1. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ és $\det \mathbf{A} = 3$. Határozzuk meg a $2\mathbf{A}^{-1}$, $(2\mathbf{A})^{-1}$ és $\mathbf{A}^2\mathbf{A}^T\mathbf{A}^{-1}$ mátrixok determinánsát!

Megoldás. $|2\mathbf{A}^{-1}| = 2^5|\mathbf{A}^{-1}| = 2^5\frac{1}{|\mathbf{A}|} = \frac{2^5}{3}$
$|(2\mathbf{A})^{-1}| = \frac{1}{|2\mathbf{A}|} = \frac{1}{2^5|\mathbf{A}|} = \frac{1}{2^5 3}$
$|\mathbf{A}^2\mathbf{A}^T\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}^2||\mathbf{A}^T||\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^2|\mathbf{A}||\mathbf{A}|^{-1} = |\mathbf{A}|^2 = 9$

2. Melyek igazak az alábbi állítások közül? (Az $\mathbf{A}$ itt mindig négyzetes mátrixot jelöl.)
(a) Ha egy determináns értéke 0, akkor van két azonos sora.
(b) Ha egy determináns értéke nem 0, akkor oszlopvektoriai lineárisan függetlenek.
(c) Ha az $\mathbf{Ax} = 0$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása, akkor $|\mathbf{A}| \neq 0$.
(d) $|\mathbf{A}| \neq 0$ pontosan akkor igaz, ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer nem oldható meg.
(e) $|\mathbf{A}| = 0$ pontosan akkor igaz, ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

Megoldás. a) Hamis b) Igaz c) Hamis d) Hamis e) Hamis

3. Határozzuk meg a $\mathbf{P}$ és $\mathbf{R}$ mátrixok LU-felbontását, majd ezt fölhasználva oldjuk meg a $\mathbf{Px} = (0, 2, 4, 6)$ egyenletrendszert, invertáljuk az $\mathbf{R}$ mátrixot, ahol

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A Pascal-háromszög LU-felbontása két Pascal-háromszöget ad:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A másik felbontás is hasonlóan varázslatos:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Az egyenletrendszer megoldása $(-2, 2, 0, 0)$.
2. Az inverz:

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Adjunk meg olyan lineáris transzformációt $\mathbb{R}^3$-ben (ha létezik), amely a $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ vektorokat a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ vektorokba viszi, ahol $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, -1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (2, -1, 3)$, és
(i) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (1, 1, 2)$;
(ii) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (3, 1, 5)$;
(iii) $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (2, 1, 3)$;
Írjuk fel e leképezés mátrixát!

Megoldás. Mindhárom kérdés megválaszolható úgy, hogy megoldjuk az $\mathbf{A}\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ egyenletekből álló 9-ismeretlenes egyenletrendszert, ahol az ismeretlenek az $\mathbf{A}$ mátrix elemei. Egyetlen mátrixszorzatba tömörítve a fenti egyenleteket, megoldandó az $\mathbf{AW} = \mathbf{V}$ mátrixegyenlet, ahol $\mathbf{A}$ az ismeretlen, és $\mathbf{W}$ illetve $\mathbf{V}$ a $\mathbf{w}_i$, illetve $\mathbf{v}_i$ vektorokból álló mátrix. Az *(i)* kérdésben W invertálható, ezért a megoldás az $A = VW^{-1}$ kiszámolásával is megoldható, de mindhárom esetben használható az elemi sorműveletekkel való megoldás. Ha mindkét oldal transzponáltját vesszük, az ismeretlenek a hagyományos helyen jelennek meg, így a $W^T A^T = V^T$ egyenletben az A^T oszlopvektoraiban három háromismeretlenes egyenletrendszert, vagyis egy szimultán egyenletrendszert kapunk. Ezek megoldása:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Tehát az *(i)* megoldása

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

A *(ii)* esetén végtelen sok megoldást kapunk:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A jobb oldali rész első oszlopát véve egy egyenletrendszer jobb oldalának, az $x + 2z = 1$, $y - z = -1$ egyenletrendszert kapjuk, melynek megoldása $z = r$, $y = -1 + r$, $x = 1 - 2r$, ahol r szabad paraméter. Hasonlóan megoldva a másik két egyenletrendszert is, majd a belőlük képzett mátrixot transzponálva kapjuk *(ii)* megoldását:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - 2r & -1 + r & r \\ -2s & -1 - s & s \\ 1 - 2t & -t & t \end{bmatrix}.$$

