1. Hozzuk ortogonális hasonlósági transzformációval felső háromszögalakra az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 14 & -9 \\ 0 & 16 & -10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & -3 \\ 3 & 17 & -6 \\ -12 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixokat!

Megoldás. Az $\mathbf{A}$ mátrixnál a jobb alsó 2×2-es mátrix sajátértéke $\lambda = 2$. A sajátvektor $1/5(3,4)$. Kiegészítjük teljes bázissá, a bázistranszformáció mátrixa:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

A felsőháromszög-mátrix:

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}'\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -25 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{B}$ mátrixnál a karakterisztikus polinom $-x^3+28x^2-245x+686 = (7-x)^2(14-x)$. A 7 kétszeres sajátérték, a sajátaltér 1-dimenziós, sajátvektor $\mathbf{x}_1 = (2,3,6)$, a 14-hez tartozó sajátvektor $\mathbf{x}_2 = (9,17,13)$, diagonalizálni nem lehet.

Az első sajátvektorhoz választunk egy ortonormált bázist, abból képezzük az $\mathbf{U}_1$ és az $\mathbf{U}_1^T\mathbf{B}\mathbf{U}_1$ mátrixot:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{U}_1 = [\mathbf{x}_1|\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_3] = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 3 & -2 & -6 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_1^T\mathbf{B}\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -21 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \ \dots \ * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbf{B}_1 \\ 0 & \end{array}\right]$$

tehát

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$$

A 7 sajátértékhez tartozó sajátvektor $(0,1)$, rá merőleges a $(1,0)$. Így

$$\mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_2 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{U}_2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Innen

$$\mathbf{U} = \mathbf{V}_1\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 2/7 & 3/7 & -6/7 \\ 3/7 & -6/7 & -2/7 \\ 6/7 & 2/7 & 3/7 \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{U}^T\mathbf{B}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 7 & -21 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

2. Melyek normálisak és melyek pozitív definitek az alábbi mátrixok közül?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. Mindegyik mátrix szimmetrikus vagy ferdén szimmetrikus, így normális. $\mathbf{B}$ nem szimmetrikus, így nem lehet definit. Az $\mathbf{A}$ főátlójában van 0, így nem lehet pozitív definit, például mert $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] = 0$. $\det \mathbf{C} = 0$, így $\mathbf{C}$ nem lehet pozitív definit. $\mathbf{E}$ főátlójában van negatív elem, így nem lehet pozitív definit. $\mathbf{D}$-nek két pozitív sajátértéke van, ezért pozitív definit.

3. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, akkor az alábbi állítások ekvivalensek:

1. $\mathbf{A}$ pozitív definit;
2. van olyan szimmetrikus, pozitív definit $\mathbf{X}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{X}^2$;
3. van olyan invertálható $\mathbf{Y}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{Y}^T\mathbf{Y}$.

Megoldás. 1. $\Rightarrow$ 2.: $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^T = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{D}\mathbf{C}^T = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}^T = \mathbf{X}^2$

2. $\Rightarrow$ 3.: $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$ megfelel.

3. $\Rightarrow$ 1.: $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{Y}^T\mathbf{Y}\mathbf{x} = |\mathbf{Y}\mathbf{x}|^2 \geq 0$ és az invertálhatóság miatt $\neq 0$, ha $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

4. Mutassuk meg a karakterisztikus egyenlet felírása nélkül, hogy az alábbi mátrixnak van legalább két valós sajátértéke:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A 9-középű 1-sugarú Gerschgorin-körben csak 1 gyök lehet, így az valós, és mivel 4 gyök van, a nem-valósak párosan fordulnak elő, ezért kell még valós gyöknek lennie.

5. Legyen d_i az $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^i$ nullterének dimenziója, $i = 1, 2, \ldots, s$, ahol s a maximális kitevő. Képezzük a $d'_i = d_{i-1} - d_i$ és abból a $d''_i = d'_i - d'_{i+1}$ (legyen $d_0 = n$, ahol n az $\mathbf{A}$ mérete és $d'_{s+1} = 0$). Mi a d' és a d'' sorozat elemeinek jelentése?

Megoldás. $d'_i = d_{i-1} - d_i$ a legalább i-hosszú Jordan-láncok száma, $d''_i = d'_i - d'_{i+1}$ a pontosan i-hosszú Jordan-láncok száma.

6. Egy 10×10-es $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Az $\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 8, 6, 5, 4, 4. Az $\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 7, 6, 6. Írjuk fel $\mathbf{A}$ Jordan-alakját!

