1. Igazoljuk, hogy tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}) \quad (\text{vagy } |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|),$$

és mutassuk meg, hogy egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ párhuzamosak.

Megoldás. ld. könyv 1.44. Tétel.

2. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2\right).$$

Megoldás. Útmutatás: bontsuk ki a jobb oldalt.

3. Definiáljuk $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ vektorok skaláris szorzatát az $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^n \bar{x}_k y_k$ képlettel. Mutassuk meg, hogy
a) $\mathbf{x} \cdot (\lambda \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$, $(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \bar{\lambda}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$,
b) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \overline{\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}}$.

Megoldás. Használjuk a definíció!

4. *a)* Számítsuk ki a komplex N-edik egységgyökök összegét.
b) Számítsuk ki a komplex N-edik egységgyökök n-edik hatványainak összegét.

Megoldás. *a)* Legyen ε egy primitív N-edik egységgyök, ennek hatványai kiadják az összes N-edik egységgyököt. Ezek összege $N > 1$ esetén 0, ugyanis $(1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{N-1})(1 - \varepsilon) = 1 - \varepsilon^N = 1 - 1 = 0$. Ha $N > 1$, akkor $\varepsilon \neq 1$, így az első tényező 0. *b)* Hasonlóan az előzőhöz kapjuk, hogy az eredmény N, ha n osztható N-nel, egyébként 0.

5. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{C}$ egy primitív N-edik egységgyök. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{x}_k = (1, \varepsilon^k, \varepsilon^{2k}, \ldots, \varepsilon^{(N-1)k})$ $(0 \leq k < N)$, akkor

$$\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{x}_j = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq j, \\ N, & \text{ha } k = j. \end{cases}$$

Megoldás. Vegyük figyelembe, hogy $\bar{\varepsilon} = \varepsilon^{-1}$.

6. Igazoljuk, hogy a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ vektorrendszerre az alábbi két állítás ekvivalens:
a) ha $\sum_{k=1}^n c_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, akkor $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$,
b) ha $n > 1$, akkor egyik vektor sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként, ha $n = 1$, akkor $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$.

Megoldás. ld. könyv 1.48. Tétel.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^k$ vektorok közül csak $\mathbf{v}_1$ áll elő a többi lineáris kombinációjaként, akkor $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$.

Megoldás. Ha $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, akkor a $\mathbf{v}_1 = \sum_{i=2}^n c_i v_i$ lineáris kombinációban van olyan i index, hogy $c_i \neq 0$. Ekkor $\mathbf{v}_i$ kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként.

8. Egy nullvektortól különböző elemekből álló, legalább kételemű $\mathbb{R}^n$-beli $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha van olyan $t \geq 2$ index, hogy $\mathbf{v}_t$ a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots$, $\mathbf{v}_{t-1}$ vektorok lineáris kombinációja.

Megoldás. Legyen t az a legkisebb egész, melyre a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots$, $\mathbf{v}_t$ vektorok már összefüggők. Mivel $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, ezért az első vektor nem lehet összefüggő, ezért $t \geq 2$. E vektorok összefüggősége miatt vannak olyan c_i konstansok, melyekkel

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_t \mathbf{v}_t = \mathbf{0}.$$

Biztos, hogy $c_t \neq 0$, különben már a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_{t-1}$ vektorok is lineáris összefüggők lennének, és ez ellentmond t definíciójának. Így

$$\mathbf{v}_t = \frac{-c_1}{c_t}\mathbf{v}_1 + \frac{-c_2}{c_t}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{-c_{t-1}}{c_t}\mathbf{v}_{t-1},$$

ami bizonyítja, hogy összefüggő vektorrendszerben létezik ilyen vektor. Az állítás másik fele definíció szerint igaz, hisz ha létezik ilyen $\mathbf{v}_t$ vektor, akkor ez valóban lineáris kombinációja az összes többi vektornak.

9. Igazoljuk, hogy egy vektortér vektorainak egy véges $\mathcal{V}$ halmaza pontosan akkor lineárisan független, ha span($\mathcal{V}$) bármely vektora csak egyféleképp áll elő $\mathcal{V}$ vektorainak lineáris kombinációjaként.