Azért kaptunk végtelen sok megoldást, mert a $\mathbf{w}_i$ vektorok összefüggőek, egy síkot feszítenek ki, és a köztük lévő összefüggések megegyeznek a $\mathbf{v}_i$ vektorok közti összefüggésekkel. Ez a síkon kívüli vektorok leképzésére még végtelen sok lehetőséget hagy. A *(iii)* esetén nincs megoldás, mert bár a $\mathbf{w}_i$ vektorok itt is összefüggőek, de köztük más összefüggés van, mint a $\mathbf{v}_i$ vektorok közt:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

5. Adjuk meg az alábbi lineáris transzformációk mátrixát a megadott bázisokban:

(a) az $x - 2y + z = 0$ síkra való merőleges vetítés a standard bázisban;

(b) $f : (x, y, z) \mapsto (2x - y + z, x + z, y - 3z)$ a standard, illetve az $\{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (2, 1, 1)\}$ bázisban;

(c) a sík tükrözése az $y = 2x$ egyenesre a standard, illetve az $\{(1, 2), (-2, 1)\}$ bázisban;

(d) $\mathbb{R}^n$ vetítése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektor által kifeszített altérre a standard bázisban;

(e) $\mathbb{R}^n$ vetítése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektorra merőleges hipersíkra a standard bázisban;

(f) $\mathbb{R}^n$ tükrözése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektorra merőleges hipersíkra a standard bázisban.

Megoldás. *(a)* Az (a, b, c) ponton átmenő, az $x - 2y + z = 0$ síkra merőleges egyenes paraméteres vektoregyenlete: $(x, y, z) = (a, b, c) + t(1, -2, 1) = (a+t, b-2t, c+t)$. Az egyenes metszéspontja a síkkal az $(a+t) - 2(b-2t) + (c+t) = 0$ egyenletből kapható $t = -\frac{1}{6}a + \frac{2}{6}b - \frac{1}{6}c$ paraméterértékből $(\frac{5}{6}a + \frac{2}{6}b - \frac{1}{6}c, \frac{2}{6}a + \frac{2}{6}b + \frac{2}{6}c, -\frac{1}{6}a + \frac{2}{6}b + \frac{5}{6}c)$. Ebből leolvasható, hogy az

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6}a + \frac{2}{6}b - \frac{1}{6}c \\ \frac{2}{6}a + \frac{2}{6}b + \frac{2}{6}c \\ -\frac{1}{6}a + \frac{2}{6}b + \frac{5}{6}c \end{bmatrix}$$

leképezést megvalósító mátrix

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}.$$

(b) Az f transzformáció mátrixa a $\mathcal{E} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ standard bázisban $\mathbf{A}_\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.
A $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (2, 1, 1)\}$ bázisnál az áttérés mátrixával számolunk:

$$\mathbf{C}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}} = \mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Így $\mathbf{A}_\mathcal{C} = \mathbf{C}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}}\mathbf{A}_\mathcal{E}\mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}} = \mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}^{-1}\mathbf{A}_\mathcal{E}\mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}$ fölhasználásával

$$\mathbf{A}_\mathcal{C} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 8 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(c) Érdemes először a $\mathcal{C} = \{(1, 2), (-2, 1)\}$ bázisban fölírni a mátrixot, mert ennek elemei sajátvektorok, így a képüket meghatározni és koordinátázni is könnyű: $\mathbf{c}_1 = (1, 2)$ és $\mathbf{c}_2 = (-2, 1)$ jelöléssel

$$f(\mathbf{c}_1) = \mathbf{c}_1 = 1 \cdot \mathbf{c}_1 + 0 \cdot \mathbf{c}_2$$
$$f(\mathbf{c}_2) = -\mathbf{c}_2 = 0 \cdot \mathbf{c}_1 + (-1) \cdot \mathbf{c}_2$$

tehát f mátrixa $\mathcal{C}$ szerint $\mathbf{A}_\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Az $\mathbf{A}_\mathcal{E}$ standard mátrixra $\mathbf{A}_\mathcal{E} = \mathbf{P}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}\mathbf{A}_\mathcal{C}\mathbf{P}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}^{-1}$, ahol $\mathbf{P}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, így azt kapjuk, hogy $\mathbf{A}_\mathcal{E} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$.

