Felsőbb Matematika (2014-15 ősz) **5. gyak**

1. Számítsuk ki a k-adik Fibonacci-számot ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$)!

Megoldás. Mátrixegyenletbe írva:

$$\begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{bmatrix}$$

$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 - \lambda - 1$, $\lambda_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, a sajátvektorok $\mathbf{x}_i = (\lambda_i, 1)$ $(i = 1, 2)$. $\begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{C}\Lambda^n\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{bmatrix}$$

amiből $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

2. Mutassuk meg, hogy az alábbi (valós) mátrixok mind hasonlók:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix}$, ahol a, b, c és d tetszőleges nem 0 értékek;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{bmatrix}$, ahol a, b, c és d tetszőleges nem 0 értékek;

(c) $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$, ahol $a \neq c$ tetszőleges, egymástól különböző értékek;

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Megoldás. (a) Új bázist adunk meg, amelyben az első leképezés mátrixa a második mátrix lesz. Az új bázist $\mathbf{e}_1$, $\alpha\mathbf{e}_2$ alakban keressük. Látható, hogy $\alpha = b/a$ megfelelő. A 3-4. mátrixhoz elég az elsőt transzponálni. Erre a mellékátlóban-csupa-1 mátrix jó.

(b) Az előző feladatbeli mátrixok realizálják a hasonlóságot itt is.

(c) Mindkét mátrixnak két sajátértéke van, az a és a c, így a hozzájuk tartozó sajátvektorokból álló bázisban az első mátrix diagonális lesz.

(d) Az $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ vektorok bázist alkotnak, melyeket az első mátrix a második szerint képez le.

3. Ábrázoljuk az $9x^2-4xy+6y^2-10x-20y+5 = 0$ egyenletű másodrendű görbét! Határozzuk meg centrumát, és tengelyeinek egyenletét!

Megoldás. Az $\mathbf{A}$ sajátfelbontásából $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{x}+C = \mathbf{x}_1^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{x}_1+\mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{x}_1+C$, ahol $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{B} = [-10\ -20], \quad C = 5,$$

azaz $10x_1^2+5y_1^2-10\sqrt{5}y_1+5 = 0$, amiből $10x_1^2+5(y_1^2-2\sqrt{5}y_1+5) = 20$, azaz $(x_2, y_2) = (x_1, y_1 - \sqrt{5})$ jelöléssel: $2x_2^2 + y_2^2 = 4$. A középpont $(x_1, y_1) = (0, \sqrt{5})$, azaz $(x, y) = \mathbf{Q}(0, \sqrt{5}) = (1, 2)$, a rajta átmenő tengelyek iránytangense 2 és $-1/2$.

4. Számítsuk ki az alábbi mátrixok szinguláris érték szerinti felbontásának teljes és redukált alakját, és írjuk fel a hozzá tartozó diadikus felbontást!

$$(a)\ \begin{bmatrix} -\frac{4}{13} & 6 \\ \frac{111}{13} & -4 \end{bmatrix},\quad (b)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad (c)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(d)\ \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás. *(a)* a teljes és a redukált alakok megegyeznek,

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 73 & -36 \\ -36 & 52 \end{bmatrix},\ x^2-125x+2500,\ \begin{array}{c} \lambda_1 = 100,\ \lambda_2 = 25, \\ \sigma_1 = 10,\ \sigma_2 = 5 \end{array}\quad \mathbf{U} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -5 & 12 \\ 12 & 5 \end{bmatrix},\ \mathbf{V} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

(b) $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$-ból indulva $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$, a sajátvektorok $\lambda = 3$: $(1, 2, 1)$, $\lambda = 1$: $(1, 0, -1)$, $\lambda = 0$: $(1, -1, 1)$. Innen a felbontás:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

A redukált felbontás

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

(c) Hasonlóan az előzőhöz:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix},\quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(d) A teljes felbontás mátrixai:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{V} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

a redukált felbontás:

