1. (1-rangú mátrixok pszeudoinverze) Mutassuk meg, hogy ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 1$, akkor

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{\mathrm{trace}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}\mathbf{A}^T,$$

ahol $\mathrm{trace}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ elemeinek négyzetösszege. Eszerint ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, akkor

$$\mathbf{a}^+ = \frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}^T = \frac{1}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}^T.$$

2. Határozzuk meg a következő mátrixok általánosított (pszeudo)inverzét:

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (b)\ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(c)\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (d)\ \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Adjunk meg ortonormált bázist az $\mathbf{a}_1 = (1, 2, -1, 0), \mathbf{a}_2 = (2, 1, 0, 1), \mathbf{a}_3 = (1, -1, 1, -1) \in \mathbb{R}^4$ vektorok által generált altérben.

4. (QR-felbontás Givens-forgatásokkal) Számítsuk ki az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 15 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását Givens-forgatások segítségével!

5. (QR-felbontás Householder-tükrözéssel) Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

mátrix QR-felbontását Householder-módszerrel!

6. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. $\mathbf{A}$ pszeudoinverzének segítségével (melyet egy korábbi feladatban már meghatároztunk) határozzuk meg az $\mathbf{Ax} = (10, 2, 6)$ egyenletrendszer legkisebb abszolút értékű optimális megoldását! Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix QR-felbontását, és ennek felhasználásával is keressük meg az előző egyenletrendszer legkisebb abszolút értékű optimális megoldását!

7. Igazoljuk, hogy blokkdiagonális mátrix esetén

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{A}_k \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^+ & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2^+ & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{A}_k^+ \end{bmatrix},$$

és ez alapján határozzuk meg a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix pszeudoinverzét.

8. Diagonalizáljuk ortogonálisan az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixot és írjuk fel a spektrálfelbontását, azaz állítsuk elő $\mathbf{A} = \sum_\lambda \lambda \mathbf{P}_\lambda$ alakban, ahol $\mathbf{P}_\lambda$ a λ sajátértékhez tartozó sajátaltérre való merőleges vetítés mátrixa.

9. Írjuk fel az alábbi mátrixok sajátfelbontását, annak diadikus alakját, illetve a spektrálfelbontásukat!

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; (b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.