A megoldások terei

Wettl Ferenc

2014. szeptember 23.

Altér

D az $\mathbb{F}$ test fölötti $\mathcal{V}$ vektortérnek $\mathcal{W}$ altere, ha $\emptyset \neq \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ zárt a két műveletre. Jel: $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$.

K $\mathbf{0} \in \mathcal{W}$,

P origón átmenő egyenes a síkban (térben)

P origón átmenő sík a térben

P szimmetrikus mátrixok $\mathbb{F}^{n \times n}$-ben

P felsőháromszög-mátrixok $\mathbb{F}^{n \times n}$-ben

P diagonális mátrixok $\mathbb{F}^{n \times n}$-ben

P legföljebb másodfokú polinomok a polinomok (vagy pl. a legföljebb negyedfokúak) terében

P $\mathbb{R}$-en differenciálható valós függvények az $\mathbb{R}$-en folytonos valósok terében

Á minden vektortérnek altere saját maga és a zérustér ($\mathcal{Z} = \{\mathbf{0}\}$)

Á alterek metszete altér

Á alterek uniója pontosan akkor altér, ha az egyik altere a másiknak

Mátrixhoz tartozó alterek

P $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ mátrixra $\mathcal{S}(\mathbf{A}) \leqslant \mathbb{F}^n$, $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \leqslant \mathbb{F}^m$ (sor-, oszloptér)

P homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai ($\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, $\mathbf{Ay} = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{A}(c\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{0}$)

K azon $\mathbf{b}$ vektorok, melyekre $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ megoldható, alteret alkotnak (ez megegyezik $\mathbf{A}$ oszlopterével)

K $\mathbb{F}^{m\times n}$-es mátrix nulltere $\mathbb{F}^n$ altere ($\mathcal{N}(\mathbf{A}) \leqslant \mathbb{F}^n$)

T Elemi sorműveletek közben a sortér nem változik, az oszlopvektorok megőrzik az eredeti lineáris kapcsolataikat.

K Legyen $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ mátrix egy lépcsős alakja. Ekkor

1. $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ sortere megegyezik,
2. az $\mathbf{A}$ oszlopvektorai között lévő lineáris kapcsolatok azonosak a $\mathbf{B}$ ugyanolyan sorszámú oszlopai közti lineáris kapcsolatokkal,
3. $\mathbf{B}$ nemzérus sorvektorai lineárisan függetlenek,
4. a főelemek oszlopvektorai $\mathbf{A}$-ban és $\mathbf{B}$-ben is lineárisan függetlenek.

Á $\mathcal{N}(\mathbf{AB}) \geqslant \mathcal{N}(\mathbf{B})$ és egyenlőség pontosan akkor áll, ha $\mathbf{A}$ invertálható.

Kifeszített altér

D a $\mathbf{v}_i \in \mathcal{V}$ $(i = 1, \dots, k)$ vektorok által kifeszített altér:

$$\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) = \{\, c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k : c_1, c_2 \dots, c_k \in \mathbb{F}\,\}.$$

Á $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) \leqslant \mathbb{F}^n$ (tehát altér)

Á $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ a minimális altér azok között, melyek tartalmazzák a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorokat.

P Minden $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ mátrix az $\mathbf{E}_{ij}$ mátrixok lineáris kombinációja, amelyben az i-edik sor j-edik elem 1, a többi 0.

P Minden legföljebb n-edfokú polinom az 1, x, x^2,…,x^n lineáris kombinációja.

P a $\mathbf{T} = [t_{i-j}]_{i,j=0}^{n-1}$ Toeplitz mátrix a $2n-1$ darab $\mathbf{T}_k = [\delta_{i-j,k}]_{i,j=0}^{n-1}$ mátrixok lineáris kombinációja, ahol $\delta_{i,j}$ a Kronecker-delta:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

Affin altér

J $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$, $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, $\mathcal{W} + \mathbf{u} = \{\mathbf{w} + \mathbf{u} : \mathbf{w} \in \mathcal{W}\}$

D a $\mathcal{W} + \mathbf{u}$ affin altér

Á Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathbf{b}$ előáll az $\mathbf{A}$ oszlopainak lineáris kombinációjaként ($\mathbf{b}$ benne van $\mathbf{A}$ oszlopterében). A lineáris kombináció együtthatói megegyeznek a megoldásvektor koordinátáival.

T Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ összes megoldása = az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ valamelyik megoldása + az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ összes megoldása

K Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ összes megoldása egy affin alteret alkot, ami nem altér, ha $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

Bázis

D A $\mathcal{V}$ vektortér bázisán olyan vektorrendszert értünk, mely

1. lineárisan független,
2. generátorrendszer (mely kifeszíti $\mathcal{V}$-t).

P Az $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$,..., $\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ vektorokból álló halmazt $\mathbb{F}^n$ standard bázisának nevezzük.

Á A zérustérnek nincs bázisa

P Az $\mathbf{E}_{ij}$ mátrixok bázist alkotnak $\mathbb{F}^{m\times n}$-ben

P A legföljebb n-edfokú polinomok terének $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ egy bázisa.

