Felsőbb Matematika (2014-15 ősz) **3. gyak**

1. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ és $\det \mathbf{A} = 3$. Határozzuk meg a $2\mathbf{A}^{-1}$, $(2\mathbf{A})^{-1}$ és $\mathbf{A}^2\mathbf{A}^T\mathbf{A}^{-1}$ mátrixok determinánsát!

2. Melyek igazak az alábbi állítások közül? (Az $\mathbf{A}$ itt mindig négyzetes mátrixot jelöl.)
(a) Ha egy determináns értéke 0, akkor van két azonos sora.
(b) Ha egy determináns értéke nem 0, akkor oszlopvektoriai lineárisan függetlenek.
(c) Ha az $\mathbf{Ax} = 0$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása, akkor $|\mathbf{A}| \neq 0$.
(d) $|\mathbf{A}| \neq 0$ pontosan akkor igaz, ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer nem oldható meg.
(e) $|\mathbf{A}| = 0$ pontosan akkor igaz, ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

3. Határozzuk meg a $\mathbf{P}$ és $\mathbf{R}$ mátrixok LU-felbontását, majd ezt fölhasználva oldjuk meg a $\mathbf{Px} = (0, 2, 4, 6)$ egyenletrendszert, invertáljuk az $\mathbf{R}$ mátrixot, ahol

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Adjunk meg olyan lineáris transzformációt $\mathbb{R}^3$-ben (ha létezik), amely a $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ vektorokat a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ vektorokba viszi, ahol $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, -1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (2, -1, 3)$, és
(i) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (1, 1, 2)$;
(ii) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (3, 1, 5)$;
(iii) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (2, 1, 3)$;
Írjuk fel e leképezés mátrixát!

5. Adjuk meg az alábbi lineáris transzformációk mátrixát a megadott bázisokban:
(a) az $x - 2y + z = 0$ síkra való merőleges vetítés a standard bázisban;
(b) $f : (x, y, z) \mapsto (2x - y + z, x + z, y - 3z)$ a standard, illetve az $\{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (2, 1, 1)\}$ bázisban;
(c) a sík tükrözése az $y = 2x$ egyenesre a standard, illetve az $\{(1, 2), (-2, 1)\}$ bázisban;
(d) $\mathbb{R}^n$ vetítése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektor által kifeszített altérre a standard bázisban;
(e) $\mathbb{R}^n$ vetítése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektorra merőleges hipersíkra a standard bázisban;
(f) $\mathbb{R}^n$ tükrözése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektorra merőleges hipersíkra a standard bázisban.

6. Határozzuk meg a $(-2, 1, 3)$ vektornak az $(1, 0, 1)$ és a $(-1, 2, 0)$ vektorok által kifeszített síkra eső merőleges vetületét!

7. Tekintsük az $\mathbb{R}^4$ tér $(1, -1, 1, 0)$ és $(0, 1, -1, 0)$ vektorai által kifeszített $\mathcal{W}$ alterét és legyen $x = (8, 4, 2, 1)$. Bontsuk fel az x vektort $\mathcal{W}$ -be eső és $\mathcal{W}$ -re merőleges vektorok összegére.

8. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Adjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer minimális abszolút értékű optimális megoldását

9. Melyek igazak az $\mathbb{R}^n$ vektortér minden f lineáris transzformációjára?

1. $\mathbf{v}$ sajátvektora f-nek $\Longrightarrow$ $\mathbf{v}$ sajátvektora f^2-nek;
2. $\mathbf{v}$ sajátvektora f^2-nek $\Longrightarrow$ $\mathbf{v}$ sajátvektora f-nek;
3. 0 sajátértéke f^2-nek $\Longrightarrow$ 0 sajátértéke f-nek.

10. Mondjunk egy lineáris leképezést, melynek sajátértékei (a) 1, 1, 1; (b) 1, 1, -1; (c) 1, -1, -1; (d)-1, -1, -1 (e) 1; (f) -1?