

Lineáris leképezések

Wettl Ferenc

2014. október 2.

- 1 Mátrixleképezés, lineáris leképezés
- 2 Alkalmazás: differenciálhatóság
- 3 2- és 3-dimenziós geometriai transzformációk mátrixa
- 4 Merőleges vetítés és a legjobb közelítés
- 5 Pszeudoinverz
- 6 Ortonormált bázis – ortogonális mátrix
- 7 Komplex és véges test feletti terek
- 8 Diszkrét Fourier-transzformált
 - Fourier-mátrixok
 - Diszkrét Fourier-transzformáció
 - Gyors Fourier-transzformáció

A mátrixleképezés fogalma

D $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$

D képtér: $\text{Im}(A) = \mathcal{O}(\mathbf{A})$, magtér: $\text{Ker}(A) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$

P $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{x}$.

M Az $\mathbf{a} \times \mathbf{x}$ vektori szorzat koordinátás alakban:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = \mathbf{a} \times \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 x_3 - a_3 x_2 \\ a_3 x_1 - a_1 x_3 \\ a_1 x_2 - a_2 x_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -a_3 x_2 + a_2 x_3 \\ a_3 x_1 & -a_1 x_3 \\ -a_2 x_1 + a_1 x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Műveletek mátrixleképezések között

$$\tilde{A} \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} \iff A + B = C$$

$$\tilde{A} \quad c\mathbf{A} = \mathbf{C} \iff cA = C$$

$$\tilde{A} \quad \mathbf{XY} = \mathbf{Z} \iff X \circ Y = Z$$

$$\tilde{A} \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \iff B = A^{-1}$$

Mátrixleképezések tulajdonságai

$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ egy tetszőleges mátrixleképezés, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $c, d \in \mathbb{R}$:

Á $A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + dA(\mathbf{y})$, (A megőrzi a lineáris kombinációt)

Á $A(c\mathbf{x}) = cA(\mathbf{x})$, (a leképezés homogén)

$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$, (a leképezés additív)

Á $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$

Á Tetszőleges altér képe altér.

Á Tetszőleges affin altér képe affin altér.

Lineáris leképezés

D $A : H_1 \rightarrow H_2$ leképezés **lineáris**, ha homogén és additív,
lineáris transzformáció, ha $H_1 = H_2$.

P deriválás: $D : H_1 \rightarrow H_2 : f \mapsto D(f) = f'$

$$D(cf) = (cf)' = cf' = cD(f), \text{ és} \\ D(f + g) = (f + g)' = f' + g' = D(f) + D(g).$$

P integrálás:

$$\int_0^1 cf = c \int_0^1 f, \text{ és } \int_0^1 (f + g) = \int_0^1 f + \int_0^1 g.$$

P Síkbeli forgatás, tükrözés, vetítés

Vektortérből vektortérbe képző lineáris leképezések

Tétel

Ekvivalens állítások:

- $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ lineáris (homogén és additív).
- Tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$, $c, d \in \mathbb{F}$ esetén

$$A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + dA(\mathbf{y})$$

- Tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ és $c \in \mathbb{F}$ esetén

$$A(c\mathbf{x} + \mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$$

- $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathcal{V}$, $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{F}$

$$A(c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_k\mathbf{x}_k) = c_1A\mathbf{x}_1 + \dots + c_kA\mathbf{x}_k.$$

Lineáris $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ leképezések

Tétel

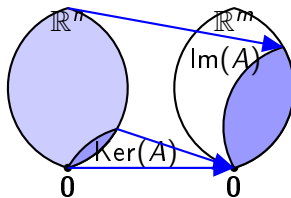
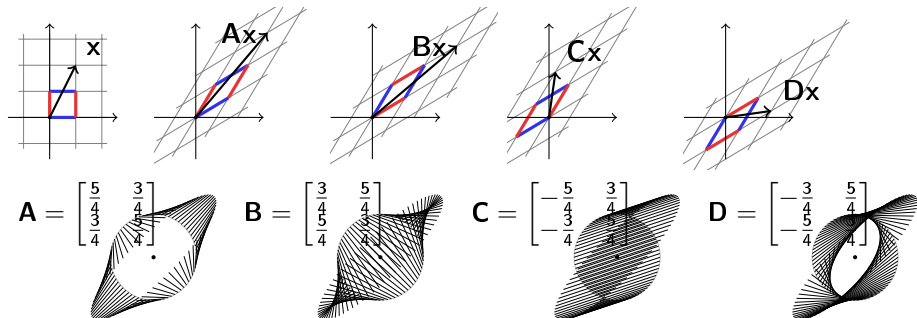
$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ egy tetszőleges függvény. Az A pontosan akkor lineáris, ha létezik egy olyan $\mathbf{A}_{m \times n}$ mátrix, hogy az A függvény megegyezik az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezéssel. Ekkor az $\mathbf{e}_j$ standard egységvektorokkal

$$\mathbf{A} = [\mathbf{Ae}_1 | \mathbf{Ae}_2 | \dots | \mathbf{Ae}_n],$$

Bizonyítás

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= A(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) \\ &= x_1\mathbf{Ae}_1 + x_2\mathbf{Ae}_2 + \dots + x_n\mathbf{Ae}_n \\ &= [\mathbf{Ae}_1 \quad \mathbf{Ae}_2 \quad \dots \quad \mathbf{Ae}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{Ax} \end{aligned}$$

A mátrixleképezés hatásának szemléltetései



Lineáris leképezés mátrixa különböző bázisokban

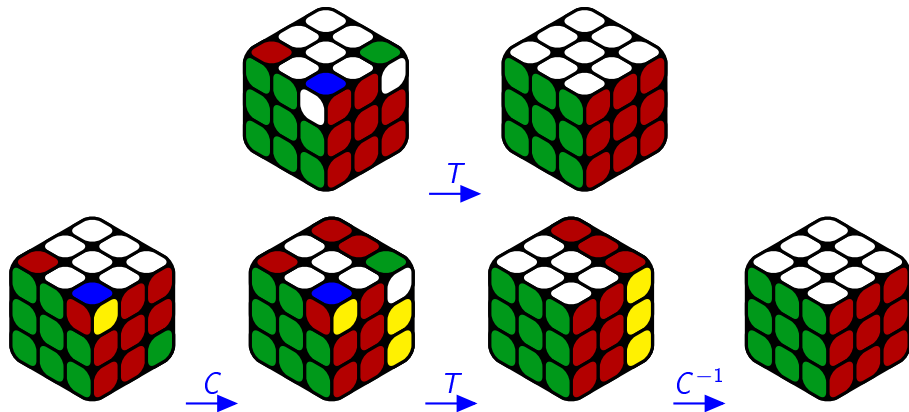
$$\begin{array}{ccc}
 [x]_B & \xrightarrow{L_B} & [Lx]_B \\
 \uparrow C_{B \leftarrow A} & & \uparrow C_{B \leftarrow A} \\
 [x]_A & \xrightarrow{L_A} & [Lx]_A
 \end{array}$$

$$L_B C_{B \leftarrow A} = C_{B \leftarrow A} L_A$$

$$\begin{array}{ccc}
 [x]_B & \xrightarrow{L_B} & [Lx]_B \\
 \uparrow C_{B \leftarrow A} & C_{A \leftarrow B} = & \downarrow C_{B \leftarrow A}^{-1} \\
 [x]_A & \xrightarrow{L_A} & [Lx]_A
 \end{array}$$

$$L_A = C_{A \leftarrow B} L_B C_{B \leftarrow A} = C_{B \leftarrow A}^{-1} L_B C_{B \leftarrow A}$$

Hasonlóság



Definíció

Az $n \times n$ -es **A** mátrix **hasonló** a **B** mátrixhoz, ha létezik olyan invertálható **C** mátrix, hogy $B = C^{-1}AC$. Jelölés: $A \sim B$.