(d) Keressük $\mathbf{x} \mapsto \operatorname{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ mátrixát. Ennek i-edik oszlopa

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{e}_i) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\mathbf{a} = \frac{a_i}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a},$$

amiből a vetítés mátrixa

$$\mathbf{P} = \left[\frac{a_1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a} \;\middle|\; \frac{a_2}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a} \;\middle|\; \ldots \;\middle|\; \frac{a_n}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\right] = \frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^T$$

(e) Keressük az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - \operatorname{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ mátrixát:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^T$$

(f) Keressük az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - 2\operatorname{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ mátrixát:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^T$$

6. Határozzuk meg a $(-2, 1, 3)$ vektornak az $(1, 0, 1)$ és a $(-1, 2, 0)$ vektorok által kifeszített síkra eső merőleges vetületét!

Megoldás. Az altér bázisvektoraiból képzett mátrix
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, amiből a vetítés mátrixa $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.
Így a $(-2, 1, 3)$ vektor merőleges vetülete

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

7. Tekintsük az $\mathbb{R}^4$ tér $(1, -1, 1, 0)$ és $(0, 1, -1, 0)$ vektorai által kifeszített $\mathcal{W}$ alterét és legyen $x = (8, 4, 2, 1)$. Bontsuk fel az x vektort $\mathcal{W}$ -be eső és $\mathcal{W}$ -re merőleges vektorok összegére.

Megoldás. Az altér bázisvektoraiból képzett mátrix
$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, amiből a vetítés mátrixa $\mathbf{W}(\mathbf{W}^T\mathbf{W})^{-1}\mathbf{W}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Így a $(-2, 1, 3)$ vektor merőleges vetülete

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Következésképp $\mathbf{x}_{\mathcal{W}} = (8, 1, -1, 0)$ és $\mathbf{x}_{\mathcal{W}^\perp} = x - \mathbf{x}_{\mathcal{W}} = (0, 3, 3, 1)$.

8. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Adjuk meg az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer minimális abszolút értékű optimális megoldását

Megoldás. A egyenletrendszer optimális megoldásai épp az $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$ normál egyenletrendszer megoldásai, tehát ennek az egyenletrendszernek kell a minimális abszolút értékű megoldása, vagyis az egyértelmű sortérbe eső megoldása. Gauss elimináció után a fenti egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ebből következik, hogy $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ nulltere 1 dimenziós, és az $(1,1,1)$ vektor generálja. Ahhoz, tehát, hogy sortérbe eső vektort kapjunk, erre merőleges vektort kell keresnünk, tehát az $x+y+z=0$ egyenletet kell az eddigiekhez hozzávenni. Ezt megoldva azt kapjuk, hogy a keresett minimális abszolút értékű optimális megoldás $(0,-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

9. Melyek igazak az $\mathbb{R}^n$ vektortér minden f lineáris transzformációjára?
1. $\mathbf{v}$ sajátvektora f-nek $\Longrightarrow$ $\mathbf{v}$ sajátvektora f^2-nek;
2. $\mathbf{v}$ sajátvektora f^2-nek $\Longrightarrow$ $\mathbf{v}$ sajátvektora f-nek;
3. 0 sajátértéke f^2-nek $\Longrightarrow$ 0 sajátértéke f-nek.

Megoldás. 1. $\mathbf{v}$ sajátvektora f-nek, azaz $f(\mathbf{v})=\lambda\mathbf{v} \Longrightarrow f^2(\mathbf{v}) = f(\lambda\mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v}) = \lambda^2\mathbf{v}$, azaz $\mathbf{v}$ sajátvektora f^2-nek, az állítás igaz.
2. Hamis, például ha f a sík $90°$-os elforgatása, akkor f^2 a $180°$-os elforgatás, aminek a sík minden vektora sajátvektora, f-nek viszont nincs.
3. Igaz, hisz ha f-nek a 0 nem sajátértéke, azaz f egyik vektort sem viszi a nullvektorba, akkor f^2 sem.

10. Mondjunk egy lineáris leképezést, melynek sajátértékei (a) 1, 1, 1; (b) 1, 1, -1; (c) 1, -1, -1; (d)-1, -1, -1 (e) 1; (f) -1?

Megoldás. *(a)* identikus *(b)* síkra tükrözés *(c)* egyenesre tükrözés *(d)* origóra tükrözés *(e)* pl. az egyenes körüli forgatás *(f)* pl. a forgatva tükrözés