Megoldás. Először tegyük fel, hogy span($\mathcal{V}$)-nek van olyan $\mathbf{w}$ eleme, amely kétféleképp áll elő, vagyis $\mathbf{w} = \sum_{v\in\mathcal{V}} c_{\mathbf{v}}\mathbf{v} = \sum_{v\in\mathcal{V}} d_{\mathbf{v}}\mathbf{v} \longrightarrow \mathbf{0} = \sum_{v\in\mathcal{V}}(c_{\mathbf{v}} - d_{\mathbf{v}})\mathbf{v}$. Mivel a 2 előállítás különböző, ezért valamely $\mathbf{v}$-re $c_{\mathbf{v}} - d_{\mathbf{v}} \neq 0$, tehát a nullvektor egy nemtriviális előállítását kaptuk. A másik irányhoz tegyük fel, hogy a rendszer lineárisan összefüggő. Ekkor valemly $\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \in \mathcal{V}$ vektor előáll a többi lineáris kombinációjaként, de ekkor ez az $1 \cdot \mathbf{v}$ lin. kombinációval 2 különbőző előállítása $\mathbf{v}$-nek.

10. Tegyük fel, hogy a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^k$ vektorok lineárisan függetlenek. Függetlenek-e a következő vektorrendszerek?
a) $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n$,
b) $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$, ..., $\mathbf{v}_{n-1} - \mathbf{v}_n$, $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_1$,
c) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, ..., $\mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{v}_n$, $\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_1$.

Megoldás. *a)* Vizsgáljuk meg a lineáris függetlenséget: $x_1(\mathbf{v}_1)+x_2(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) + \cdots + x_n(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\mathbf{v}_1 + \cdots + (x_{n-1} + x_n)\mathbf{v}_{n-1} + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{v}_i$ vektorok függetlensége miatt: $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \cdots = x_{n-1} + x_n = x_n = 0$, emiatt $x_n = x_{n-1} = \cdots = x_1 = 0$. Emiatt a megadott vektorrendszer is lineárisan független lesz.
b) Nem lesz lineárisan független, hiszen $\sum_{i=1}^{n-1}(\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i) + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_1) = \mathbf{0}$.
c) Vizsgáljuk meg a lineáris függetlenséget: $x_1(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + x_2(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + \cdots + x_n(\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_1) = (x_1 + x_n)\mathbf{v}_1 + \cdots + (x_{n-2} + x_{n-1})\mathbf{v}_{n-1} + (x_{n-1} + x_n)\mathbf{v}_n = 0$, akkor $\mathbf{v}_i$ vektorok függetlensége miatt: $x_1 + x_n = \cdots = x_{n-2} + x_{n-1} = x_{n-1} + x_n = 0$. Ha n páros, akkor $x_1 = x_3 = \cdots = x_{n-1} = -x_2 = -x_4 = \cdots = -x_n$ nem triviális megoldása az előző homogén egyenletrendszernek, ezért a megadott vektorrendszer összefüggő lesz. Egyébként pedig nem, mert az egyenletekből azt kapjuk, hogy $x_1 = x_3 = x_5 = \cdots = x_n = x_2 = \cdots = x_{2n-1} = 0$.

11. Bizonyítsuk be, hogy a következő struktúrák testet alkotnak:
a) a $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ halmaz, ha a szorzást és az összeadást úgy definiáljuk, hogy az igazi szorzatnak illetve összegnek a p szerinti maradékát vesszük;
b) az $\{a + bi | a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{C}$ halmaz a komplex összeadásra és szorzásra nézve;
c) az $F = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ halmaz a valós összeadásra és szorzásra nézve.

Megoldás. a) Felhasználjuk, hogy ha a és a', illetve b és b' p-vel vett maradéka megegyezik, akkor $a + b$ és $a' + b'$, illetve ab és $a'b'$ is azonos maradékot adnak. Ebből következik, hogy tetszőleges $+$-gel és $\cdot$-tal alkotott kifejezés értékét úgy is megkaphatjuk $\mathbb{Z}_p$-ben, hogy először $\mathbb{Z}$-ben számoljuk ki, és csak a végén vesszük a maradékot. Ennek pedig egyenes következménye, hogy a műveleti azonosságok teljesülnek $\mathbb{Z}_p$-ben, mert $\mathbb{Z}$-ben is teljesülnek. A $+$-ra és $\cdot$-ra való zártság nyilvánvaló a definícióból. 0-elem és 1-elem a 0 és az 1, egy $a \neq 0$ elem negatívja pedig $p - a$ (a 0-é pedig 0). Azt kell még belátnunk, hogy minden $a \neq 0$ elemnek van reciproka. Tekintsük az $a, 2a, \ldots, (p-1)a$ egész számok p-vel vett maradékait. Ezek mind különbözők, mert ha ia és ja azonos maradékot ad, akkor

