

# Determinánsok

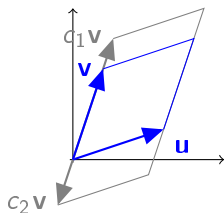
Wetl Ferenc

2014. szeptember 23.

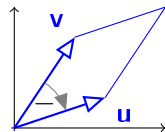
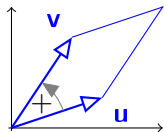
- 1 Motiváció
- 2 A determináns mint sorvektorainak függvénye
- 3 A determináns mint elemeinek függvénye

# Parallelogramma előjeles területe

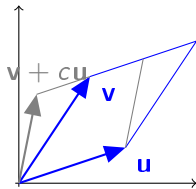
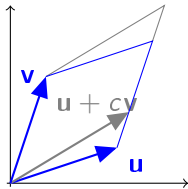
$$\hat{A} \quad f(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = cf(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \text{ és } f(\mathbf{u}, c\mathbf{v}) = cf(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$



$$\hat{A} \quad f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -f(\mathbf{v}, \mathbf{u})$$



$$\hat{A} \quad f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u} + c\mathbf{v}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v} + c\mathbf{u})$$



## Definíció

**D** **Determináns** az a négyzetes mátrixokon értelmezett és  $\det$ -tel jelölt skalár értékű függvény, amely

*D1.* értéke  $c$ -szeresére változik, ha egy sorát  $c$ -vel szorozzuk,

*D2.* értéke  $-1$ -szeresére változik, ha két különböző sorát fölcseréljük,

*D3.* értéke nem változik a hozzáadás elemi sorművelete közben,

*D4.* az egységmátrixhoz  $1$ -et rendel.

**M** *D2* elhagyható

**M** (sor)vektorok függvényeként is definiálható:

$$\det(I_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \det((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)) = \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3),$$

## Zérus determináns

Á Ha egy mátrixnak van egy zérussora, akkor determinánsa 0.

Á Ha egy mátrixnak van két azonos sora, akkor determinánsa 0.

T Ekvivalens állítások:

1.  $\det(\mathbf{A}) = 0$ ,
2.  $\mathbf{A}$  sorvektorai lineárisan összefüggők,
3.  $\mathbf{A}$  szinguláris,
4. a homogén lineáris  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása.

$$P \quad \begin{vmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

# Egyenletrendszerek és determináns

## Tétel

Ekvivalens állítások:

- $\det \mathbf{A} \neq 0$ ,
- az  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  egyenletrendszer tetszőleges  $\mathbf{b}$ -re egyértelműen megoldható,
- az  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  egyenletrendszernek csak triviális megoldása van.

• Óvatosan:  $\begin{vmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix} = 1$ , és az  $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2^n}$

- A véletlen valós mátrixok determinánsa 1 valószínűséggel nem 0, ha a mátrix elemeit valamely folytonos valószínűségeloszlás szerint választjuk.

## A determináns értékének kiszámítása

- T Az alsó vagy felső háromszögmátrix, s így a diagonális mátrix determinánsa megegyezik a főátlóbeli elemek szorzatával.
- M Elemi sorműveletekkel hozzuk a determinánst olyan alakra, melynek vagy van egy zérussora, vagy háromszög alakú
- P Pascal-háromszög:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

## Elemi mátrixok determinánása

$\tilde{A}$  a hozzáadás sorműveletével kapott elemi mátrix determinánása 1,

$\tilde{A}$  a sorcserével kapotté  $-1$ ,

$\tilde{A}$  egy sor  $c$ -vel való szorzásával kapotté  $c$ ,

P például:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$



## Permutáló mátrix determinánása

D egy permutáló mátrix két sora **inverzióban** áll, ha az előbb álló sorbeli 1-es hátrébb van, mint a másik sorbeli

P  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  inverzióinak száma például 4.

T A permutáló mátrix aszerint  $+1$  vagy  $-1$ , hogy inverzióban álló sorpárjainak száma páros vagy páratlan.

