Felsőbb Matematika (2014-15 ősz) **2. gyak**

1. Az a és b értékektől függően hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek? Adjuk meg a megoldásokat paraméteres alakban!

$$\begin{aligned} 2x + \ y + \ z &= \ 4 \\ x + 2y - \ z &= -1 \\ x - \ y + 2z &= \ a \\ x + by + \ z &= \ 3 \end{aligned}$$

2. Mutassuk meg, hogy a konzisztens valós $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek pontosan egy sortérbe eső megoldása van, és az a legkisebb abszolút értékű (azaz legrövidebb) megoldás!

3. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszerek sortérbe eső egyetlen megoldását, és ezt felhasználva összes megoldását!

a)
$$\begin{aligned} x + \ y + z &= 3 \\ 2x + \ y - z &= 2 \\ 3x + 2y \qquad &= 5 \end{aligned}$$

b) $x + 4y + 8z + 12w = 15$

c)
$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 3 \\ x + y - z - w &= 1 \end{aligned}$$

4. Mennyi a $(2,3,0,-1)$, $(1,2,-1,0)$, $(2,4,-2,0)$, $(1,0,3,-2)$ vektorrendszer rangja? Adjunk meg maximális méretű lineárisan független részrendszert, és állítsuk elő a többit ezek lineáris kombinációjaként! Határozzuk meg a fenti vektorok által kifeszített altér merőleges kiegészítő alterének egy bázisát!

5. Keressünk egy bázist az $\mathbb{R}^4$ tér $x+y+z+w = 1$ egyenletű hipersíkjával párhuzamos vektorok alterében, és írjuk fel ezen altér egy – a bázisvektoroktól különböző – vektorának e bázisra vonatkozó koordinátás alakját!

6. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ invertálható mátrixok, akkor a következő ún. blokkdiagonális mátrixok invertálhatók, és

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix},$$

illetve

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}.$$

ahol $\mathbf{B}$ tetszőleges, de megfelelő típusú mátrix. Hasonlóan, ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ négyzetes mátrixok, akkor

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & -\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X} & \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{X} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}$, és feltételezzük, hogy minden felírt mátrixinverz létezik. Ezt felhasználva számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Legyen $\mathbf{A}$ egy 10×10-es valós mátrix. Jelölje r_i az $\mathbf{A}^i$ rangját. Lehet-e az $(r_1, r_2, \ldots)$ sorozat egyenlő az alábbiakkal? (a) $(5, 6, \ldots)$, (b) $(9, 8, 7, \ldots, 4, 4 \ldots)$, (c) $(10, 9, 8, \ldots)$, (d) $(8, 5, \ldots)$.

8. Igazoljuk, hogy minden r-rangú mátrix előáll r darab 1-rangú összegeként.

9. Tegyük fel, hogy az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$. Mutassuk meg, hogy rangja legföljebb $n/2$.

10. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$-es, akkor $\mathrm{r}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A})$.

11. Írjunk fel egy valós, 2-rangú, 5×6-os mátrixot, melyben nincsenek zéruselemek, és határozzuk meg a négy alapvető altere mindegyikének egy-egy bázisát!

12. Mennyi az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrix rangja? Válasszunk ki a sor-, illetve oszlopvektorok közül egy olyan vektorrendszert, mely a sor-, illetve oszloptér egy bázisa, majd írjuk fel a mátrix további sorainak (oszlopainak) koordinátás alakját ebben a bázisban. Írjuk fel az $\mathbf{A}_{m \times n}$ mátrix bázisfelbontását, azaz írjuk fel $\mathbf{A} = \mathbf{BR}$ alakba, ahol $\mathbf{R}_{r \times n}$ az $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja, és $\mathbf{B}_{m \times r}$ az $\mathbf{A}$ megfelelően választott oszlopaiból áll.

13. Írjuk fel a $\mathcal{B} = \{(1,1,1),\ (1,2,3),\ (1,1,2)\}$ bázisról a $\mathcal{C} = \{(7,3,3),\ (8,1,2),\ (4,4,3)\}$ bázisra való áttérés mátrixát, és határozzuk meg a $(\mathbf{v})_{\mathcal{B}} = (3,2,1)$ vektor $\mathcal{C}$ bázisbeli alakját!