Hasonlóság

Tétel (Hasonló mátrixok hatása)

Két mátrix pontosan akkor hasonló, ha van két olyan bázis, melyekben a két mátrix ugyanannak a lineáris leképezésnek a mátrixa.

Bizonyítás

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{C}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{C}}.$$

Tétel (Hasonlóságra invariáns tulajdonságok)

Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ hasonló mátrixok, azaz $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, akkor

- 1 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$,
- 2 $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = \dim(\mathcal{N}(\mathbf{B}))$,
- 3 $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$,
- 4 $\text{trace}(\mathbf{A}) = \text{trace}(\mathbf{B})$.

Vektor-vektor függvények differenciálhatósága

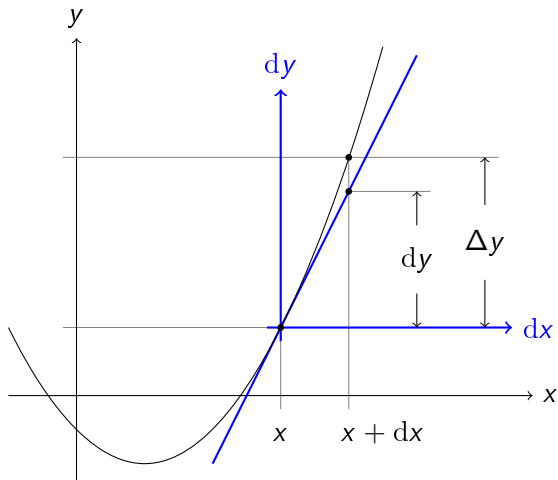
$$\text{M } D = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Dh}{h} = 0 \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Dh}{|h|} = 0.$$

D Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény differenciálható az x helyen, ha létezik olyan $D_{f,x} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés, melyre

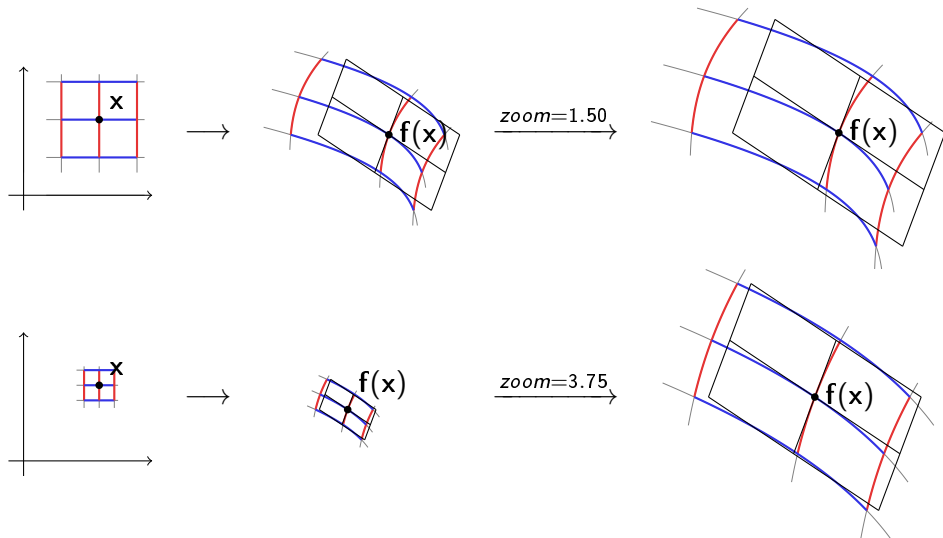
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - D_{f,x}h}{|h|} = 0.$$

A $D_{f,x}$ leképezést az f függvény x ponthoz tartozó **deriváltleképezésének** nevezzük.

Derivált



Derivált



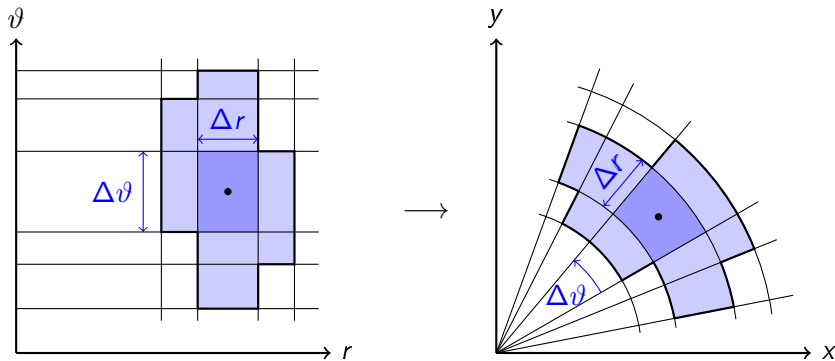
Jacobi-mátrix

Tétel (Jacobi-mátrix)

Ha az $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m; (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (f_1, f_2, \dots, f_m)$ függvény differenciálható az $\mathbf{x}$ helyen, akkor a lineáris $D_{\mathbf{f}, \mathbf{x}}$ deriváltleképezés mátrixa a következő, ún. **Jacobi-mátrix**:

$$D_{\mathbf{f}, \mathbf{x}} = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Jacobi-determináns és az integrál transzformációja



Függvények kompozíciójának deriváltja

Tétel (Láncszabály)

Legyen $\mathbf{f} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ két függvény. Ha $\mathbf{g}$ differenciálható az $\mathbf{x}$ helyen, és $\mathbf{f}$ a $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ helyen, akkor $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ differenciálható az $\mathbf{x}$ helyen, és deriváltleképezése, illetve annak mátrixa:

$$D_{\mathbf{f} \circ \mathbf{g}, \mathbf{x}} = D_{\mathbf{f}, \mathbf{g}(\mathbf{x})} \circ D_{\mathbf{g}, \mathbf{x}}, \quad \text{illetve} \quad D_{\mathbf{f} \circ \mathbf{g}, \mathbf{x}} = D_{\mathbf{f}, \mathbf{g}(\mathbf{x})} D_{\mathbf{g}, \mathbf{x}}.$$

Forgatás

Á Forgatás 2D-ben: $[A_i \ A_j] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$

Á Forgatás tengely körül 3D-ben:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

T Rodrigues-formula: az $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ egységvektor egyenes körül α szöggel:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{I} + \sin \alpha [\mathbf{e}]_{\times} + (1 - \cos \alpha) [\mathbf{e}]_{\times}^2 \\ &= \mathbf{I} + \sin \alpha [\mathbf{e}]_{\times} + (1 - \cos \alpha) (\mathbf{e} \mathbf{e}^T - \mathbf{I}) \end{aligned}$$