## Mátrixműveletek és determináns

Á  $\mathbf{A}_{n \times n}$  mátrixra és tetszőleges  $c$  skalárra  $\det(c\mathbf{A}) = c^n \det(\mathbf{A})$

T  $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$

B  $\det(\mathbf{EB}) = \det(\mathbf{E}) \det(\mathbf{B})$

Legyen  $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k$  az elemi mátrixok szorzatára bontás.

↪  $\det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{E}_1) \det(\mathbf{E}_2) \dots \det(\mathbf{E}_k) \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{AB})$ .

Á  $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$ .

Á Determináns könnyen számolható a PLU-ból.

# Determináns multilineáris függvény

T Aditivitás az  $i$ -edik sorban:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}$$

Á homogenitás az  $i$ -edik sorban a definíció szerint (D1)!

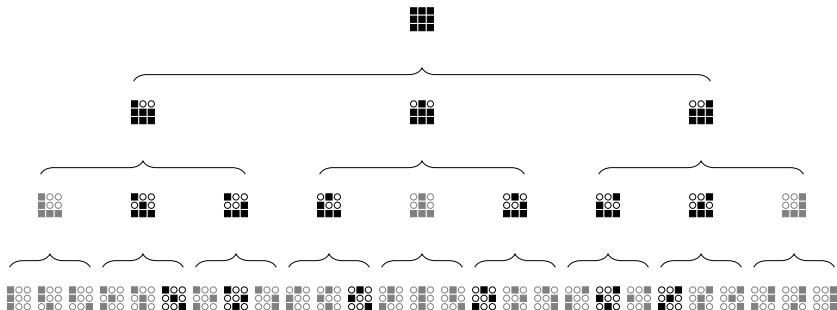
↪ a determináns minden sorában „megtartja a lineáris kombinációt”.

M Ha determinánst, mint sorvektorainak  $n$ -változós függvényét tekintjük, akkor a det függvény minden változójában additív és homogén (multilineáris).

# Additivitás használata

Mivel  $(a, b, c) = (a, 0, 0) + (0, b, 0) + (0, 0, c)$  ezért

$$\begin{vmatrix} a+0+0 & 0+b+0 & 0+0+c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

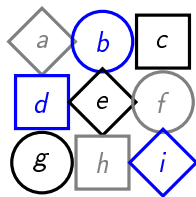


## Determináns mint kígyók összege

T Minden  $n$ -edrendű determináns fölbomlik az összes belőle kiválasztható kígyó determinánsának összegére. Jelölje  $d_{j_1 j_2 \dots j_n}$  annak a permutáló mátrixnak a determinánsát, mely az  $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$  elemekből álló kígyóhoz tartozik. Ekkor

$$\det([a_{ij}]) = \sum d_{j_1 j_2 \dots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

ahol az összegzés az  $\{1, 2, \dots, n\}$  halmaz összes lehetséges  $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$  permutációján végigfut.



P Sarrus-szabály  $n = 2, n = 3$  esetén:

K A determinánsfüggvény létezik, és egyértelmű.

## Következmények

- Á A determináns kiszámolásához elég csak az összeadás és szorzás művelete, az osztásra, melyet az elemi sorműveletek során használhatunk, nincs szükség. (Gyűrű test helyett).
- Á Egész számokból álló determináns értéke egész szám.
- Á Mivel a determináns kifejtésében csak az összeadás és a szorzás művelete szerepel, a determináns folytonos, sőt differenciálható függvénye elemeinek.

