Felsőbb Matematika (2014-15 ősz) **1. gyak**

1. Igazoljuk, hogy tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}) \quad (\text{vagy } |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|),$$

és mutassuk meg, hogy egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ párhuzamosak.

2. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2\right).$$

3. Definiáljuk $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ vektorok skaláris szorzatát az $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^n \bar{x}_k y_k$ képlettel. Mutassuk meg, hogy
a) $\mathbf{x} \cdot (\lambda \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$, $(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \bar{\lambda}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$,
b) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \overline{\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}}$.

4. *a)* Számítsuk ki a komplex N-edik egységgyökök összegét.
b) Számítsuk ki a komplex N-edik egységgyökök n-edik hatványainak összegét.

5. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{C}$ egy primitív N-edik egységgyök. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{x}_k = (1, \varepsilon^k, \varepsilon^{2k}, \ldots, \varepsilon^{(N-1)k})$ $(0 \leq k < N)$, akkor

$$\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{x}_j = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq j, \\ N, & \text{ha } k = j. \end{cases}$$

6. Igazoljuk, hogy a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ vektorrendszerre az alábbi két állítás ekvivalens:
a) ha $\sum_{k=1}^n c_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, akkor $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$,
b) ha $n > 1$, akkor egyik vektor sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként, ha $n = 1$, akkor $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^k$ vektorok közül csak $\mathbf{v}_1$ áll elő a többi lineáris kombinációjaként, akkor $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$.

8. Egy nullvektortól különböző elemekből álló, legalább kételemű $\mathbb{R}^n$-beli $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha van olyan $t \geq 2$ index, hogy $\mathbf{v}_t$ a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{t-1}$ vektorok lineáris kombinációja.

9. Igazoljuk, hogy egy vektortér vektorainak egy véges $\mathcal{V}$ halmaza pontosan akkor lineárisan független, ha $\mathrm{span}(\mathcal{V})$ bármely vektora csak egyféleképp áll elő $\mathcal{V}$ vektorainak lineáris kombinációjaként.

10. Tegyük fel, hogy a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^k$ vektorok lineárisan függetlenek. Függetlenek-e a kövekező vektorrendszerek?
a) $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\ldots$, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n$,
b) $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$, $\ldots$, $\mathbf{v}_{n-1} - \mathbf{v}_n$, $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_1$,
c) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, $\ldots$, $\mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{v}_n$, $\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_1$.

11. Bizonyítsuk be, hogy a következő struktúrák testet alkotnak:
a) a $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ halmaz, ha a szorzást és az összeadást úgy definiáljuk, hogy az igazi szorzatnak illetve összegnek a p szerinti maradékát vesszük;
b) az $\{a + bi | a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{C}$ halmaz a komplex összeadásra és szorzásra nézve;
c) az $F = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ halmaz a valós összeadásra és szorzásra nézve.

12. Melyek alkotnak vektorteret $\mathbb{R}$ fölött az alábbiak közül? A köztük szereplő vektorterek hány dimenziósak?
a) 3×3-as valós felső háromszögmátrixok a szokásos műveletekkel;
b) a racionális számnégyesek a szokásos összeadásra és skalárral való szorzásra nézve;

c) a legföljebb 5-ödfokú valós polinomok;
d) a valós számpárok az $(a, b) \oplus (c, d) = (a + d, b + c)$ összeadásra és $\lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$ skalárral való szorzásra nézve;
e) $\mathbb{C}$ a komplex számok összeadására és valóssal való szorzására nézve;
f) A sík pozitív y-koordinátájú helyvektorai a szokásos vektorösszeadásra és skalárral való szorzásra nézve.

13. Tekintsük a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x - y + z - w &= 1 \\ x + y - z - w &= 0 \\ x - y - z + w &= 1 \\ y + z + w &= 1 \end{aligned}$$

Oldjuk meg mint

(a) valós-együtthatós,

(b) $\mathbb{F}_2$ fölötti,

(c) illetve $\mathbb{F}_3$ fölötti

egyenletrendszert!