T Katerniókkal: $\mathbf{q} = \cos \frac{\alpha}{2} + (e_1 i + e_2 j + e_3 k) \sin \frac{\alpha}{2}$ a forgatást jellemző katernió, a (v_1, v_2, v_3) -hoz tartozó katernió $\mathbf{v} = v_1 i + v_2 j + v_3 k$. Az elforgatott: $\mathbf{q} \mathbf{v} \mathbf{q}^{-1}$, ahol $\mathbf{q}^{-1} = \cos \frac{\alpha}{2} - (e_1 i + e_2 j + e_3 k) \sin \frac{\alpha}{2}$

M számolás katerniókkal: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k, \dots$ szorzás:
 $(a + \mathbf{u})(b + \mathbf{v}) = ab - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + a\mathbf{v} + b\mathbf{u} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}.$

Merőleges vetítés és tükrözés

- Á Egyenesre való merőleges vetítés mátrixa $\mathbf{P} = \frac{1}{\mathbf{b}^T \mathbf{b}} \mathbf{b} \mathbf{b}^T$ ($\mathbf{P} = \mathbf{e} \mathbf{e}^T$).
- Á Síkra való merőleges vetítés mátrixa $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{n} \mathbf{n}^T$.
- Á Síkbeli tükrözés mátrixa az x -tengellyel $\alpha/2$ szöget bezáró egyenesre:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}.$$
- Á Síkra való tükrözés mátrixa $\mathbf{P} = \mathbf{I} - 2\mathbf{n} \mathbf{n}^T$.

Vetítés

$$\tilde{A} P^2 = P$$

Eltolás

Á 2D: $(x, y) \mapsto (x + a, y + b)$ a $z = 1$ egyenletű síkban:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + az \\ y + bz \\ z \end{bmatrix}$$

mátrixa

$$\mathbf{T} = T \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Á 3D: $(x, y, z) \mapsto (x + a, y + b, z + c)$ eltolás:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \\ z + c \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alterek direkt összege

D $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$ és $\mathcal{W} \leq \mathcal{U}$ két tetszőleges altér. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{W}$ a $\mathcal{V}$ **kiegészítő altére**, vagy **komplementer altér**, ha

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}, \quad \mathcal{V} + \mathcal{W} = \mathcal{U},$$

és azt mondjuk, hogy $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ alterek **direkt összege**, amit $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ jelöl.

T Ekvivalens állítások:

- $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$ és $\mathcal{V} + \mathcal{W} = \mathcal{U}$, azaz $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ kiegészítő alterek,
- $\mathcal{U}$ minden vektora egyértelműen áll elő egy $\mathcal{V}$ - és egy $\mathcal{W}$ -beli vektor összegeként,
- $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$ és $\dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{W} = n$.

P ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, akkor $\mathcal{S}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}^T) = \mathbb{R}^m$.

Merőleges vetítés $\mathbb{R}^n$ egy alterére

Tétel

Ha $\mathcal{W}$ az $\mathbb{R}^n$ egy altere, és az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorai a $\mathcal{W}$ egy bázisát alkotják ($\mathbf{A}$ teljes oszloprangú), akkor a $\mathcal{W}$ alterre való merőleges vetítés, azaz a $\text{proj}_{\mathcal{W}}$ leképezés mátrixa $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$.

Bizonyítás

Legyen a $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektor $\mathcal{W}$ -re eső merőleges vetülete $\mathbf{w}$. $\mathbf{A}$ oszloptere $\mathcal{W}$, ezért létezik olyan $\mathbf{x}$ vektor, hogy $\mathbf{Ax} = \mathbf{w}$. $\mathcal{W} = \mathcal{O}(\mathbf{A})$, így $\mathcal{W}^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$, tehát $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ benne van $\mathbf{A}^T$ nullterében. Eszerint $\mathbf{A}^T(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{0}$, azaz $\mathbf{A}^T(\mathbf{v} - \mathbf{Ax}) = \mathbf{0}$, innen

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{v}.$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix teljes oszloprangú, így $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ invertálható, azaz $\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{v}$, amiből $\text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{Ax} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{v}$.

Melyik mátrix merőleges vetítés mátrixa?

$\top$ Egy $\mathbf{P}$ mátrix pontosan akkor merőleges vetítés mátrixa, ha $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\top = \mathbf{P}^2$.

$$\Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top$$

$$\mathbf{P}^2 = \left(\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \right)^2 = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top = \mathbf{P},$$

$$\mathbf{P}^\top = \left(\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \right)^\top = \mathbf{A} \left((\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \right)^\top \mathbf{A}^\top = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top = \mathbf{P}.$$

$\Leftarrow$ Tegyük fel, hogy $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\top = \mathbf{P}^2$. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{P}$ az $\mathcal{O}(\mathbf{P})$ -re való merőleges vetítés mátrixa. Ehhez elég megmutatnunk, hogy az $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}$ vektor merőleges $\mathcal{O}(\mathbf{P})$ -re bármely $\mathbf{x}$ vektor esetén. A $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ feltétel miatt $\mathbf{P}(\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}) = \mathbf{P}\mathbf{x} - \mathbf{P}^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tehát $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{P})$, de $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\top$, így $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{P}^\top)$. Ez épp azt jelenti, hogy $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}$ merőleges $\mathcal{O}(\mathbf{P})$ -re, és ezt akartuk belátni.

Altértől való távolság

D $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{W} \leq \mathbb{R}^n$ altér. $\mathbf{x}$ -nek a $\mathcal{W}$ **altértől való távolságán** a $\mathcal{W}$ altér $\mathbf{x}$ -hez legközelebbi $\mathbf{w}$ vektorának tőle való távolságát értjük.

T Legjobb közelítés tétele: Az $\mathbf{x}$ vektornak egyetlen $\mathcal{W}$ -beli legjobb $\hat{\mathbf{x}}$ közelítése van, nevezetesen $\hat{\mathbf{x}} = \text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}$.

B $\mathbf{x} - \mathbf{w} = (\mathbf{x} - \text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}) + (\text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x} - \mathbf{w})$.

első kifejezés $\mathcal{W}^\perp$, a második $\mathcal{W}$ eleme!

$$(\mathbf{x} - \text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}) \perp (\text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x} - \mathbf{w})$$

$$\text{Pithagorász: } |\mathbf{x} - \mathbf{w}|^2 = |\mathbf{x} - \text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}|^2 + |\text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x} - \mathbf{w}|^2.$$

$$\rightsquigarrow |\mathbf{x} - \mathbf{w}|^2 \geq |\mathbf{x} - \text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}|^2$$

egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $\mathbf{w} = \hat{\mathbf{x}} = \text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}$

K $\mathbb{R}^n = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^\perp$.

Altértől való távolság

- P** Bontsuk fel az $\mathbf{x} = (8, 4, 2, 1)$ vektort $\mathcal{W} = \text{span}((1, -1, 1, 0), (0, 1, -1, 0))$ -be eső és $\mathcal{W}$ -re merőleges vektorok összegére.
- M** A $\mathcal{W}$ -re való merőleges vetítés mátrixa $\mathbf{P} = \mathbf{W}(\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T$, ahol $\mathbf{W}$ két oszlopa a megadott két bázisvektor:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ amiből } \mathbf{Px} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x} = \mathbf{Px} = (8, 1, -1, 0)$ és $\mathbf{x} - \text{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x} = (0, 3, 3, 1)$.