## Kifejtés

- D Az  $n$ -edrendű  $|\mathbf{A}|$  determináns  $i$ -edik sorának és  $j$ -edik oszlopának elhagyásával kapott  $(n-1)$ -edrendű determináns  $(-1)^{i+j}$ -szeresét az  $|\mathbf{A}|$  determináns  $a_{ij}$  eleméhez tartozó **előjeles aldeterminánsának** nevezzük.
- Á Ha az  $n$ -edrendű  $|\mathbf{A}|$  determináns  $a_{ij}$  elemének sorában vagy oszlopában minden további elem 0,  $A_{ij}$  az  $a_{ij}$  elemhez tartozó előjeles aldetermináns, akkor

$$|\mathbf{A}| = a_{ij}A_{ij}.$$

- T Az  $n$ -edrendű  $|\mathbf{A}|$  determináns értéke  $i$ -edik sora szerint kifejtve

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik},$$

és  $j$ -edik oszlopa szerint kifejtve

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kj}.$$

## Vandermonde-determináns

D  $x_1, x_2, \dots, x_n$  számokhoz tartozó Vandermonde-determináns

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

T  $V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i < j} (x_j - x_i)$ .

A A különböző  $x_1, \dots, x_n$  és a tetszőleges  $y_1, \dots, y_n$  számokhoz egyetlen olyan legfőbb  $n - 1$ -edfokú  $f$  polinom létezik, melyre  $f(x_i) = y_i$ .



## Cramer-szabály

J  $\mathbf{A}_{i,\mathbf{b}} = [\mathbf{a}_{*1} \ \dots \ \mathbf{a}_{*,i-1} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a}_{*,i+1} \ \dots \ \mathbf{a}_{*n}]$ .

T Az  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha  $\det \mathbf{A} \neq 0$ , és ekkor

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}}}{\det \mathbf{A}}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

B  $\mathbf{Ae}_j = \mathbf{a}_{*j}$ , így

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{I}_{i,\mathbf{x}} &= \mathbf{A}[\mathbf{e}_{*1} \ \dots \ \mathbf{e}_{*,i-1} \ \mathbf{x} \ \mathbf{e}_{*,i+1} \ \dots \ \mathbf{e}_{*n}] \\ &= [\mathbf{Ae}_{*1} \ \dots \ \mathbf{Ae}_{*,i-1} \ \mathbf{Ax} \ \mathbf{Ae}_{*,i+1} \ \dots \ \mathbf{Ae}_{*n}] \\ &= [\mathbf{a}_{*1} \ \dots \ \mathbf{a}_{*,i-1} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a}_{*,i+1} \ \dots \ \mathbf{a}_{*n}] \\ &= \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}} \end{aligned}$$

## Inverz mátrix elemei

$$T \quad [A^{-1}]_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}.$$

$$K \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} [A_{ij}]^T = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.$$

$$K \quad A \operatorname{adj} A = \det(A) I \text{ (szinguláris mátrixra is jó).}$$

K Az inverz mátrix minden eleme folytonos függvénye a mátrix minden elemének minden olyan helyen, ahol a determináns nem 0, azaz minden olyan helyen, ahol az inverz létezik.

K Egy  $n$ -ismeretlenes  $n$  egyenletből álló egyenletrendszer megoldásvektorának minden koordinátája folytonos függvénye az egyenletrendszer együtthatóinak és a jobb oldalán álló vektor koordinátáinak, hisz a megoldás az inverzzel való szorzással megkapható.

K Egészelemű mátrix inverze pontosan akkor egészelemű, ha determinánsa 1 vagy  $-1$  ( $\det(A) \det(A^{-1}) = \det I = 1$ ).

## Blokkmátrixok determinánása

$$\top \quad \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}||\mathbf{D}|.$$

$\top$  Legyen  $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$ , ahol  $\mathbf{A}$  és  $\mathbf{D}$  négyzetes mátrixok. Ekkor

Ha  $|\mathbf{A}| \neq 0$ , akkor  $|\mathbf{M}| = |\mathbf{A}||\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}|$ .

Ha  $|\mathbf{D}| \neq 0$ , akkor  $|\mathbf{M}| = |\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}||\mathbf{D}|$ .

$\mathbf{B}$  Trükk

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \end{aligned}$$