Felsőbb Matematika (2014-15 ősz) **2. gyak**

1. Az a és b értékektől függően hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek? Adjuk meg a megoldásokat paraméteres alakban!

$$\begin{aligned} 2x + \ \ y + \ \ z &= \ \ 4 \\ x + 2y - \ \ z &= -1 \\ x - \ \ y + 2z &= \ \ a \\ x + by + \ \ z &= \ \ 3 \end{aligned}$$

Megoldás. Az egyenletrendszer kibővített mártixát kell Gauss-eliminálnunk:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & a \\ 1 & b & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & a \\ 1 & b & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & a+1 \\ 0 & b-2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \\ 0 & b-2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{ha } b\neq 0}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{bmatrix}$$

Tehát, ha $a \neq 5$, akkor nincs megoldás, ha $a = 5$ és $b = 0$, akkor ∞ sok megoldás van ($(x, y, z) = (3 - t, -2 + t, t)$), egyébként, azaz ha $a = 5$ és $b \neq 0$, akkor egyetlen ($(x, y, z) = (1, 0, 2)$).

2. Mutassuk meg, hogy a konzisztens valós $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek pontosan egy sortérbe eső megoldása van, és az a legkisebb abszolút értékű (azaz legrövidebb) megoldás!

Megoldás. Csak egy sortérbe eső megoldás van: $\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{b}$, $\mathbf{Ax}_2 = \mathbf{b} \rightsquigarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Van megoldás a sortérben: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\mathcal{S} + \mathbf{x}_\mathcal{N} \rightsquigarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A}(\mathbf{x}_\mathcal{S} + \mathbf{x}_\mathcal{N}) = \mathbf{Ax}_\mathcal{S} = \mathbf{b}$.

Ez a legkisebb abszolút értékű: $|\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{x}_\mathcal{S}|^2 + |\mathbf{x}_\mathcal{N}|^2 \geq |\mathbf{x}_\mathcal{S}|^2 \rightsquigarrow |\mathbf{x}| \geq |\mathbf{x}_\mathcal{S}|$

3. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszerek sortérbe eső egyetlen megoldását, és ezt felhasználva összes megoldását!

a) $x + y + z = 3$

$2x + y - z = 2$

$3x + 2y = 5$

b) $x + 4y + 8z + 12w = 15$

c) $x + y + z + w = 3$

$x + y - z - w = 1$

Megoldás. *a)* Az egyenletrendszer redukált lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

ahonnan a nullteret kifeszítő vektor $(2, -3, 1)$. A rá való merőlegességet leíró egyenletet az egyenletrendszerhez írva a megoldás $z_0 = 1$, ahonnan $x_0 = 1$ és $y_0 = 1$. Az általános megoldás $(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(2, -3, 1)$

b) Nulltér: $(12, 0, 0, -1)$, $(0, 3, 0, -1)$, $(0, 0, 3, -2)$. A sortérbe eső megoldás az $\mathbf{x}_0 = 1/15(1, 4, 8, 12)$ vektor, az összes megoldás $\mathbf{x}_0 + t(12, 0, 0, -1) + u(0, 3, 0, -1) + v(0, 0, 3, -2)$.

c) Redukált lépcsős alak:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nulltér: $(1, -1, 0, 0)$, $0, 0, 1, -1)$. Sortérbe eső megoldás: $(1, 1, 1/2, 1/2)$.

4. Mennyi a $(2, 3, 0, -1)$, $(1, 2, -1, 0)$, $(2, 4, -2, 0)$, $(1, 0, 3, -2)$ vektorrendszer rangja? Adjunk meg maximális méretű lineárisan független részrendszert, és állítsuk elő a többit ezek lineáris kombinációjaként! Határozzuk meg a fenti vektorok által kifeszített altér merőleges kiegészítő alterének egy bázisát!

Megoldás. A négy vektor mátrixán végezzünk elemi sorműveleteket:

$$[\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3|\mathbf{v}_4] \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehát a $(2, 3, 0, -1)$ és $(1, 2, -1, 0)$ bázist alkotnak, és a $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_4 = 2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2$, a koordinátás alakok: $(0, 2)$, $(2, -3)$.

A merőleges kiegészítő altér egy bázisa a $(2, -1, 0, 1)$ és a $(-3, 2, 1, 0)$ vektorokból áll.

5. Keressünk egy bázist az $\mathbb{R}^4$ tér $x+y+z+w = 1$ egyenletű hipersíkjával párhuzamos vektorok alterében, és írjuk fel ezen altér egy – a bázisvektoroktól különböző – vektorának e bázisra vonatkozó koordinátás alakját!

Megoldás. A szóbanforgó altér nem más, mint az $(1, 1, 1, 1)$ normálvektorú origón átmenő hipersík. Ennek bázisa tetszóleges 3 olyan lineárisan független vektor, melyek merőlegesek $(1, 1, 1, 1)$-re. Ezt a $(1, -1, 0, 0)$, $(1, 0, -1, 0)$, $(1, 0, 0, -1)$ vektorok teljesítik. Az altér egy vektora pl. $(3, -1, -1, -1) = (1, -1, 0, 0) + (1, 0, -1, 0) + (1, 0, 0, -1)$, melynek tehát koordinátás alakja $(1, 1, 1)$.

6. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ invertálható mátrixok, akkor a következő ún. blokkdiagonális mátrixok invertálhatók, és

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix},$$

illetve

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}.$$

ahol $\mathbf{B}$ tetszőleges, de megfelelő típusú mátrix. Hasonlóan, ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ négyzetes mátrixok, akkor

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & -\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X} & \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{X} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}$, és feltételezzük, hogy minden felírt mátrixinverz létezik. Ezt felhasználva számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A képletek egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhetők. Az inverz:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Legyen $\mathbf{A}$ egy 10×10-es valós mátrix. Jelölje r_i az $\mathbf{A}^i$ rangját. Lehet-e az $(r_1, r_2, \ldots)$ sorozat egyenlő az alábbiakkal? (a) $(5, 6, \ldots)$, (b) $(9, 8, 7, \ldots, 4, 4\ldots)$, (c) $(10, 9, 8, \ldots)$,
(d) $(8, 5, \ldots)$.

Megoldás. Az $\mathbf{A}$ rangja megegyezik az $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezés képterének dimenziójával, az $\mathbf{A}^i$ rangja az A^{i-1} képtere A általi képének dimenziójával.

(a) Az A leképezés az $\mathbb{R}^{10}$ teret egy 5-dimenziós részébe képzi, így ez az altér saját magába képződik, tehát nem lehet 5-nél több dimenziós: ez a sorozat nem lehetséges.

(b) Ha A a tér bázisán az alábbi módon hat, a rangok a megkívánt sorozatot adják: $\mathbf{e}_6 \mapsto \mathbf{e}_5 \mapsto \mathbf{e}_4 \mapsto \mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{0}$, és $\mathbf{e}_7$, $\mathbf{e}_8$, $\mathbf{e}_9$, $\mathbf{e}_{10}$ helyben maradnak. E leképezés mátrixa és annak hatványai is könnyen felírhatók.

(c) Ha $\mathbf{A}$ rangja 10, akkor determinánsa nem 0, így hatványaié sem, vagyis 10-zel csak a $10, 10, \ldots$ sorozat kezdődik.

(d) Ha $\mathbf{A}$ rangja 8, akkor magterének dimenziója 2, így egy 8-dimenziós tér képe legalább 6. E sorozat nem lehetséges.

8. Igazoljuk, hogy minden r-rangú mátrix előáll r darab 1-rangú összegeként.

Megoldás. Útmutatás: mutassuk meg, hogy minden 1-rangú mátrix előáll diadikus szorzatként, majd pl. használjuk a bázisfelbontást.

9. Tegyük fel, hogy az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$. Mutassuk meg, hogy rangja legföljebb $n/2$.

Megoldás. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{N}(\mathbf{A})$ (az oszloptér része a nulltérnek), és használjuk a dimenziótételt.

10. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$-es, akkor $\mathrm{r}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A})$.

Megoldás. Elég megmutatni, hogy $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}$ nulltere megegyezik:
$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{0} = \mathbf{0}$
$\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \rightsquigarrow (\mathbf{Ax}) \cdot (\mathbf{Ax}) = 0 \rightsquigarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{0}$

11. Írjunk fel egy valós, 2-rangú, 5×6-os mátrixot, melyben nincsenek zéruselemek, és határozzuk meg a négy alapvető altere mindegyikének egy-egy bázisát!

Megoldás. Egy ilyen mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sorterének egy bázisa $(1, 1, 1, 1, 1, 2)$, $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Oszlopterének(=képtér) egy bázisa $(1, 1, 1, 1, 1,)$, $(2, 1, 1, 1, 1, 1)$. Nullterének egy bázisa $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 0, 1, 0)$.

12. Mennyi az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrix rangja? Válasszunk ki a sor-, illetve oszlopvektorok közül egy olyan vektorrendszert, mely a sor-, illetve oszloptér egy bázisa, majd írjuk fel a mátrix további sorainak (oszlopainak) koordinátás alakját ebben a bázisban. Írjuk fel az $\mathbf{A}_{m\times n}$ mátrix bázisfelbontását, azaz írjuk fel $\mathbf{A} = \mathbf{BR}$ alakba, ahol $\mathbf{R}_{r\times n}$ az $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja, és $\mathbf{B}_{m\times r}$ az $\mathbf{A}$ megfelelően választott oszlopaiból áll.

Megoldás. $\mathbf{A}$ egy lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ennek megfelelően az 1. és 2. sor a sortér bázisát, míg az 1. és 2. oszlop az oszloptér bázisát alkoják. A további összefüggések: $s_3 = 2s_1 - s_2$, $o_3 = \frac{1}{4}o_1 - \frac{1}{4}o_2$, $o_4 = \frac{3}{4}o_1 + \frac{5}{4}o_2$. A bázisfelbontás elemei pedig:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}.$$

13. Írjuk fel a $\mathcal{B} = \{(1,1,1),\ (1,2,3),\ (1,1,2)\}$ bázisról a $\mathcal{C} = \{(7,3,3),$ $(8,1,2),\ (4,4,3)\}$ bázisra való áttérés mátrixát, és határozzuk meg a $(\mathbf{v})_{\mathcal{B}} = (3,2,1)$ vektor $\mathcal{C}$ bázisbeli alakját!

Megoldás. *1. megoldás:* A megadott vektorokból fölírhatók a két bázisból a standard bázisba való áttérés mátrixai:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

amiből $\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}}\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{A}^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$, amiből egy invertálás és egy mátrixszorzás után megkapható az áttérés mátrixa:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 7 & 47 & 35 \\ -4 & -27 & -20 \\ -4 & -28 & -21 \end{bmatrix}$$

2. megoldás: Az áttérés mátrixának oszlopai a $\mathcal{B}$ bázis vektorainak $\mathcal{C}$ bázisban kifejezett alakjai. Ez egy szimultán egyenletrendszerből kapható meg:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 8 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 47 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -27 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -28 & -21 \end{array}\right]$$

Innen $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ elvégzésével kapjuk, hogy $(\mathbf{v})_{\mathcal{C}} = (150, -86, -89)$.