Egyenletrendszer optimális megoldása

- D Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ optimális megoldásain az $\mathbf{Ax} = \text{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \mathbf{b}$ megoldásait értjük.
- T Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer optimális megoldásai megegyeznek az

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

egyenletrendszer megoldásaival (normálegyenlet-rendszer). Ezek közül egyetlen egy esik az $\mathbf{A}$ mátrix sorterébe, a legkisebb abszolút értékű.

Lineáris és polinomiális regresszió

- T Az (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) párokhoz tartozó, $y = \hat{a} + \hat{b}x$ egyenletű regressziós egyenes paraméterei kielégítik az

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

egyenletet. Ez egyértelműen megoldható, ha van legalább két különböző x_i érték.

- B Megoldandó:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

A hozzá tartozó normálegyenlet-rendszer

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

Vetítés

- D** $\mathcal{U} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, így bármely $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ egyértelműen előáll $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ alakban, ahol $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$. A $\mathbf{v}$ vektor az $\mathbf{u}$ vektornak a $\mathcal{V}$ altérre $\mathcal{W}$ mentén való (vele párhuzamosan vett) **vetülete**.
- D** Ez lineáris transzformáció, **vetítésnek** vagy **projekciónak** nevezzük.
- M** minden P vetítés az $\text{Im } P$ -re $\text{Ker } P$ mentén való vetítés.
- Á** Mátixa: $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{V}$ bázisa $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$, $\mathcal{W}$ bázisa $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{n-r}\}$.

Legyen

$$\mathbf{U} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_r | \mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_{n-r}] = [\mathbf{V} | \mathbf{W}].$$

Mivel $P\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) és $P\mathbf{w}_j = \mathbf{0}$ ($j = 1, 2, \dots, n-r$), ezért a P leképezés $\mathbf{P}$ mátrixára

$$\mathbf{P}\mathbf{U} = \mathbf{P}[\mathbf{V} | \mathbf{W}] = [\mathbf{P}\mathbf{V} | \mathbf{P}\mathbf{W}] = [\mathbf{V} | \mathbf{O}].$$

$\mathbf{U}$ invertálható, ezért

$$\mathbf{P} = [\mathbf{V} | \mathbf{O}]\mathbf{U}^{-1} = [\mathbf{V} | \mathbf{O}][\mathbf{V} | \mathbf{W}]^{-1}.$$

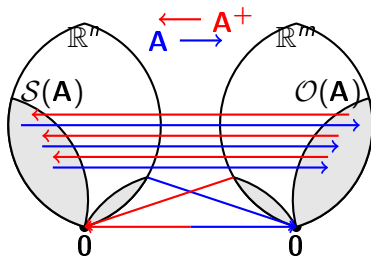
Vetítés

T A projekció tulajdonságai: Legyen $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ egy projekció.

1. $\mathbb{R}^n$ -nek van olyan bázisa, melyben a mátrixa $\mathbf{P} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$.
2. $I - P$ is projekció: $\text{Ker}(I - P) = \text{Im } P$, $\text{Im}(I - P) = \text{Ker } P$,
3. $r(P) = \text{trace}(\mathbf{P})$.

A pseudoinverz fogalma

Á A sortér és az oszloptér közt létezik természetes kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés ($\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyetlen sortérbe eső megoldása).



D $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ **pseudoinverzén** vagy **Moore–Penrose-féle pseudoinverzén** azt az $\mathbf{A}^+$ -szal jelölt mátrixot értjük, amellyel

- a sortér minden $\mathbf{x}$ vektorára $\mathbf{A}^+(\mathbf{Ax}) = \mathbf{x}$, továbbá
- az oszloptérre merőleges minden $\mathbf{z}$ vektorra $\mathbf{A}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

Néhány pszedoinverz

Á $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$, ha $\mathbf{A}$ invertálható,

Á $\mathbf{O}_{m \times n}^+ = \mathbf{O}_{n \times m}$,

Á $[a]^+ = [1/a]$, ha $a \neq 0$, és $[0]^+ = [0]$,

Á $(\mathbf{A}^+)^+ = \mathbf{A}$,

Á ha $a_{ii} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, r$), akkor

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & 0 & \dots & 0 & \mathbf{O} \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \mathbf{O} \\ \hline & & & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{array} \right]_{m \times n}^+ = \left[\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 & \mathbf{O} \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{rr}} & \mathbf{O} \\ \hline & & & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{array} \right]_{n \times m}$$

A pszéudo inverz kiszámítása

T Ha a valós $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú, akkor $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$,
 ha teljes sorrangú, akkor $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1}$.

Legyen $\mathbf{A} = \mathbf{B} \mathbf{C}$, ahol $\mathbf{B}$ egy teljes oszloprangú, $\mathbf{C}$ egy teljes sorrangú mátrix (ld. bázisfelbontás). Ekkor

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{C}^+ \mathbf{B}^+ = \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{C}^T)^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T = \mathbf{C}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{C}^T)^{-1} \mathbf{B}^T.$$

B Ha $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú, akkor $\mathbb{R}^n = \mathcal{S}(\mathbf{A})$, és $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ invertálható:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Meg kell még mutatnunk, hogy ha $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$, vagyis $\mathbf{A}^T \mathbf{z} = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{A}^+ \mathbf{z} = \mathbf{0}$: $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{z} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Ha $\mathbf{A}$ teljes sorrangú, akkor $\mathcal{O}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^m$: $\forall \mathbf{y}$ -ra $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$ konzisztens.

Jelölje $\hat{\mathbf{x}}$ az egyetlen sortérbe eső megoldást, így minden más $\mathbf{x}$ megoldásra $\text{proj}_{\mathcal{S}(\mathbf{A})} \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$. $\mathbf{A}^+$ -ra fenn kell álljon $\mathbf{A}^+ \mathbf{y} = \hat{\mathbf{x}}$:

$$\text{proj}_{\mathcal{S}(\mathbf{A})} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \right) (\mathbf{A} \mathbf{x}) = \mathbf{A}^+ \mathbf{y}.$$

A pseudoinverz tulajdonságai

T Moore–Penrose-tétel: A valós $\mathbf{A}$ mátrixnak $\mathbf{X}$ pontosan akkor pseudoinverze, ha az alábbi négy feltétel mindegyike fennáll:

$$a) \mathbf{AXA} = \mathbf{A}, \quad b) \mathbf{XAX} = \mathbf{X}, \quad c) (\mathbf{AX})^T = \mathbf{AX}, \quad d) (\mathbf{XA})^T = \mathbf{XA}.$$

K Tetszőleges $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix esetén

$$\mathbf{A}^+ \mathbf{A} = \text{proj}_{\mathcal{S}(\mathbf{A})} \quad \text{és} \quad \mathbf{A} \mathbf{A}^+ = \text{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})}.$$

Tehát $\mathbf{A}^+ \mathbf{A}$ az $\mathbb{R}^n$ teret merőlegesen vetíti $\mathbf{A}$ sorterére, míg $\mathbf{A} \mathbf{A}^+$ az $\mathbb{R}^m$ teret merőlegesen vetíti $\mathbf{A}$ oszlopterére.