Megoldás. $\lambda_1 = 1$-hez: $s = 4$, a d sorozat (d_0-tól kezdve) $10, 8, 6, 5, 4$, a d' sorozat (d'_1-től kezdve) $2, 2, 1, 1$, a d'' sorozat (d''_1-től kezdve) $0, 1, 0, 1$. $\lambda_2 = 2$-höz: $s = 2$, a d sorozat (d_0-tól kezdve) $10, 7, 6$, a d' sorozat (d'_1-től kezdve) $3, 1$, a d'' sorozat (d''_1-től kezdve) $2, 1$.
Ennek megfelelően a Jordan-alak:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-féle normálalakját, $\mathbf{J}$-t, és az $\mathbf{A}^{100}$, $e^{\mathbf{J}}$, $e^{3\mathbf{A}}$ mátixokat.

$$a)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b)\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Megoldás. *a)* A mátrix sajátértékei és sajátvektorai: az 1 sajátértékhez tartozik a $(-1,1,0)$ és a $(-1,0,1)$, míg a 0 sajátértékhez a $(-1,1,1)$ sajátvektor. E vektorok lineárisan függetlenek, a belőlük alkotott bázisban a mátrix diagonális alakot ölt, melynek főátlójában a sajátértékek vannak. Az eredeti és a diagonális mátrix hasonló, a hasonlóság $\mathbf{C}$ mátrixa a sajátvektorokból áll. Ez és ennek inverze:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Így tehát

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tudjuk, hogy ha az f hatványsor konvergenciatartományának belsejében tartalmazza az $\mathbf{A}$ mátrix spektrumát, és $\mathbf{A} = \mathbf{CJC}^{-1}$, ahol $\mathbf{J}$ az $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakja, akkor $f(\mathbf{A}) = \mathbf{C}f(\mathbf{J})\mathbf{C}^{-1}$. Itt $f(\mathbf{J})$ úgy kapható meg, hogy $\mathbf{J}$ minden Jordan-blokkjára alkalmazzuk az f függvényt. Mivel e feladatban minden Jordan-blokk 1×1-es, hisz a normálalak diagonális, ezért csak a főátló elemeire kell alkalmazni f-et. Eszerint

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{100} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{100} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az eredmény meglepő, de ha csak $\mathbf{A}^2$-et kiszámoltuk volna, láthattuk volna, hogy $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}$ minden pozitív egész n-re. Bár ezt az eredményt az $e^{3\mathbf{A}}$ kiszámításánál is fölhasználhatnánk, kövessük a fent vázolt utat:

$$e^{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^1 & 0 \\ 0 & 0 & e^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad e^{3\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 0 & e^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

és az utóbbi mátrixot felhasználva

$$e^{3\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} e^{3\mathbf{J}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^3 - 1 & e^3 - 1 & e^3 - 1 \\ 1 - e^3 & 1 & 1 - e^3 \\ 1 - e^3 & 1 - e^3 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) E mátrix háromszög alakú, így főátlójából leolvasható a karakterisztikus polinom: $(\lambda - 2)^2(\lambda + 5)$. A 2-höz tartozó sajátvektor $(1,0,0)$, a -5-höz tartozó $(-9/7, 0, 1)$, ezért a Jordan-mátrix alakja $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

Keresünk egy harmadik bázisvektort, jelölje (x,y,z). Ekkor a $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & x & -9/7 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & z & 1 \end{bmatrix}$ mátrixra igaz, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{BJB}^{-1}$, azaz $\mathbf{AB} = \mathbf{BJ}$. Ebből a **B**-ben lévő ismeretlenekre megoldható egyenletrendszert kapunk, egy megoldás: $x = z = 0$, $y = 1/3$, ennek inverze $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9/7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Mivel $(x^{100})' = 100x^{99}$, $(e^x)' = e^x$, $(e^{3x})' = 3e^{3x}$, ezért

$$\mathbf{J}^{100} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 100 \cdot 2^{99} & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{bmatrix}, \quad e^{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-5} \end{bmatrix},$$

$$e^{3\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} e^6 & 3e^6 & 0 \\ 0 & e^6 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-15} \end{bmatrix}.$$

Innen az $\mathbf{A}^{100} = \mathbf{B}\mathbf{J}^{100}\mathbf{B}^{-1}$ és $e^{3\mathbf{A}} = \mathbf{B}e^{3\mathbf{J}}\mathbf{B}^{-1}$ felhasználásával

$$\mathbf{A}^{100} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 100 \cdot 3 \cdot 2^{99} & \frac{9}{7}(2^{100} - 5^{100}) \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{bmatrix},$$

$$e^{3\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^6 & 9e^6 & \frac{9}{7}(e^6 - e^{-15}) \\ 0 & e^6 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-15} \end{bmatrix}.$$

.

8. Ellenőrizzük Perron tételét az alábbi mátrixra:

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Sajátértékek: 10, 3, 3, jobb Perron-vektor: $(5/25, 9/25, 11/25)$, bal Perron-vektor: $(4/7, 2/7, 1/7)$.

9. Határozzuk meg, hogy az alábbi mátrixok irreducibilisek vagy reducibilisek! A reducibilisekhez határozzuk meg a permutációs mátrixot is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Az **A** reducibilis, a **B** irreducibilis, a permutációs mátrix és a szimmetrikusan permutált **A** mátrix:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$