1. (1-rangú mátrixok pszeudoinverze) Mutassuk meg, hogy ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 1$, akkor

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{\mathrm{trace}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}\mathbf{A}^T,$$

ahol $\mathrm{trace}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ elemeinek négyzetösszege. Eszerint ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, akkor

$$\mathbf{a}^+ = \frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}^T = \frac{1}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}^T.$$

Megoldás. Vegyük észre, hogy $\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{R}^T = (\mathbf{B}^T\mathbf{B})(\mathbf{R}\mathbf{R}^T)$ éppen A elemeinek négyzetösszege, $\mathbf{R}^T\mathbf{B}^T$ pedig megegyezik $\mathbf{A}^T$-tal.

2. Határozzuk meg a következő mátrixok általánosított (pszeudo)inverzét:

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (b)\ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(c)\ \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (d)\ \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás. (a) $r(\mathbf{A}) = 1$, a bázisfelbontás: $\mathbf{B} = [1\ -1]^T$, $\mathbf{R} = [1\ -1]$, ahonnan $\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{R}^T = 4$. Mivel $\mathbf{R}^T\mathbf{B}^T = \mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, ezért $\mathbf{A}^+ = {}^1\!/\!{}_4\mathbf{A}$.

(b) Mivel $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú,

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}^{-1}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \frac{5}{36} & \frac{2}{36} \\ \frac{2}{36} & \frac{8}{36} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{18} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}.$$

(c) Az előző pontbeli mátrix transzponáltja.

(d) Eredmény:

$$\begin{bmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{18} & \frac{7}{9} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

3. Adjunk meg ortonormált bázist az $\mathbf{a}_1 = (1,2,-1,0), \mathbf{a}_2 = (2,1,0,1), \mathbf{a}_3 = (1,-1,1,-1) \in \mathbb{R}^4$ vektorok által generált altérben.

Megoldás. Gram-Schmidt ortogonalizációval: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1$, $\mathbf{v}_2$ párhuzamos $\mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|^2}\mathbf{v}_1 = (\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$-vel, például $\mathbf{v}_2 = (4,-1,2,3)$, $\mathbf{v}_3$ párhuzamos $\mathbf{a}_3 - \frac{\mathbf{a}_3\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{a}_3\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|^2}\mathbf{v}_2 = (\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{7}{5})$-vel, például $\mathbf{v}_3 = (4,-1,2,-7)$. Kaptuk tehát a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ortogonális bázist az $\langle\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\rangle$ altérben, ebbõl normálással adódik egy ortonormált bázis is.

4. (QR-felbontás Givens-forgatásokkal) Számítsuk ki az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 15 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását Givens-forgatások segítségével!

Megoldás. Először az első és harmadik sorokat és oszlopokat figyelve elimináljuk a harmadik sor első elemét. Itt $a = 8$, $b = 15$, tehát $r =$

$\sqrt{8^2+15^2}=17$, $\cos\alpha=\frac{8}{17}$, $\sin\alpha=-\frac{15}{17}$. Így első lépésben a következő mátrixszorzással eliminálhatunk:

$$\mathbf{Q}_1=\begin{bmatrix}\frac{8}{17} & 0 & \frac{15}{17}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{15}{17} & 0 & \frac{8}{17}\end{bmatrix}\qquad \mathbf{Q}_1\mathbf{A}=\begin{bmatrix}17 & 12 & -1\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix}.$$

Következő lépésben a $\mathbf{Q}_1\mathbf{A}$ mátrix harmadik sorának második elemét elimináljuk:

$$\mathbf{Q}_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}.\qquad \mathbf{R}=\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A}=\begin{bmatrix}17 & 12 & -1\\ 0 & 5 & 4\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

és innen

$$\mathbf{Q}=(\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1)^{-1}=\mathbf{Q}_1^T\mathbf{Q}_2^T=\begin{bmatrix}\frac{8}{17} & -\frac{9}{17} & -\frac{12}{17}\\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ \frac{15}{17} & \frac{24}{85} & \frac{32}{85}\end{bmatrix},$$

amely mátrixokkal $\mathbf{A}=\mathbf{QR}$ valóban fennáll.

5. (QR-felbontás Householder-tükrözéssel) Határozzuk meg az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 4\\ 1 & 4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 4 & 1\end{bmatrix}.$$

mátrix QR-felbontását Householder-módszerrel!

Megoldás. Az $(1,1,1,1)\mapsto(2,0,0,0)$ transzformációhoz az

$$\mathbf{a}=(1,1,1,1)-(2,0,0,0)=(-1,1,1,1)$$

vektorral Householder-tükrözést végzünk:

$$\mathbf{Q}_1=\mathbf{I}_4-\frac{2}{\mathbf{a}'\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}'=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_1\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 2\\ 0 & -5 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

Ezután a $\mathbf{Q}_1\mathbf{A}$ mátrixból képzeletben elhagyva az első sort és oszlopot a $(0,0,-5)\mapsto(5,0,0)$ transzformációhoz kell az $\mathbf{a}=(0,0,-5)-(5,0,0)=(-5,0,-5)$ vektorral Householder-tükrözést végezni:

$$\mathbf{H}_2=\mathbf{I}_3-\frac{2}{\mathbf{a}'\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}'=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_2=\left[\begin{array}{c|ccc}1 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{array}\right],\qquad \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 3 & 4\\ 0 & 5 & -3 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}=\mathbf{R}$$

$$\mathbf{Q}=(\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1)^{-1}=\mathbf{Q}_1^T\mathbf{Q}_2^T=\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

6. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. $\mathbf{A}$ pszeudoinverzének segítségével (melyet egy korábbi feladatban már meghatároztunk) határozzuk meg az $\mathbf{Ax} = (10, 2, 6)$ egyenletrendszer legkisebb abszolút értékű optimális megoldását! Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix QR-felbontását, és ennek felhasználásával is keressük meg az előző egyenletrendszer legkisebb abszolút értékű optimális megoldását!