A pseudoinverz és a min. absz. értékű opt. megoldás

- T** Legyen $\mathbf{A}$ egy valós mátrix. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek az $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$ a minimális abszolút értékű optimális megoldása.
- P** Határozzuk meg a minimális abszolút értékű optimális megoldását!

$$y + z = 3$$

$$x + y + 2z = 2$$

$$x + y = 2$$

- M** Az egyenletrendszer nem oldható meg:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Ezt felhasználva a minimális abszolút értékű optimális megoldás

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+\mathbf{b} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ortogonalis és ortonormált bázis

- D OR (ortogonalis rendszer, lehet köztük zérusvektor), ONR (ortonormált rendszer)
- T Ha a nullvektortól különböző $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ vektorok páronként ortogonálisak, akkor függetlenek is.
- B Tekintsük a $c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ egyenletet.

Szorozzuk be az egyenlőség mindkét oldalát $\mathbf{a}_i$ -vel ($i = 1, 2, \dots, k$):

$$(c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_k\mathbf{a}_k) \cdot \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \cdot \mathbf{a}_i$$

$$c_i\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i = 0.$$

Mivel $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i \neq 0$, ezért $c_i = 0$, és ez igaz minden i -re.

Ortogonalis és ortonormált bázis

T Legjobb közelítés ONB esetén Adva van a $\mathcal{V}$ vektortérben egy $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k\}$ ortonormált rendszer által kifeszített $\mathcal{A}$ altér, valamint egy $\mathbf{v}$ vektor. Ekkor a

$$\hat{\mathbf{v}} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + \dots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k \quad (1)$$

vektor az $\mathcal{A}$ altér $\mathbf{v}$ -hez legközelebb fekvő pontja, azaz $\hat{\mathbf{v}} = \text{proj}_{\mathcal{A}} \mathbf{v}$.

B Megmutatjuk, hogy az (1) szerinti pont van legközelebb $\mathbf{v}$ -hez:

$$(\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}})^2 = \left(\mathbf{v} - \sum_{i=1}^k (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i \right)^2 = \mathbf{v}^2 - \sum_{i=1}^k (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)^2.$$

$\mathbf{v}$ és az altér egy tetszőleges $\mathbf{u}$ vektorának távolságnégyzete:

$$(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 = \left(\mathbf{v} - \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{e}_i \right)^2 = \mathbf{v}^2 - 2 \sum_{i=1}^k c_i (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) + \sum_{i=1}^k c_i^2.$$

Ortogonalis és ortonormált bázis

A különbségük pozitív, tehát valóban $\hat{\mathbf{v}}$ van $\mathbf{v}$ -hez legközelebb:

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 - (\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}})^2 \\
 &= \left(\mathbf{v}^2 - 2 \sum_{i=1}^k c_i (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) + \sum_{i=1}^k c_i^2 \right) - \left(\mathbf{v}^2 - \sum_{i=1}^k (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)^2 \right) \\
 &= \sum_{i=1}^k c_i^2 - 2 \sum_{i=1}^k c_i (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) + \sum_{i=1}^k (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^k (c_i - \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)^2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Ebből a legjobb közelítés tétele szerint kapjuk, hogy $\hat{\mathbf{v}} = \text{proj}_{\mathcal{A}} \mathbf{v}$.

Ortogonalis mátrixok

- D** Egy valós négyzetes mátrix **ortogonális**, ha oszlopvektorai vagy sorvektorai ONR-t alkotnak. Ha nem kötjük ki, hogy négyzetes legyen, **szemiortogonális** mátrixról beszélünk.
- P** A forgatás, tükrözés mátrixa, és minden permutációmátrix ortogonális.
- T** Legyen $m \geq n$ és $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Ekkor $\mathbf{Q}$ szemiortogonális $\iff \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$ ($m \leq n$ esetén $\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}_n$)
- B** sorvektorszor oszlopvektor
- T** Legyen $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Az alábbi állítások ekvivalensek:
- $\mathbf{Q}$ oszlopvektorai ortonormált rendszert alkotnak.
 - $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$.
 - $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$.
 - $\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}_n$.
 - $\mathbf{Q}$ sorvektorai ortonormált rendszert alkotnak.
- Á** $|\det(\mathbf{Q})| = 1$, $O(n)$ és $SO(n)$ zárt a szorzásra és invertálásra nézve.

Ortogonalis mátrixok geometriája

T **Ortogonalis mátrixhoz tartozó mátrixleképezés** Legyen $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Az alábbi állítások ekvivalensek:

a) Q ortogonalis.

b) $|Qx| = |x|$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ vektorra.

c) $Qx \cdot Qy = x \cdot y$ minden $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektorra.

B a) $\Rightarrow$ b): Ha Q ortogonalis, akkor $Q^T Q = I$, így tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n$ vektorra $|Qx|^2 = Qx \cdot Qx = (Qx)^T (Qx) = x^T Q^T Q x = x^T x = |x|^2$.

b) $\Rightarrow$ c): A skalárszorzás abszolút értékkel való kifejezéséből:

$$\begin{aligned} Qx \cdot Qy &= \frac{1}{4} (|Qx + Qy|^2 - |Qx - Qy|^2) = \frac{1}{4} (|Q(x + y)|^2 - |Q(x - y)|^2) \\ &= \frac{1}{4} (|x + y|^2 - |x - y|^2) = x \cdot y \end{aligned}$$

c) $\Rightarrow$ a): A Q mátrix i -edik oszlopa $q_i = Qe_i$

$$q_i \cdot q_j = Qe_i \cdot Qe_j = e_i \cdot e_j = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j, \\ 1, & \text{ha } i = j. \end{cases}$$

A 2- és 3-dimenziós tér ortogonális transzformációi

- T Minden $O(2)$ -be eső ortogonális mátrix vagy egy α szögű forgatás, vagy egy $\alpha/2$ szögű egyenesre való tükrözés mátrixa, azaz

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad \text{vagy} \quad \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}$$

- T A harmadrendű 1 determinánsú ortogonális transzformációk a forgatások, a -1 determinánsúak, azaz $O(3) - SO(3)$ elemei egy tükrözés és egy forgatás egymás utáni alkalmazásával megkaphatók.

Givens-forgatás

- D Givens-forgatás:** forgatás, mely egy koordinátasík vektorain kívül minden más vektort helyben hagy. Az i -edik és j -edik koordinátákra:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \cos \alpha & \dots & -\sin \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \sin \alpha & \dots & \cos \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- M** E forgatással elérhető például, hogy egy $\mathbf{x}$ vektort egy olyan vektorba forgassunk, melynek j -edik koordinátája 0. Csak az i -edik és j -edik sorokat és oszlopokat kiemelve

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow r = \sqrt{a^2 + b^2}, \cos \alpha = \frac{a}{r}, \sin \alpha = -\frac{b}{r}$$

Householder-tükrözés

- D Householder-tükrözés:** Egy adott $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektorra merőleges hipersíkra való tükrözést **Householder-tükrözésnek** nevezzük. Mátrixa

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}} \mathbf{a} \mathbf{a}^T$$

- T** Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két különböző, de azonos hosszúságú vektor $\mathbb{R}^n$ -ben, akkor az $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^\perp$ hipersíkra való H-tükrözés $\mathbf{a}$ -t és $\mathbf{b}$ -t fölcseréli.

