

1. Hozzuk ortogonális hasonlósági transzformációval felső háromszögalakra az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 14 & -9 \\ 0 & 16 & -10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & -3 \\ 3 & 17 & -6 \\ -12 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixokat!

2. Melyek normálisak és melyek pozitív definiték az alábbi mátrixok közül?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Mutassuk meg, hogy ha \mathbf{A} szimmetrikus, akkor az alábbi állítások ekvivalensek:

1. \mathbf{A} pozitív definit;
2. van olyan szimmetrikus, pozitív definit \mathbf{X} mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{X}^2$;
3. van olyan invertálható \mathbf{Y} mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y}$.

4. Mutassuk meg a karakterisztikus egyenlet felírása nélkül, hogy az alábbi mátrixnak van legalább két valós sajátértéke:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

5. Legyen d_i az $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^i$ nullterének dimenziója, $i = 1, 2, \dots, s$, ahol s a maximális kitevő. Képezzük a $d'_i = d_{i-1} - d_i$ és abból a $d''_i = d'_i - d'_{i+1}$ (legyen $d_0 = n$, ahol n az \mathbf{A} mérete és $d'_{s+1} = 0$). Mi a d' és a d'' sorozat elemeinek jelentése?

6. Egy 10×10 -es \mathbf{A} mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Az $\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 8, 6, 5, 4, 4. Az $\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 7, 6, 6. Írjuk fel \mathbf{A} Jordan-alakját!

7. Határozzuk meg az \mathbf{A} mátrix Jordan-féle normálalakját, \mathbf{J} -t, és az \mathbf{A}^{100} , $e^{\mathbf{J}}$, $e^{3\mathbf{A}}$ mátrixokat.

$$a) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

8. Ellenőrizzük Perron tételét az alábbi mátrixra:

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

9. Határozzuk meg, hogy az alábbi mátrixok irreducibilisek vagy reducibilisek! A reducibilisekhez határozzuk meg a permutációs mátrixot is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$