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

5. Határozzuk meg a fenti mátrixok pszeudoinverzét!

Megoldás. *(a)* $\begin{bmatrix} 2/25 & 3/25 \\ 111/650 & 2/325 \end{bmatrix}$, *(b)* $\begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$, *(d)* $\begin{bmatrix} -1/9 & 0 & 2/9 \\ -1/9 & 1/9 & 0 \\ 1/6 & -1/9 & -1/9 \end{bmatrix}$

6. Határozzuk meg az (d)-beli mátrix polárfelbontását is!

Megoldás. $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. Tudjuk, hogy az $\mathbf{A} = \mathbf{U}\,\mathrm{diag}(4,-2,-2,0)\mathbf{U}^T$ az $\mathbf{A}$ mátrix sajátfelbontása, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel $\mathbf{A}$ szinguláris felbontását!

Megoldás. Az $\mathbf{A} = \mathbf{U}\,\mathrm{diag}(4,2,2,0)\left(\mathrm{diag}(1,-1,-1,1)\mathbf{U}^T\right)$ az $\mathbf{A}$ szinguláris felbontása, azaz $\mathbf{V}^T$ úgy kapható meg $\mathbf{U}^T$-ból, ha második és harmadik sorát -1-gyel szorozzuk. A módszer tetszőleges sajátfelbontás esetén működik.

8. Számítsuk ki az alábbi vektorok megadott normáit!
1. $\mathbf{x} = (\sqrt{3} - \mathrm{i}, 6\mathrm{i}, 3)$, $\mathbf{y} = (0.1, -0.2, -0.2)$, $p = 1, 2, \infty$;
2. $(1,2,2)$, $(2,3,6)$, $(1,4,8)$, $(4,4,7)$, $p = 2$;
3. $(\mathrm{i}, 2, \sqrt{2} - \sqrt{2}\mathrm{i}, -4i)$, $p = 1, 2, \infty$;
4. $(3,4,5)$, $(11,12,13,14)$, $p = 3$;

Megoldás. 1. $\|\mathbf{x}\|_1 = 11$, $\|\mathbf{x}\|_2 = 7$, $\|\mathbf{x}\|_\infty = 6$, $\|\mathbf{y}\|_1 = 0.5$, $\|\mathbf{y}\|_2 = 0.3$, $\|\mathbf{x}\|_\infty = 0.2$.
2. Ezek az úgynevezett Pitagoraszi számnégyesekből képzett vektorok, amelyekben a koordináták négyzetösszege négyzetszám, így a 2-normájuk egész. A normák 3, 7, 9, 9.
3. 9, 5, 4;
4. 6, 20;

9. Számítsuk ki az alábbi mátrixok Frobenius-, 1-, 2- és ∞-normáját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. $\|\mathbf{A}\|_F = 5$, $\|\mathbf{A}\|_1 = 6$, $\|\mathbf{A}\|_2 = 5$, $\|\mathbf{A}\|_\infty = 6$.
$\|\mathbf{B}\|_F = 5$, $\|\mathbf{B}\|_1 = 7$, $\|\mathbf{B}\|_2 = 5$, $\|\mathbf{B}\|_\infty = 4$.
$\|\mathbf{C}\|_F = \sqrt{13}$, $\|\mathbf{C}\|_1 = 4$, $\|\mathbf{C}\|_2 = 3$, $\|\mathbf{C}\|_\infty = 4$
$\|\mathbf{D}\|_F = 9$, $\|\mathbf{D}\|_1 = 8$, $\|\mathbf{D}\|_2 = 8$, $\|\mathbf{D}\|_\infty = 8$.
$\|\mathbf{E}\|_F = 3\sqrt{3}$, $\|\mathbf{E}\|_1 = 5$, $\|\mathbf{E}\|_2 = 3$, $\|\mathbf{E}\|_\infty = 5$.
$\|\mathbf{F}\|_F = 3\sqrt{3}$, $\|\mathbf{F}\|_1 = 5$, $\|\mathbf{F}\|_2 = 5$, $\|\mathbf{F}\|_\infty = 5$.