- B** Megmutatjuk, hogy $\mathbf{H}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ és $\mathbf{H}\mathbf{b} = \mathbf{a}$, ahol

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{2}{(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T (\mathbf{a} - \mathbf{b})} (\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T.$$

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}^T \mathbf{a} - \mathbf{a}^T \mathbf{b} - \mathbf{b}^T \mathbf{a} + \mathbf{b}^T \mathbf{b} = 2(\mathbf{a}^T \mathbf{a} - \mathbf{b}^T \mathbf{a}) = 2(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T \mathbf{a}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\mathbf{a} &= \mathbf{a} - \frac{2}{(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T (\mathbf{a} - \mathbf{b})} (\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T \mathbf{a} \\ &= \mathbf{a} - \frac{1}{(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T \mathbf{a}} (\mathbf{a} - \mathbf{b})^T \mathbf{a} (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} - (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}$, ezért $\mathbf{H}\mathbf{b} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{a}$.

Gram–Schmidt-ortogonalizáció

T Gram–Schmidt-ortogonalizáció Ha $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ egy független vektorrendszer, akkor létezik olyan ortogonális $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ vektorrendszer, hogy minden $i = 1, 2, \dots, k$ esetén

$$\text{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_i) = \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i). \quad (2)$$

Az ortogonális $\mathcal{V}$ rendszerből a vektorok normálásával kapott

$$\left\{ \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}, \frac{\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|}, \dots, \frac{\mathbf{v}_k}{|\mathbf{v}_k|} \right\}$$

rendszer ortonormált.

Gram–Schmidt-ortogonalizáció

B $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 \rightsquigarrow \text{span}(\mathbf{a}_1) = \text{span}(\mathbf{v}_1)$.

A $\text{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ teljesüléséhez:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \left(\mathbf{a}_2 \cdot \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} \right) \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1$$

E vektor nem 0-vektor, hisz $\mathbf{v}_2 = 0$ esetén $\mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{a}_1$ lenne, azaz $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ nem lenne független.

$\rightsquigarrow \text{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \dots$

kiszámoljuk az $\mathbf{a}_{i+1}$ vektornak a $\text{span}\left(\frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}, \frac{\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|}, \dots, \frac{\mathbf{v}_i}{|\mathbf{v}_i|}\right)$ altérre merőleges összetevőjét, ez lesz $\mathbf{v}_{i+1}$

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{a}_{i+1} - \frac{\mathbf{a}_{i+1} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{a}_{i+1} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 - \dots - \frac{\mathbf{a}_{i+1} \cdot \mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i} \mathbf{v}_i$$

$\mathbf{v}_{i+1} \neq \mathbf{0}$, különben $\mathcal{A}$ nem volna független. $\mathbf{v}_{i+1}$ kifejezhető az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i+1}$ vektorok lineáris kombinációjaként, és $\mathbf{a}_{i+1}$ kifejezhető az $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{i+1}$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Gram–Schmidt-ortogonalizáció

- P** Keressünk ortonormált bázist az $(1, 1, 1, 1)$, $(3, -1, 3, -1)$, $(6, 2, 2, -2)$ vektorok által kifeszített altérben.
- M** Először keressünk egy ortogonális bázist:

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1)$$

$$\mathbf{v}_2 = (3, -1, 3, -1) - \frac{(3, -1, 3, -1) \cdot (1, 1, 1, 1)}{(1, 1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1, 1)}(1, 1, 1, 1) = (2, -2, 2, -2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 = (6, 2, 2, -2) - \frac{(6, 2, 2, -2) \cdot (1, 1, 1, 1)}{(1, 1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1, 1)}(1, 1, 1, 1) \\ - \frac{(6, 2, 2, -2) \cdot (2, -2, 2, -2)}{(2, -2, 2, -2) \cdot (2, -2, 2, -2)}(2, -2, 2, -2) = (2, 2, -2, -2) \end{aligned}$$

Végül az ortonormált bázis:

$$\left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\}$$

A QR-felbontás

- D** Legyen $\mathbf{A}$ egy teljes oszloprangú mátrix. Az $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ felbontást **QR-felbontásnak** vagy **redukált QR-felbontásnak** nevezzük, ha $\mathbf{Q}$ az $\mathbf{A}$ -val azonos méretű szemiortogonális mátrix, és $\mathbf{R}$ négyzetes felső háromszögmátrix, főátlójában pozitív elemekkel.
- T** Teljes oszloprangú valós mátrix QR-felbontása létezik és egyértelmű. A $\mathbf{Q}$ mátrixot ortonormált oszlopvektorok hozzávételével kiegészíthetjük egy ortogonális mátrixszá, az $\mathbf{R}$ mátrixot pedig zérussorok hozzávételével egy $m \times n$ -es felső háromszögmátrixszá, akkor e mátrixok szorzata is $\mathbf{A}$, ugyanis

$$\mathbf{A} = [\mathbf{Q} \quad \hat{\mathbf{Q}}] \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} = \mathbf{QR} + \hat{\mathbf{Q}}\mathbf{O} = \mathbf{QR}$$

Ezt nevezzük **teljes QR-felbontásnak**.

A QR létezése a Gram–Schmidt-ortogonalizációs eljárásból:
 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_k] \in \mathbb{R}^{n \times k}$ teljes oszloprangú ($k \leq n$), a
 $\mathbf{q}$ -vektorokra: $\text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i) = \text{span}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_i)$ minden
 $i = 1, 2, \dots, k$ értékre, ezért léteznek olyan r_{ij} skalárok, hogy

$$\mathbf{a}_1 = r_{11}\mathbf{q}_1$$

$$\mathbf{a}_2 = r_{12}\mathbf{q}_1 + r_{22}\mathbf{q}_2$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{a}_k = r_{1k}\mathbf{q}_1 + r_{2k}\mathbf{q}_2 + \dots + r_{kk}\mathbf{q}_k.$$

Ezt mátrixszorzat-alakba írva épp a kívánt felbontást kapjuk:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_k] = [\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \dots \ \mathbf{q}_k] \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1k} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{kk} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}\mathbf{R}.$$

A Gram–Schmidt-eljárásból az is látható, hogy $r_{ii} = |\mathbf{v}_i|$, tehát $r_{ii} > 0$.
 $\mathbf{R}$ kiszámítása: $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{R} = \mathbf{I}_k \mathbf{R} = \mathbf{R}$, tehát $\mathbf{R} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A}$.