$ia - ja = (i-j)a$ osztható p-vel, és így $|i-j|$ is osztható, ami pedig 0 és $p-2$ között van, tehát ilyenkor $i = j$. Másrészt a 0 nincs a maradékok között, tehát az összes többi maradékot megkapjuk, köztük az 1-et. Ha ia maradéka 1, akkor i az a reciproka a $\mathbb{Z}_p$-ben.

b) Legyen $K = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Q}\}$. Itt a műveleti azonosságokat nem kell külön belátnunk, mert azok a K halmazt tartalmazó $\mathbb{C}$ testben is teljesülnek. K zárt a műveletekre nézve: $(a + bi) + (c + di) = (a+c)+(b+d)i \in K$ és $(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i \in K$, mert az együtthatók racionálisak, hiszen $\mathbb{Q}$ test. Van 0-elem: $0+0i$ és 1-elem: $1+0i$, továbbá additív inverz K-ban: $(-a)+(-b)i$. Végül multiplikatív inverz is létezik, ugyanis a $\mathbb{C}$-beli reciprok benne van a K-ban is: $1/(a+bi) = (a-bi)/(a^2+b^2) = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} i$ mindkét együtthatója racionális, ha a és b azok voltak.

c) Hasonlóan az előzőhöz a test axiómákat kell ellenőrizni.

12. Melyek alkotnak vektorteret $\mathbb{R}$ fölött az alábbiak közül? A köztük szereplő vektorterek hány dimenziósak?

a) 3×3-as valós felső háromszögmátrixok a szokásos műveletekkel;
b) a racionális számnégyesek a szokásos összeadásra és skalárral való szorzásra nézve;
c) a legföljebb 5-ödfokú valós polinomok;
d) a valós számpárok az $(a, b) \oplus (c, d) = (a + d, b + c)$ összeadásra és $\lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$ skalárral való szorzásra nézve;
e) $\mathbb{C}$ a komplex számok összeadására és valóssal való szorzására nézve;
f) A sík pozitív y-koordinátájú helyvektorai a szokásos vektorösszeadásra és skalárral való szorzásra nézve.

Megoldás. Az a), c) és e) részekben definiált struktúrák vektorterek, a b)-ben megadott nem, mert egy racionális szám valósszorosa nem feltétlenül racionális. A d)-ben megadott összeadás pedig nem kommutatív (mellesleg, nem is asszociatív): $(a, b) \oplus (c, d) = (a + d, b + c)$, és $(c, d) \oplus (a, b) = (c + b, a + d)$ különböznek. Tehát a d)-beli nem vektortér; az f)-beli halmaz nem tartalmaz nullelemet, és negatív számmal való szorzásra sem zárt. A dimenziókat egy-egy bázis megadásával határozhatjuk meg:

a) Bázisa az $\{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{22}, E_{23}, E_{33}\}$, ahol E_{ij} azt a mátrixot jelöli, amelynek egyetlen nem nulla eleme az ij helyen levő 1. A vektortér dimenziója 6.
c) Bázisa $\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$, dimenziója 6.
e) Bázisa $\{1, i\}$, dimenziója 2. Mindhárom esetben könnyű látni, hogy a vektortér elemei egyértelműen írhatók föl a báziselemek lineáris kombinációjaként.

13. Tekintsük a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x - y + z - w &= 1 \\ x + y - z - w &= 0 \\ x - y - z + w &= 1 \\ y + z + w &= 1 \end{aligned}$$

Oldjuk meg mint

(a) valós-együtthatós,

(b) $\mathbb{F}_2$ fölötti,

(c) illetve $\mathbb{F}_3$ fölötti

egyenletrendszert!

Megoldás. $\mathbb{R}$ fölött Gauss-eliminálva kapjuk, hogy $x = 1$, $y = 0$, $z = w = \frac{1}{2}$. Az egyenletrendszer $\mathbb{F}_2$ fölött nem megoldható, mert az első három egyenlet baloldalai megegyeznek, míg a jobboldalak különböznek. Végül $\mathbb{F}_3$ fölött a megoldás $x = y - 1 = z = w$, azaz itt három megoldás van.