása

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{J}_\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{B}^\mathsf{T} = \mathbf{D}\mathbf{J}_\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} + \mathbf{B}^\mathsf{T} \otimes \mathbf{I}_m & \\
&= \mathbf{D}\mathbf{I}_n\mathbf{D}^{-1} \otimes \mathbf{C}\mathbf{J}_\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D}\mathbf{J}_\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \otimes \mathbf{C}\mathbf{I}_m\mathbf{C}^{-1} \\
&= (\mathbf{D} \otimes \mathbf{C})(\mathbf{I} \otimes \mathbf{J}_\mathbf{A})(\mathbf{D}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}) + (\mathbf{D} \otimes \mathbf{C})(\mathbf{J}_\mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_m)(\mathbf{D}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}) \\
&= (\mathbf{D} \otimes \mathbf{C})(\mathbf{I} \otimes \mathbf{J}_\mathbf{A} + \mathbf{J}_\mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_m)(\mathbf{D} \otimes \mathbf{C})^{-1}.
\end{aligned}$$

Mivel az $\mathbf{I} \otimes \mathbf{J}_\mathbf{A} + \mathbf{J}_\mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_m$ mátrix felsőháromszög-mátrix, így spektruma a főátló elemeiből áll, azok pedig valóban a $\{\lambda_i + \mu_j\}$ multihalmazt adják. Eszerint a hozzá hasonló $\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} + \mathbf{B}^\mathsf{T} \otimes \mathbf{I}_m$ mátrixnak ugyanez a spektruma. □

14.5. példa (Sylvester-egyenlet egyértelmű megoldhatósága). *Megoldható-e egyértelműen az $\mathbf{AX} + \mathbf{XB} = \mathbf{C}$ mátrixegyenlet a 14.3. feladatbeli $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ és $\mathbf{B} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ mátrixok esetén?*

Megoldás. A 14.4. tétel szerinti spektrumok

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{1, -1\}, \quad \sigma(-\mathbf{B}) = \{-1, -2\},$$

melyek metszete nem üres, így az $\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{A} + \mathbf{B}^\mathsf{T} \otimes \mathbf{I}_2$ mátrix nem invertálható, tehát az $\mathbf{AX} + \mathbf{XB} = \mathbf{C}$ mátrixegyenletnek vagy végtelen sok megoldása van, vagy ellentmondásos (ld. a 14.3. feladatot). □

A
Függelék

B

Lineáris algebra dióhéjban

Ebben a fejezetben egybe gyűjtünk olyan eredményeket, melyek a könyvben más-más fejezetekben elszórva szerepelnek.

2.1. TÉTEL (MÁTRIX RANGJA). *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy* $m \times n$*-es mátrix, és jelölje* A *a hozzá tartozó* $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ *leképezést. A következő számok mind megegyeznek.*

a) $\mathrm{r}(\mathbf{A})$,

b) *a főelemek száma az* $\mathbf{A}$ *bármelyik lépcsős alakjában,*

c) *a nemnulla sorok száma az* $\mathbf{A}$ *bármelyik lépcsős alakjában,*

d) *az* $\mathbf{A}$ *bázisoszlopainak (főoszlopainak) száma,*

e) *az* $\mathbf{A}$ *oszlopaiból kiválasztható maximális lineárisan független vektorrendszer elemszáma,*

f) *az* $\mathbf{A}$ *soraiból kiválasztható maximális lineárisan független vektorrendszer elemszáma,*

g) *az* $\mathbf{A}$ *oszlopterének dimenziója, azaz* $\dim(\mathcal{O}(\mathbf{A}))$,

h) *az* $\mathbf{A}$ *sorterének dimenziója, azaz* $\dim(\mathcal{S}(\mathbf{A}))$,

i) $n - \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A}))$,

j) $m - \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A}^T))$,

k) *az* A *leképezés képterének dimenziója, azaz* $\dim(\mathrm{Im}(A))$,

l) $n - \dim(\mathrm{Ker}(A))$,

m) *az* $\mathbf{A}$*-ból kiválasztható legnagyobb méretű nemnulla értékű aldetermináns rendje,*

n) *az* $\mathbf{A}$*-ból kiválasztható legnagyobb méretű nemszinguláris mátrix mérete,*

o) *az* $\mathbf{A}$ *(pozitív) szinguláris értékeinek száma.*

2.2. TÉTEL (INVERTÁLHATÓ NÉGYZETES MÁTRIXOK). *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy* $n \times n$*-es mátrix, és jelölje* A *a hozzá tartozó* $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ *leképezést. A következő állítások ekvivalensek:*

a) *Az* $\mathbf{A}$ *mátrix redukált lépcsős alakja* $\mathbf{I}_n$*, azaz* $\operatorname{rref}(\mathbf{A}) = \mathbf{I}_n$.
b) $\mathbf{A}$ *előáll elemi mátrixok szorzataként.*
c) $\operatorname{r}(\mathbf{A}) = n$.
d) $N(\mathbf{A}) = 0$.
e) *Az* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *egyenletrendszer minden* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *vektorra megoldható.*
f) *Az* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *egyenletrendszer minden* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *vektorra egyértelműen megoldható.*
g) *Az* $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ *egyenletrendszernek a triviális az egyetlen megoldása.*
h) $\mathbf{A}$ *sorvektorai lineárisan függetlenek.*
i) $\mathbf{A}$ *oszlopvektorai lineárisan függetlenek.*
j) $\mathbf{A}$ *sorvektorai kifeszítik* $\mathbb{R}^n$*-et.*
k) $\mathbf{A}$ *oszlopvektorai kifeszítik* $\mathbb{R}^n$*-et.*
l) $\mathbf{A}$ *sorvektorai* $\mathbb{R}^n$ *bázisát alkotják.*
m) $\mathbf{A}$ *oszlopvektorai* $\mathbb{R}^n$ *bázisát alkotják.*
n) *Az* $\mathbf{A}$ *mátrix invertálható.*
o) $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.
p) *A* 0 *nem sajátértéke* $\mathbf{A}$*-nak.*
q) *A* 0 *nem szinguláris értéke* $\mathbf{A}$*-nak.*
r) *Az* $\mathbf{A}$ *legkevesebb tagból álló diadikus felbontásának* n *tagja van.*
s) *Az* A *lineáris leképezés képtere* $\mathbb{R}^n$.
t) *Az* A *lineáris leképezés magtere* $\{\mathbf{0}\}$.
u) *Az* A *leképezés kölcsönösen egyértelmű.*
v) *Az* A *leképezés invertálható.*

Irodalomjegyzék

Wolf Holzmann. Uniqueness of reduced row echelon form. http://www.cs.uleth.ca/~holzmann/notes/reduceduniq.pdf, 2002.

Tárgymutató