QR-felbontás primitív ortogonális transzformációkkal

P QR-felbontását Givens-forgatásokkal: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 3 & 10 & 6 \\ 0 & 12 & 13 \end{bmatrix}$

M $a = 4$, $b = 3$, tehát $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $\cos \alpha = 4/5$, $\sin \alpha = -3/5$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 & 0 \\ -3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 12 & 13 \end{bmatrix}.$$

Következő lépésben a $\mathbf{Q}_1 \mathbf{A}$ mátrix harmadik sorának második elemét elimináljuk:

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/13 & 12/13 \\ 0 & -12/13 & 5/13 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 0 & 13 & 12 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

és innen

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1)^{-1} = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_2^T = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/13 & 36/65 \\ 3/5 & 4/13 & -48/65 \\ 0 & 12/13 & 5/13 \end{bmatrix},$$

QR-felbontás primitív ortogonális transzformációkkal

$$\begin{aligned}
 A = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} &\rightarrow Q_1 A = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix} \rightarrow Q_2 Q_1 A = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \rightarrow Q_3 Q_2 Q_1 A = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix} \\
 Q_1 = H_1 & \quad Q_2 = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & H_2 & \\ 0 & & & \end{array} \right] \quad Q_3 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & H_3 & \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

P QR-felbontását Householder-módszerrel: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & -7 \end{bmatrix}$

M $(1, 2, -2) \mapsto (3, 0, 0)$ trafóhoz $\mathbf{a} = (1, 2, -2) - (3, 0, 0) = (-2, 2, -2)$

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{I}_3 - \frac{2\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$(4, 3) \mapsto (5, 0)$ transzformációh $\mathbf{a} = (4, 3) - (5, 0) = (-1, 3)$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{I}_2 - \frac{2}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_2 = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 4/5 & 3/5 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \end{array} \right], \quad \mathbf{R} = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1)^{-1} = \mathbf{Q}_1^T\mathbf{Q}_2^T = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 14 \\ 10 & 10 & -5 \\ -10 & 11 & 2 \end{bmatrix}.$$

Egyenletrendszer optimális megoldása QR-felbontással

T Legyen $\mathbf{A}$ egy teljes oszloprangú $m \times n$ -es valós mátrix, $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ egy QR-felbontása, és $\mathbf{b}$ egy $\mathbb{R}^m$ -beli vektor.

Ekkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egyetlen optimális megoldása $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{b}$, ami megkapható az $\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^T\mathbf{b}$ egyenletrendszerből egyszerű visszahelyettesítéssel is.

B Optimális megoldás a normálegyenletből:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^T\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^T\mathbf{b} & \mathbf{A} = \mathbf{QR} \text{ behelyettesítése után} \\
 (\mathbf{QR})^T\mathbf{QR}\hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{QR})^T\mathbf{b} \\
 \mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{QR}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{b} & \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I} \\
 \mathbf{R}^T\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{b} & \text{balról szorzás az } (\mathbf{R}^T)^{-1} \text{ mátrixszal} \\
 \mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{Q}^T\mathbf{b}.
 \end{aligned}$$

Komplex vektorok skaláris szorzata

? komplex számok skaláris szorzata

$$(1, i) \cdot (1, i) \stackrel{?}{=} 1 - 1 = 0$$

$$(i, i) \cdot (i, i) \stackrel{?}{=} -1 - 1 = -2$$

D lehetőségek:

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} + \cdots + z_n \overline{w_n}, \text{ vagy}$$

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \overline{z_1} w_1 + \overline{z_2} w_2 + \cdots + \overline{z_n} w_n.$$

D Az $\mathbf{A}$ komplex mátrix **adjungáltján** (vagy **Hermite-féle transzponáltján**) elemenkénti konjugáltjának transzponáltját értjük. Az $\mathbf{A}$ adjungáltját $\mathbf{A}^*$, vagy Hermite neve után $\mathbf{A}^H$ jelöli, tehát $\mathbf{A}^H = \overline{\mathbf{A}}^T$.

D $\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \overline{z_1} w_1 + \overline{z_2} w_2 + \cdots + \overline{z_n} w_n = \mathbf{z}^H \mathbf{w}$.

Adjungált és a skaláris szorzás tulajdonságai

T Legyenek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ komplex mátrixok, c komplex szám. Ekkor

- $(\mathbf{A}^H)^H = \mathbf{A}$,
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^H = \mathbf{A}^H + \mathbf{B}^H$,
- $(c\mathbf{A})^H = \bar{c}\mathbf{A}^H$
- $(\mathbf{AB})^H = \mathbf{B}^H\mathbf{A}^H$.

T Legyen $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$, és legyen $c \in \mathbb{C}$. Ekkor

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}$
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$,
- $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \bar{c}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ és $\mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$,
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0$, ha $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, és $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$, ha $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

D A komplex skaláris szorzás segítségével – a valós esethez hasonlóan – definiálható a komplex vektorok távolsága és szöge, és így a merőlegessége is.

Önadjungált – Hermite-féle – mátrixok

D $\mathbf{A}$ önadjungált, ha $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$.

P Melyik önadjungált?

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 2-3i \\ 1-i & 2+3i & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2 \end{bmatrix}$$

az első kettő

Unitér mátrixok

D Egy komplex négyzetes $\mathbf{U}$ mátrix **unitér**, ha $\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}$.

Á Az alábbiak ekvivalensek:

- $\mathbf{U} \mathbf{U}^H = \mathbf{I}$,
- $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^H$,
- $\mathbf{U}$ oszlopvektorai ortonormált bázist alkotnak a komplex skalárszorzásra nézve,
- $\mathbf{U}$ sorvektorai ortonormált bázist alkotnak a komplex skalárszorzásra nézve,
- $|\mathbf{U}\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$ minden $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vektorra,
- $\mathbf{U}\mathbf{x} \cdot \mathbf{U}\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

M A Fourier-sorok komplex alakja, és részletösszegei (diszkrét Fourier-összeg):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nit} \quad g(t) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{nit} = c_0 + c_1 e^{it} + c_1 e^{2it} + \dots + c_{N-1} e^{(N-1)it}$$

Á A $(c_0, c_1, \dots, c_{N-1}) \mapsto (g(0), g(\frac{2\pi}{N}), \dots, \frac{2(N-1)\pi}{N})$ leképezés lineáris, és mátrixa $[e^{\frac{2\pi i}{N} mn}]$ $(0 \leq m, n < N)$.

P A $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ jelöléssel

$$y_0 = c_0 + c_1 e^{i0} + c_2 e^{2i0} = c_0 + c_1 + c_2$$

$$y_1 = c_0 + c_1 e^{\frac{2\pi i}{3}} + c_2 e^{\frac{4\pi i}{3}} = c_0 + c_1 \varepsilon + c_2 \varepsilon^2$$

$$y_2 = c_0 + c_1 e^{\frac{4\pi i}{3}} + c_2 e^{\frac{8\pi i}{3}} = c_0 + c_1 \varepsilon^2 + c_2 \varepsilon^4$$

a $(c_0, c_1, c_2) \mapsto (y_0, y_1, y_2)$ leképezés lineáris, mátrixszorzatos alakja:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Általánosan:

$$y_0 = c_0 + c_1 e^{i0} + c_2 e^{2i0} + \cdots + c_{N-1} e^{(N-1)i0} = c_0 + c_1 + \cdots + c_{N-1}$$

$$y_1 = c_0 + c_1 e^{\frac{2\pi i}{N}} + c_2 e^{\frac{4\pi i}{N}} + \cdots + c_{N-1} e^{\frac{2(N-1)\pi i}{N}}$$

$$\vdots$$

$$y_{N-1} = c_0 + c_1 e^{\frac{2\pi i(N-1)}{N}} + c_2 e^{\frac{4\pi i(N-1)}{N}} + \cdots + c_{N-1} e^{\frac{2\pi i(N-1)^2}{N}}$$