Megoldás. $\mathbf{A}^+ \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. A QR-felbontáshoz először a Gram–Schmidt-eljárással $\mathbf{A}$ első oszlopára merőleges vektort keresünk:

$$\mathbf{v}_1 = (2, -2, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (0, 1, 2) - \frac{(0,1,2)\cdot(2,-2,0)}{|(2,-2,0)|^2}(2,-2,0) = (0,1,2) - \frac{-2}{8}(2,-2,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$$

A $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ vektorok normáltjai lesznek $\mathbf{Q}$ oszlopai:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ -1 & 1/3 \\ 0 & 4/3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{R} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/6 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1/4 & 1/12 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1/4 & 1/12 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/18 & -2/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 4/9 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

7. Igazoljuk, hogy blokkdiagonális mátrix esetén

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{A}_k \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^+ & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2^+ & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{A}_k^+ \end{bmatrix},$$

és ez alapján határozzuk meg a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix pszeudoinverzét.

Megoldás. A Moore-Penrose-tétel feltételeit kell ellenőrizni. A feladatban szereplő blokkmátrix pszeudoinverzére $\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ adódik.

8. Diagonalizáljuk ortogonálisan az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixot és írjuk fel a spektrálfelbontását, azaz állítsuk elő $\mathbf{A} = \sum_\lambda \lambda \mathbf{P}_\lambda$ alakban, ahol $\mathbf{P}_\lambda$ a λ sajátértékhez tartozó sajátaltérre való merőleges vetítés mátrixa.

Megoldás. Karakterisztikus polinom: $-x^3 + 6x^2 - 9x$, innen $\lambda_{1,2} = 3$, $\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$, a $(0, 1, -1)$ sajátvektor ortogonalizálása után $\mathbf{x}_2 =$

$\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)$, $\lambda_3 = 0$, $\mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Ortogonálisan diagonalizáló mátrix:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

ahonnan $\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathrm{diag}(3,3,0)$.

A spektrálfelbontás ortonormált vektorokkal, ahonnan az alterekre vetítő változat is megkapható:

$$\begin{aligned}3\mathbf{x}_1\mathbf{x}_1^T + 3\mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^T + 0\mathbf{x}_3\mathbf{x}_3^T &= 3\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 3\cdot\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} + 0\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 3\cdot\begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} + \end{aligned}$$

9. Írjuk fel az alábbi mátrixok sajátfelbontását, annak diadikus alakját, illetve a spektrálfelbontásukat!

$$\text{(a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{(b) } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(c) } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. (a) Szimmetrikus mátrixról van szó, így ortogonálisan diagonlaizálható, vagyis a sajátfelbontása $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T$, ahol $\mathbf{D} = diag(1,1,-2)$ és egy lehetséges választás $\mathbf{Q}$-ra

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Ez alapján a diadikus alak $\mathbf{A} = 1\mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T + 1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^T + (-2)\mathbf{q}_3\mathbf{q}_3^T$, a spektrálfelbontás pedig $\mathbf{A} = 1\mathbf{P}_1 + (-2)\mathbf{P}_{-2}$ ahol $\mathbf{P}_1 = \mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T + \mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^T$ és $\mathbf{P}_{-2} = \mathbf{q}_3\mathbf{q}_3^T$.

(b) Ugyancsak szimmetrikus mátrixról van szó. Most $\mathbf{D} = diag(3,0,0)$ és egy lehetséges választás $\mathbf{Q}$-ra

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Ez alapján a diadikus alak $\mathbf{B} = 3\mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T$, a spektrálfelbontás pedig $\mathbf{B} = 1\mathbf{P}_3 + 0\mathbf{P}_0$ ahol $\mathbf{P}_3 = \mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T$ és $\mathbf{P}_0 = \mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^T + \mathbf{q}_3\mathbf{q}_3^T$.

(c) A mátrix nem szimmetrikus, de van 3 független sajátvektora, így diagonalizálható: $\mathbf{C} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1}$, ahol $\mathbf{D} = diag(2,2,0)$ és egy lehetséges választás $\mathbf{U}$-ra

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}^{-1} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Ez alapján a diadikus alak $\mathbf{C} = 2\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + 2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^T$, a spektrálfelbontás pedig $\mathbf{C} = 2\mathbf{P}_2 + 0\mathbf{P}_0$ ahol $\mathbf{P}_2 = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^T$ és $\mathbf{P}_0 = \mathbf{u}_3\mathbf{v}_3^T$.