Bázis meghatározása – első megoldás

Példa (Altér bázisának meghatározása)

Határozzuk meg az $(1, 1, 0, -2)$, $(2, 3, 3, -2)$, $(1, 2, 3, 0)$ és $(1, 3, 6, 2)$ vektorok által kifeszített altér egy bázisát!

Megoldás

Sorvektorokkal:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A bázis vektorai $(1, 1, 0, -2)$, $(0, 1, 3, 2)$.

Bázis meghatározása – második megoldás

Megoldás

oszlopvektorokkal:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát az adott négy vektor közül az első kettő, azaz az $(1, 1, 0, -2)$ és $(2, 3, 3, -2)$ vektorok bázist alkotnak.

Ha a megadott vektorokat más sorrendben írjuk a mátrixba, másik bázist kaphatunk.

Felírás bázisvektorok lineáris kombinációjaként

Megoldás

a redukált lépcsős alakból:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ennek alapján:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Koordinátás alak e bázisban

Példa (Vektor koordinátás alakja a $\mathcal{B}$ bázisban)

Jelölje $\mathcal{B} = \{(1,1,0,-2),(2,3,3,-2)\}$ a bázist. A redukált lépcsős alak nemzérus soraiból

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

kapjuk a négy vektor koordinátás alakjait:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Bázis és dimenzió

Állítás (Bázis ekvivalens definíciói)

Legyen $\mathcal{U}$ vektortér, és legyen $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subseteq \mathcal{U}$ vektorok egy halmaza. A következő állítások ekvivalensek:

- $\mathcal{B}$ lineárisan független vektorokból áll és kifeszíti az $\mathcal{U}$ alteret,
- $\mathcal{B}$ minimális méretű halmaz, mely kifeszíti $\mathcal{U}$-t;
- $\mathcal{B}$ maximális méretű, független vektorokból álló halmaz $\mathcal{U}$-ban.

Tétel (Bázis-tétel)

Ha a $\mathcal{V}$ vektortérnek van n-elemű bázisa, akkor minden bázisa n-elemű.

Definíció (Dimenzió)

A $\mathcal{V}$ vektortér n-dimenziós, ha van n-elemű bázisa. (véges dimenziós vektortér)

Mátrix, rang, dimenzió

Állítás (Dimenzió = rang)

Egy mátrix rangja, sorterének dimenziója és oszlopterének dimenziója megegyezik. (Ebből következőleg $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}^T)$.)

Tétel (Dimenziótétel)

Bármely $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ mátrix esetén a sortér dimenziójának és a nulltér dimenziójának összege n. Képlettel:

$$\dim(\mathcal{S}(\mathbf{A})) + \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = n.$$

Valós mátrixok sor- és nulltere

Definíció (Merőleges altér és merőleges kiegészítő altér)

egy vektortér két altere merőleges, ha bárhogy választva egy vektort az egyik altérből, és egy másikat a másik altérből, azok merőlegesek egymásra. Egy $\mathcal{W}$ altérre merőleges vektorok alterét a $\mathcal{W}$ merőleges kiegészítő alterének nevezzük és $\mathcal{W}^\perp$-pel jelöljük („W perp”).

Tétel (A lineáris algebra alaptétele)

Minden valós mátrix sortere és nulltere merőleges kiegészítő alterei egymásnak.

- $\mathcal{S}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{S}(\mathbf{A})$.
- $\mathcal{O}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$.
- Minden $\mathbf{x}$ vektor egyértelműen előáll egy sortérbe és egy nulltérbe eső vektor összegeként.

Valós együtthatós egyenletrendszer megoldásai

Tétel (Lineáris egyenletrendszer megoldásai)

Minden valós együtthatós megoldható (konzisztens) lineáris egyenletrendszerre igazak a következő állítások:

- egyetlen megoldása esik az együtthatómátrix sorterébe;
- a sortérbe eső megoldás az összes megoldás közül a legkisebb abszolút értékű;
- az összes megoldás előáll úgy, hogy a sortérbe eső megoldáshoz hozzáadjuk a homogén rész összes megoldását.

A sortérbe eső megoldás megkeresése

Példa (Lineáris egyenletrendszer sortérbe eső megoldása)

Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} x + y + z + 3u + 2w &= 4 \\ x + 2y + z + 5u + 2w &= 5 \\ 2x + 3y + z + 8u + 3w &= 7 \\ 2x + 3y + 2z + 8u + 4w &= 9 \end{aligned}$$

egyenletrendszer minimális abszolút értékű megoldását!

A redukált lépcsős alak:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 8 & 4 & 9 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Így a megoldás:

$$(x, y, z, u, w) = (1, 1, 2, 0, 0) + (-1, -2, 0, 1, 0)u + (-1, 0, -1, 0, 1)w.$$

A redukált lépcsős alak szerinti egyenletrendszerhez ezt kell adni:

$$\begin{aligned} -x - 2y \qquad + u \qquad &= 0 \\ -x \qquad - z \qquad + w &= 0 \end{aligned}$$

Így a kiegészített egyenletrendszer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4/17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5/17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 19/17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6/17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 15/17 \end{bmatrix},$$

tehát a keresett megoldás $^1/_{17}(-4, 5, 19, 6, 15)$.