Az $\varepsilon = e^{2\pi i/N}$ jelöléssel mátrixszorzat-alakban

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \cdots & \varepsilon^{N-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 & \cdots & \varepsilon^{2(N-1)} \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 & \cdots & \varepsilon^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varepsilon^{N-1} & \varepsilon^{2(N-1)} & \varepsilon^{3(N-1)} & \cdots & \varepsilon^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{bmatrix}$$

D Fourier-mátrixok: az $\varepsilon = e^{2\pi i/N}$, $\omega = \bar{\varepsilon} = e^{-2\pi i/N}$ jelölésekkel:

$$\Phi_{N,\varepsilon} = \mathbf{V}_N(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{N-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \dots & \varepsilon^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varepsilon^{N-1} & \dots & \varepsilon^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{N,\omega} = \mathbf{V}_N(1, \omega, \dots, \omega^{N-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \dots & \omega^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

T A Fourier-mátrixok tulajdonságai:

- Bármelyik Fourier-mátrix k -adik és $N - k$ -adik sora egymás konjugáltja, páros N esetén pedig az $N/2$ -edik sorvektor $(1, -1, 1, -1, \dots)$.
- $\Phi_{N,\omega} = \bar{\Phi}_{N,\varepsilon} = \Phi_{N,\varepsilon}^H$ és $\Phi_{N,\varepsilon} = \bar{\Phi}_{N,\omega} = \Phi_{N,\omega}^H$
- $\Phi_{N,\varepsilon} \Phi_{N,\omega} = NI_N$, így $\Phi_{N,\varepsilon}$ és $\Phi_{N,\omega}$ invertálható,

$$\Phi_{N,\varepsilon}^{-1} = \frac{1}{N} \Phi_{N,\omega}, \quad \Phi_{N,\omega}^{-1} = \frac{1}{N} \Phi_{N,\varepsilon},$$

továbbá $\frac{1}{\sqrt{N}} \Phi_{N,\varepsilon}$ és $\frac{1}{\sqrt{N}} \Phi_{N,\omega}$ unitér.

M A továbbiakban

$$f(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{nit}$$

függvényből indulunk ki, a megadott helyek a $[0, 2\pi]$ intervallumot N részre osztó $2k\pi/N$ ($k = 0, 1, \dots, N-1$) pontok. A

$F_N : (c_0, c_1, \dots, c_{N-1}) \mapsto (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ $\mathbf{F}_N = \Phi_{N,\omega}$, amelyre a továbbiakban az

D Diszkrét Fourier-transzformáció (DFT) Az

$$F_N : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{X} = \mathbf{F}_N \mathbf{x}$$

P Az F_1 , F_2 , F_4 és F_8 mátrixok:

$$F_1 = [1], \quad F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad F_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix},$$

$$F_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & -i & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & i & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & i & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & -i & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & -i & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & i & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \\ 1 & i & -1 & i & 1 & i & -1 & i \\ 1 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & i & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & -i & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

T A DFT tulajdonságai

- Konstans vektor képe impulzusvektor (melynek a nulladikat kivéve mindegyik koordinátája 0), és fordítva, konkrétan

$$F_N(c, c, \dots, c) = (Nc, 0, \dots, 0), \quad F_N(c, 0, \dots, 0) = (c, c, \dots, c).$$

ahol $c \in \mathbb{C}$ tetszőleges konstans.

- Ha $\mathbf{x}$ valós vektor, akkor $X_{N-k} = \overline{X_k}$.
- Az F_N transzformáció invertálható, inverze (IDFT) többféle felírásban:

$$\mathbf{x} = F_N^{-1} \mathbf{X} = \frac{1}{N} \Phi_{N,\varepsilon} \mathbf{X}, \quad x_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n \varepsilon^{kn} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{\frac{2\pi i}{N} kn}.$$

M DFT kiszámításához N^2 művelet

M két fele akkora méretű Fourier-transzformációból megkapható:

$$\begin{aligned}
 X_k &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{\frac{-2\pi i}{N} kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \omega_N^{kn} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} e^{\frac{-2\pi i}{N} 2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} e^{\frac{-2\pi i}{N} (2n+1)k} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} e^{\frac{-2\pi i}{N/2} nk} + e^{\frac{-2\pi i}{N} k} \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} e^{\frac{-2\pi i}{N/2} nk} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} \omega_{N/2}^{nk} + \omega_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} \omega_{N/2}^{nk} = E_k + \omega_N^k O_k.
 \end{aligned}$$

E_k és O_k $N/2$ szerint periodikusak $\rightsquigarrow E_{k+N/2} = E_k$, $O_{k+N/2} = O_k$

Innen $k < N/2$ esetén $X_k = E_k + \omega_N^k O_k$, $X_{k+N/2} = E_k - \omega_N^k O_k$.

A műveletigény $\frac{3}{2} N \log N$.

```
function FFT(x)
```

```
   $N \leftarrow \text{dim}(\mathbf{x})$ 
```

```
  X legyen  $N$ -dimenziós vektor
```

```
  if  $N = 1$  then
```

```
     $X_0 \leftarrow x_0$ 
```

```
  else
```

```
     $\mathbf{y} \leftarrow \mathbf{x}$  páros indexű elemei
```

```
     $\mathbf{z} \leftarrow \mathbf{x}$  páratlan indexű elemei
```

```
    Y  $\leftarrow \text{FFT}(\mathbf{y})$ 
```

```
    Z  $\leftarrow \text{FFT}(\mathbf{z})$ 
```

```
    for  $k \leftarrow 0$  to  $N/2 - 1$  do
```

```
       $E \leftarrow Y_k$ 
```

```
       $O \leftarrow e^{\frac{-2\pi i}{N}k} Z_k$ 
```

```
       $X_k \leftarrow E + O$ 
```

```
       $X_{k+N/2} \leftarrow E - O$ 
```

```
  return X
```

M FFT mátrixszorzat-alakja

$$\mathbf{F}_N = \Delta_N \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{N/2} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}_{N/2} \end{bmatrix} \mathbf{\Pi}_N,$$

$\mathbf{\Pi}_N$ az a permutációs mátrix, mely előre veszi a páros indexű elemeket, Δ_N a „fél” transzformáltakat összeadó, és a páratlan indexűeket egy ω -hatvánnyal beszorzó mátrix.

$$\mathbf{\Pi}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Pi}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{I}_2 & -\mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \quad \Delta_8 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_4 & \mathbf{D}_4 \\ \mathbf{I}_4 & -\mathbf{D}_4 \end{bmatrix}$$

A Δ mátrixokban szereplő diagonális mátrixok az egységmátrixok, és az ω hatványait tartalmazó $\mathbf{D}$ mátrixok, ahol

$\mathbf{D}_k = \text{diag}(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{k-1})$. Pl.

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_8 &= \Delta_8 \begin{bmatrix} \mathbf{F}_4 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}_4 \end{bmatrix} \Pi_8 \\ &= \Delta_8 \begin{bmatrix} \Delta_4 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \Delta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_2 & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}_2 & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{F}_2 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_4 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \Pi_4 \end{bmatrix} \Pi_8.\end{aligned}$$

